Πανεπιστημιο Πατρων - Πολυτεχνικη Σχολη
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών
και Πληροφορικής

Υπολογιστικά Ζητήματα στην Κοινωνική Επιλογή

Διδακτορική Διατριβή

Νικολαος Καρανικολας

Επιβλεπων: Χρηστος Κακλαμανης, Καθηγητης

Πάτρα, Ιούνιος 2014

Υπολογιστικά Ζητήματα στην Κοινωνική Επιλογή

Διδακτορική Διατριβή

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΚΑΡΑΝΙΚΟΛΑΣ

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή:

Χρήστος Κακλαμάνης, Καθηγητής (Επιβλέπων)
Παύλος Σπυράκης, Καθηγητής (Μέλος Τριμελούς Επιτροπής)
Ιωάννης Καραγιάννης, Επίκουρος Καθηγητής (Μέλος Τριμελούς Επιτροπής)
Εμμανουήλ Βαρβαρίγος, Καθηγητής
Ευστράτιος Γαλλόπουλος, Καθηγητής
Σταύρος Κοσμαδάκης, Καθηγητής
Σωτήρης Νικολετσέας, Αναπληρωτής Καθηγητής

Περίληψη

Στο πλαίσιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής μελετώνται υπολογιστικά ζητήματα που προκύπτουν από τη θεωρία της κοινωνικής επιλογής. Ένα από τα κύρια θέματα της θεωρίας αυτής είναι οι εκλογές. Τα προβλήματα που σχετίζονται με τις εκλογές ανήκουν στη θεωρία ψηφοφοριών όπου βασικό πρόβλημα είναι η εύρεση του νικητή των εκλογών όταν έχουμε ως δεδομένες τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετοί κανόνες ψηφοφορίας βάσει των οποίων γίνεται ο υπολογισμός της κατάταξης μιας ψηφοφορίας και της ανάδειξης του νικητή. Η θεωρία των ψηφοφοριών αποτελεί ένα σημαντικό κλάδο της θεωρίας της κοινωνικής επιλογής με άμεσες εφαρμογές στην κοινωνία, καθώς οι κανόνες αυτοί εφαρμόζονται στην πράξη σε βουλευτικές, δημοτικές ή τοπικές εκλογές, καθώς επίσης και σε αρκετές επιτροπές σχετικές με την λήψη συλλογικών αποφάσεων. Στη συγκεκριμένη διατριβή μελετούμε πρώτα τους κανόνες ψηφοφορίας που πρότειναν ο Dodgson και ο Young, οι οποίοι είναι σχεδιασμένοι έτσι ώστε να εντοπίζουν τον υποψήφιο που είναι διαισθητικά πιο κοντά στο να είναι ο νικητής σύμφωνα με το κριτήριο του Condorcet. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, νικητής θα πρέπει να είναι ο υποψήφιος που έχει την προτίμηση της πλειοψηφίας έναντι των άλλων υποψήφιων. Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν μπορεί να υπολογιστεί πάντα, καθώς οι προτιμήσεις της πλειοψηφίας μπορεί να είναι κυκλικές. Για παράδειγμα σε μια εκλογή με 3 υποψηφίους, ο υποψήφιος a να προτιμάται σε σχέση με τον b, ο b να προτιμάται σε σχέση με τον c, αλλά ο c να προτιμάται σε σχέση με τον a. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να καθοριστεί ο νικητής των εκλογών σύμφωνα με το κριτήριο του Condorcet. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τους κανόνες ψηφοφορίας που προτάθηκαν από τους Dodgson και Young, οι οποίοι παρέχουν μια διαφορετική έννοια εγγύτητας ενός υποψηφίου στο να αναδειχθεί νικητής κατά Condorcet. Οι συγκεκριμένοι κανόνες αποτελούν ένα σημαντικό κομμάτι της βιβλιογραφίας της θεωρίας της Κοινωνικής Επιλογής διότι διαισθητικά παρουσιάζουν υψηλή εγγύτητα με τον κανόνα του Condorcet. Πιο συγκεκριμένα και σύμφωνα με τον κανόνα του Dodgson ισχύουν τα εξής: δεδομένου ενός συνόλου προτιμήσεων των ψηφοφόρων, ο βαθμός ενός υποψηφίου ορίζεται ως ο ελάχιστος αριθμός των ανταλλαγών που πρέπει να γίνουν μεταξύ γειτονικών υποψηφίων στην κατάταξη των ψηφοφόρων έτσι ώστε ο συγκεκριμένος υποψήφιος να αναδειχθεί νικητής κατά Condorcet. Ο υποψήφιος που έχει τον ελάχιστο βαθμό Dodgson είναι νικητής κατά Dodgson. Αντίστοιχα, σύμφωνα με τον κανόνα του Young ο βαθμός ενός υποψηφίου είναι το μέγεθος του μεγαλύτερου υποσυνόλου ψηφοφόρων έτσι ώστε, αν ληφθούν υπόψη μόνο αυτά τα ψηφοδέλτια, ο συγκεκριμένος υποψήφιος να γίνεται νικητής κατά Condorcet. Ο υποψήφιος με το μέγιστο βαθμό Young είναι νικητής κατά Young.

Δυστυχώς, ο υπολογισμός του βαθμού ενός δεδομένου υποψηφίου είναι δύσκολος είτε με τον κανόνα του Dodgson είτε με τον κανόνα του Young. Για αυτό το λόγο τα υπολογιστικά ζητήματα που προκύπτουν και μελετώνται στην παρούσα διατριβή αφορούν στην προσέγγιση των δυο αυτών κανόνων ψηφοφορίας. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζονται δύο αλγόριθμοι που προσεγγίζουν το βαθμό ενός υποψηφίου σύμφωνα με τον κανόνα του Dodgson: ένας άπληστος αλγόριθμος και ένας αλγόριθμος βασισμένος σε γραμμικό πρόγραμμα. Οι δυο αυτοί αλγόριθμοι έχουν λόγο προσέγγισης H_{m-1}, όπου m είναι ο αριθμός των υποψηφίων και H_{m-1} είναι ο $(m-1)$-ος αρμονικός αριθμός. Επίσης, αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να προσεγγίζει το βαθμό Dodgson κατά λογαριθμικό παράγοντα, εκτός εάν υπάρχουν για τα προβλήματα της κλάσης $\mathcal{NP}$ αλγόριθμοι ψευδο-πολυωνυμικού χρόνου. Παρότι διαισθητικά υπερέχει ο ά-πληστος αλγόριθμος, στη συγκεκριμένη διατριβή υποστηρίζουμε ότι ο αλγόριθμος που είναι βασισμένος σε γραμμικό πρόγραμμα έχει πλεονέκτημα από την οπτική της θεωρίας της κοινωνικής επιλογής. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι ο υπολογισμός κάθε λογικής προσέγγισης της κατάταξης που παράγεται από τον κανόνα Dodgson είναι ένα υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα, γεγονός που εξηγεί, από την πλευρά της θεωρίας της πολυπλοκότητας, το ότι έχουν παρατηρηθεί μεγάλες διαφορές κατά τη σύγκριση εκλογών Dodgson με α-πλούστερους κανόνες ψηφοφορίας που εμπεριέχονται στη βιβλιογραφία της θεωρίας της κοινωνικής επιλογής. Τέλος, αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα υπολογισμού του βαθμού ενός υποψηφίου σύμφωνα με τον κανόνα του Young είναι επίσης υπολογιστικά δύσκολο. Αυτό οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα μη προσεγγισιμότητας για την κατάταξη υποψηφίων σε μια εκλογή σύμφωνα με τον κανόνα του Young.

Αν και ο κανόνας του Dodgson είναι ένας από τους πιο καλά μελετημένους κανόνες ψηφοφορίας, παρουσιάζει σοβαρές ελλείψεις, τόσο από υπολογιστικής άποψης — είναι υπολογιστικά δύσκολο ακόμη και να

προσεγγιστεί ο βαθμός Dodgson ενός υποψηφίου — όσο και από την πλευρά της κοινωνικής επιλογής, καθώς αποτυγχάνει σε βασικές επιθυμητές ιδιότητές της, όπως είναι η μονοτονία και η ομοιογένεια. Ωστόσο, αυτό δεν αποκλείει την ύπαρξη προσεγγιστικών αλγορίθμων για τον κανόνα του Dodgson που είναι μονότονοι ή ομοιογενείς, οπότε τίθεται το ερώτημα ύπαρξης τέτοιων αλγόριθμων. Στη διατριβή αυτή δίνονται οριστικές απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά. Παρουσιάζεται ένας μονότονος αλγόριθμος εκθετικού χρόνου που πετυχαίνει λόγο προσέγγισης του βαθμού Dodgson ίσο με 2 και το αποτέλεσμα συμπληρώνεται με ένα αυστηρό αντίστοιχο κάτω φράγμα. Παρουσιάζεται επίσης ένας μονότονος προσεγγιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου με λόγο $\mathcal{O}(\log m)$ (όπου m είναι ο αριθμός των υποψηφίων): και στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα είναι βέλτιστο, λόγω ύπαρξης αντίστοιχου κάτω φράγματος. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι μια μικρή παραλλαγή σε ένα γνωστό κανόνα ψηφοφορίας δίνει ένα μονότονο, ομοιογενή, $\mathcal{O}(m \log m)$-προσεγγιστικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου, με τον καλύτερο δυνατό λόγο προσέγγισης, ακόμη και αν αυτό που μας ενδιαφέρει είναι μόνο η ομοιογένεια. Τέλος, μελετώνται διάφορες πρόσθετες ιδιότητες κοινωνικής επιλογής, για τις οποίες δεν υπάρχει αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης που να εξαρτάται μόνο από το m. Αυτά τα αποτελέσματα της προσεγγισιμότητας του κανόνα αυτού αποτελούν σημαντική προσφορά της διατριβής καθώς μπορούν να θεωρηθούν ως κανόνες που υπολογίζονται σε πολυωνυμικό χρόνο και πληρούν μάλιστα επιθυμητές κοινωνικές ιδιότητες, ενώ ταυτόχρονα διέπονται και από την φιλοσοφία του κανόνα που θέσπισε ο Dodgson.

Ένα άλλο σημαντικό υπολογιστικό πρόβλημα με το οποίο ασχολείται η παρούσα διατριβή είναι αυτό της δωροδοκίας των εκλογών. Στο πρόβλημα της δωροδοκίας μπορεί κάποιος με δεδομένο ένα χρηματικό προϋπολογισμό να αλλάξει τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων ώστε να αναδειχθεί νικητής των εκλογών ο υποψήφιος της αρεσκείας του. Στη συγκεκριμένη διατριβή μελετώνται κανόνες ψηφοφορίας που βασίζονται στη βαθμολόγηση των υποψηφίων. Πιο συγκεκριμένα μελετάται η τάξη των κανόνων ψηφοφορίας όπου κάθε ψηφοφόρος εκχωρεί κ βαθμούς στον υποψήφιο που προτιμά ως πρώτο, λ βαθμούς στον υποψήφιο που προτιμά ως δεύτερο και 0 βαθμούς σε όλους τους υπόλοιπους υποψηφίους. Αποδεικνύεται ότι για αυτήν την τάξη των κανόνων βαθμολόγησης η δωροδοκία είναι ένα υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα. Στους κανόνες που βασίζονται στην βαθμολόγηση των υποψηφίων περιλαμβάνονται αυτοί της πλειοψηφίας και της 2-έγκρισης όπου μια βέλτιστη στρατηγική δωροδοκίας μπορεί εύκολα να υπολογιστεί, καθώς επίσης και ο κανόνας της 3-έγκρισης όπου η δωροδοκία είναι ένα υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα. Λαμβάνοντας υπόψιν την πολυπλοκότητα αυτών των κανόνων εξάγεται το συμπέρασμα ότι οι κανόνες που μελετήθηκαν είναι εκ των πιο απλών που δεν είναι ευάλωτοι στη δωροδοκία.

Abstract

In this PhD thesis we study computational problems arising from the theory of social choice. One main aspect of Computational Social Choice is voting theory. The most important problem of voting theory is the computation of the winner of the elections when we have as input the preferences of the voters. In the literature there are many voting rules according to which the computation of the winner of the elections is done. Voting theory is a seminal subject in the Computational Social Choice theory with applications in the society. Voting rules are widely used in government and municipal or local elections and also in committees for taking decisions. In this thesis we start by considering voting rules proposed by Dodgson and Young. These rules are both designed to find an alternative closest to being a Condorcet winner. According to the Condorcet criterion, the winner of the elections should be the one that the majority of the voters prefer in relation to every other candidate. Unfortunately, the preferences of the majority may be circular. For example, in an election with 3 candidates, candidate a is preferred to b by the majority and b is preferred in relation to c, but c is preferred to a. Then a Condorcet winner does not exist. Each of these voting rules provide a different notion of proximity of how close they are to Condorcet rule. In the Dodgson rule the score of a candidate, given a set of preferences, is the minimum number of exchanges between adjacent candidates in order for the specific candidate to become a Condorcet winner. The Dodgson winner is the candidate with the minimum Dodgson score. In the Young rule the score of a candidate is the size of the largest subset of voters, when taking in account only these votes, the specific candidate becomes a Condorcet winner. The Young winner is the candidate with the maximum Young score.

The score of a given alternative is known to be hard to compute under either rule and so the computational problems that arise and we consider are related to the approximation of the voting rules proposed by Dodgson and Young. We put forward two algorithms for approximating the Dodgson score: a combinatorial, greedy algorithm and an LP-based algorithm, both of which yield an approximation ratio of H_{m-1}, where m is the number of alternatives and H_{m-1} is the $(m-1)$st harmonic number. We also prove that there is no polynomial time algorithm that approximates the Dodgson score by $(1/2-\epsilon)\ln m$, unless problems in $\mathcal{NP}$ have quasi-polynomial time algorithms. Despite the intuitive appeal of the greedy algorithm, we argue that the LP-based algorithm has an advantage from a social choice point of view. Further, we demonstrate that computing any reasonable approximation of the ranking produced by Dodgson's rule is $\mathcal{NP}$-hard. This result provides a complexity-theoretic explanation of sharp discrepancies that have been observed in the social choice theory literature when comparing Dodgson elections with simpler voting rules. Also, we show that the problem of calculating the Young score is $\mathcal{NP}$-hard to approximate by any factor. This leads to an inapproximability result for the Young ranking.

Although Dodgson's rule is one of the most well-studied voting rules, it suffers from serious deficiencies, both from the computational point of view — it is $\mathcal{NP}$-hard even to approximate the Dodgson score within sublogarithmic factors — and from the social choice point of view — it fails basic social choice desiderata such as monotonicity and homogeneity. However, this does not preclude the existence of approximation algorithms for Dodgson that are monotonic or homogeneous, and indeed it is natural to ask whether such algorithms exist. In this thesis we give definitive answers to these questions. We design a monotonic exponential-time algorithm that yields a 2-approximation to the Dodgson score, while matching this result with a tight lower bound. We also present a monotonic polynomial-time $\mathcal{O}(\log m)$-approximation algorithm (where m is the number of alternatives); this result is tight as well due to a complexity-theoretic lower bound. Furthermore, we show that a slight variation on a known voting rule yields a monotonic, homogeneous, polynomial-time $\mathcal{O}(m \log m)$-approximation algorithm, and establish that it is impossible to achieve a better approximation ratio even if one just asks for homogeneity. We complete the picture by studying several additional social choice properties; for these properties, we prove that algorithms with an approximation ratio that depends only on m do not exist.

In this thesis we consider also the important computational problem of bribery in elections, where the winning candidate is computed using a scoring voting rule. In the bribery problem we have an external agent who wants to change the preferences of some voters to make his favorite candidate win the election given a budget. In this thesis we consider scoring voting rules where the voter gives to the first candidate κ points, λ points to his second most preferred candidate and zero points to all other candidates. We prove that for this class of rules bribery is a computationally hard problem. The class of scoring voting rules includes plurality and 2-approval for which an optimal bribing strategy can be computed efficiently as well as 3-approval which is hard to bribe. Concluding we derive that the class of rules we consider is one of the most simple scoring voting rules that are resistant to bribery.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) - Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: Ηράκλειτος ΙΙ. Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται ένα συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον από την πλευρά της θεωρητικής πληροφορικής για τα υπολογιστικά προβλήματα που προκύπτουν από την θεωρία της Κοινωνικής Επιλογής (Social Choice Theory). Η απαίτηση για κοινωνική δικαιοσύνη και η εκτεταμένη χρήση των ψηφοφοριών σε διαφόρους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας έχουν συντελέσει στο γεγονός αυτό. Στις μέρες μας βλέπουμε να χρησιμοποιούνται σύνθετοι κανόνες ψηφοφορίας ακόμη και σε βουλευτικές ή δημοτικές εκλογές. Η σύνθετη ανάλυση, από υπολογιστικής πλευράς, αυτών των κανόνων ψηφοφορίας οδήγησε στη μελέτη διαφόρων υπολογιστικών ζητημάτων που πηγάζουν από την θεωρία της Κοινωνικής Επιλογής. Η δομή της διατριβής είναι η ακόλουθη.

Αρχικά (στο Κεφάλαιο 1) αναλύουμε τη συσχέτιση των επιστημονικών πεδίων της θεωρίας της Κοινωνικής Επιλογής και της Επιστήμης των Υπολογιστών, μέσα από την οποία προκύπτει ένα νέο πεδίο στον τομέα της επιστήμης που ονομάζεται Υπολογιστική Κοινωνική Επιλογή. Σκοπός είναι να εξηγήσουμε ποια είναι τα υπολογιστικά ζητήματα που ερευνώνται στο νέο αυτό πεδίο, ξεκινώντας από τη θεωρία ψηφοφοριών, μιας και αυτό είναι το αντικείμενο που θα μας απασχολήσει εκτενέστερα. Σε αυτό το πλαίσιο αναλύουμε τους σημαντικότερους κανόνες ψηφοφορίας που υπάρχουν στη βιβλιογραφία και αναφέρουμε τα υπολογιστικά ζητήματα από τα οποία πάσχουν οι περισσότεροι από αυτούς και αφορούν κυρίως στην υπολογιστική πολυπλοκότητα και συγκεκριμένα στη δυσκολία εύρεσης του νικητή σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς. Στη συνέχεια αναλύουμε προβλήματα που προέρχονται από την θεωρία της Κοινωνικής Επιλογής και συγκεκριμένα ιδιότητες των κανόνων ψηφοφορίας που δεν είναι επιθυμητές, όπως είναι η χειραγώγηση και η δωροδοκία σε εκλογές. Η σύνδεση της θεωρίας της Κοινωνικής Επιλογής με την Επιστήμη των Υπολογιστών και την υπολογιστική πολυπλοκότητα προσφέρει τα απαραίτητα εργαλεία ώστε να αντιμετωπιστούν ικανοποιητικά αυτά τα προβλήματα. Αντιστοίχως, μελετούμε τα υπολογιστικά προβλήματα της κατανεμημένης ανάθεσης πόρων αφού εδώ προκύπτουν ζητήματα δικαιοσύνης, μεγιστοποίησης του κοινωνικού οφέλους και έλλειψης ζήλιας κατά το διαμοιρασμό πόρων και αγαθών. Έπειτα, εξετάζουμε τις απαιτήσεις που υπάρχουν για την πολυπλοκότητα στην επικοινωνία για τα υπολογιστικά ζητήματα της Υπολογιστικής Κοινωνικής Επιλογής που έχουμε αναφέρει προηγουμένως, ενώ τελειώνοντας το πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε το ερευνητικό αντικείμενο και τη συνεισφορά της διατριβής.

Η υπόλοιπη διατριβή δομείται ως εξής.

- Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται αποτελέσματα για την προσέγγιση των κανόνων ψηφοφορίας του Dodgson και του Young, ξεκινώντας από τους ορισμούς των κανόνων ψηφοφορίας και την ανάλυση των προβλημάτων που παρουσιάζουν από υπολογιστικής πλευράς. Παρουσιάζονται νέοι αλγόριθμοι και γίνεται αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

- Στο Κεφάλαιο 3 αναλύεται η αδυναμία του κανόνα του Dodgson να ικανοποιήσει βασικές ιδιότητες της θεωρίας της Κοινωνικής Επιλογής. Προτείνονται προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για τον κανόνα του Dodgson που ικανοποιούν αυτές τις βασικές ιδιότητες, ενώ γίνεται αναφορά στη χρησιμότητα των προσεγγιστικών αυτών αλγορίθμων.

- Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται το υπολογιστικό πρόβλημα της δωροδοκίας σε εκλογές και αποδεικνύεται ταυτόχρονα ότι ακόμη και σε έναν απλό και φαινομενικά εύκολο κανόνα ψηφοφορίας, το πρόβλημα της δωροδοκίας είναι υπολογιστικά δύσκολο.

- Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται συνολική αξιολόγηση των συμπερασμάτων μας και τοποθέτηση της συμβολής της διατριβής.

1.1 Τι είναι η Υπολογιστική Κοινωνική Επιλογή

Η θεωρία της Κοινωνικής Επιλογής αφορά στη σχεδίαση και ανάλυση μεθόδων για λήψη συλλογικών αποφάσεων. Τα τελευταία χρόνια η επιστήμη των υπολογιστών και η τεχνητή νοημοσύνη (ΤΝ) διαδραματίζουν ολοένα και πιο ενεργό ρόλο στην Κοινωνική Επιλογή, ενώ έχουν αναπτυχθεί δυο διαφορετικές κατευθύνσεις έρευνας. Η πρώτη από αυτές, αφορά στην εισαγωγή εννοιών και μεθόδων από την ΤΝ για την επίλυση ερωτημάτων που αρχικά πηγάζουν από την Κοινωνική Επιλογή. Έναυσμα για αυτήν τη κατεύθυνση αποτέλεσε το γεγονός ότι οι θεωρητικοί της Κοινωνικής Επιλογής έχουν επικεντρωθεί στην καθιέρωση αφηρημένων αποτελεσμάτων που σχετίζονται με την ύπαρξη διαδικασιών που ικανοποιούν συγκεκριμένα ερωτήματα, αλλά τα υπολογιστικά ζητήματα που σχετίζονται με αυτά δεν έχουν αναλυθεί επαρκώς. Για παράδειγμα, ενώ δεν είναι δυνατό να σχεδιαστεί ένα πρωτόκολλο ψηφοφορίας που να κάνει αδύνατο για ένα ψηφοφόρο να κλέψει με τον ένα τρόπο ή τον άλλον, μπορεί να αποδειχθεί ότι το να κλέψει κάποιος επιτυχώς είναι ένα υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα, γεγονός που θεωρείται επιθυμητό στην πράξη. Αυτό δείχνει την προσφορά της ΤΝ και γενικότερα την επίδραση της επιστήμης των υπολογιστών στην επίλυση προβλημάτων της θεωρίας της Κοινωνικής Επιλογής. Εκτός από τη θεωρητική ανάλυση της πολυπλοκότητας των πρωτοκόλλων ψηφοφορίας, άλλα χαρακτηριστικά παραδείγματα στην Υπολογιστική Κοινωνική Επιλογή αποτελούν ο επίσημος ορισμός και η επαλήθευση των κοινωνικών διαδικασιών (όπως οι αλγόριθμοι δίκαιης κατανομής) χρησιμοποιώντας μαθηματική λογική, καθώς και η εφαρμογή διαδικασιών που αναπτύχθηκαν από την ΤΝ και τη λογική στη συμβατική αναπαράσταση των προτιμήσεων σε συνδυαστικές περιοχές (όπως η συζήτηση πάνω σε αδιαίρετους πόρους ή η ψηφοφορία για επιτροπές).

Η δεύτερη γραμμή έρευνας στην Υπολογιστική Κοινωνική Επιλογή δείχνει προς την αντίθετη κατεύθυνση, καθώς ασχολείται με την εισαγωγή εννοιών και διαδικασιών από τη θεωρία αυτή για την επίλυση ερωτημάτων που προκύπτουν στην Επιστήμη των Υπολογιστών και στην ΤΝ. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση της εφαρμογής των διαδικασιών της Κοινωνικής Επιλογής στην ανάπτυξη συστημάτων κατάταξης που χρησιμοποιούν οι μηχανές αναζήτησης στο Internet.

Όλα αυτά δημιουργούν μια γενικότερη τάση για διεπιστημονική έρευνα που περιλαμβάνει από την μια πλευρά τη θεωρία αποφάσεων, τη θεωρία παιγνίων, την κοινωνική επιλογή και την οικονομική θεωρία ευημερίας, και από την άλλη την πληροφορική, την τεχνητή νοημοσύνη, την έρευνα διαδικασιών, και την υπολογιστική λογική. Θετικό στοιχείο αποτελεί ότι ο ευεργετικός αντίκτυπος της έρευνας στη θεωρία παιγνίων και την πληροφορική ήδη αναγνωρίζεται και οδηγεί σε σημαντική πρόοδο σε τομείς όπως οι συνδυαστικές δημοπρασίες, ο σχεδιασμός μηχανισμών και οι εφαρμογές στο ηλεκτρονικό εμπόριο. Υπάρχουν δύο διακριτές κατευθυντήριες γραμμές σύμφωνα με τις οποίες θα μπορούσαμε να ταξινομήσουμε τα θέματα που εξετάστηκαν από την υπολογιστική κοινωνική επιλογή:

1. Η φύση του προβλήματος της κοινωνικής επιλογής που εξετάζεται και
2. Ο τύπος της υπολογιστικής τεχνικής που μελετάται.

Αυτές οι δύο γραμμές είναι ανεξάρτητες ως ένα βαθμό. Παραθέτουμε αρχικά έναν (μη λεπτομερή) κατάλογο θεμάτων που εμπίπτουν στην πρώτη περίπτωση:

Συνάθροιση προτιμήσεων - Η συνάθροιση των προτιμήσεων είναι μια συλλογή $P =< P_1, ..., P_n >$ από τις προτιμήσεις μεμονωμένων ψηφοφόρων (προφίλ προτιμήσεων) σε μια συλλογική προτίμηση P^*. Μερικές φορές ενδιαφερόμαστε μόνο για τον καθορισμό ενός κοινωνικά αποδεκτού υποψηφίου ή ενός υποσυνόλου των κοινωνικά προτιμώμενων υποψηφίων παρά για μια συνολική προτίμηση: μια συνάρτηση κοινωνικής επιλογής αντιστοιχίζει μια συλλογική προτίμηση P σε έναν μόνο υποψήφιο, ενώ μια αντιστοιχία κοινωνικής επιλογής αντιστοιχίζει μια συλλογική προτίμηση P σε ένα μη κενό υποσύνολο υποψηφίων. Η πρώτη αυτή περίπτωση μοιάζει με αυτές που περιγράφονται στη συνέχεια, οι οποίες συνήθως εξετάζουν κάποιο είδος συνάθροισης προτιμήσεων, αλλά σε πιο συγκεκριμένο πλαίσιο.

Θεωρία ψηφοφοριών (εκλογών) - Η ψηφοφορία είναι ένας από τους δημοφιλέστερους τρόπους για να φτάσουμε σε κοινά αποδεκτές αποφάσεις. Οι ερευνητές στη θεωρία της κοινωνικής επιλογής έχουν προτείνει διάφορους κανόνες ψηφοφορίας και έχουν μελετήσει εκτενώς τις ιδιότητες τους. Ιδιαίτερη αναφορά σε διάφορους κανόνες ψηφοφορίας περιλαμβάνεται π.χ. στην εργασία των Brams και Fishburn [17]. Παραδείγματος χάριν ένας απλός κανόνας ψηφοφορίας είναι αυτός που υπολογίζει ένα βαθμό για κάθε υποψήφιο με βάση τη θέση του σε κάθε προφίλ προτίμησης και επιλέγει τον υποψήφιο με το μεγαλύτερο άθροισμα βαθμών. Παρακάτω θα αναλύσουμε αρκετούς από τους πλέον σημαντικούς κανόνες ψηφοφορίας.

Κατανομή των πόρων και δίκαιη διαμέριση - Η κατανομή των πόρων των αδιαίρετων αγαθών στοχεύει στον καταμερισμό των στοιχείων από ένα πεπερασμένο σύνολο R στα μέλη ενός συνόλου από N οντότητες, λαμβάνοντας υπόψη τις προτιμήσεις τους για όλες τις πιθανές δέσμες αγαθών. Στο κεντρικό πρόβλημα κατανομής, ο καταμερισμός αυτός καθορίζεται από μια κεντρική αρχή στην οποία οι οντότητες έχουν δώσει τις προτιμήσεις τους εκ των προτέρων. Στα κατανεμημένα προβλήματα, οι οντότητες διαπραγματεύονται, κοινοποιούν τα ενδιαφέροντά τους και ανταλλάσσουν τα αγαθά κατά την διάρκεια διαφόρων γύρων και ενδεχομένως με πολύπλευρο τρόπο. Μια επισκόπηση των ζητημάτων στην κατανομή των πόρων παρατίθεται στο [26]. Γενικότερα μπορούμε να διακρίνουμε δύο τύπους κριτηρίων για την αξιολόγηση της ποιότητας μιας κατανομής πόρων: την αποδοτικότητα και τη δικαιοσύνη. Το πλέον θεμελιώδες κριτήριο αποδοτικότητας είναι η αποδοτικότητα κατά Pareto όπου μια κατανομή πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μην υπάρχει εναλλακτική κατανομή που θα ήταν καλύτερη για μερικές οντότητες, ενώ ταυτόχρονα δεν πρέπει να είναι χειρότερη για οποιαδήποτε από τις άλλες κατανομές. Ένα παράδειγμα για ένα κριτήριο δικαιοσύνης είναι η μη ύπαρξη ζήλειας (envy-freeness): μια κατανομή λέμε ότι δεν είναι ζηλόφθονη αν και μόνο αν, καμιά οντότητα δεν επιθυμεί τη δέσμη που κατέχει κάποια από τις υπόλοιπες οντότητες.

Σχηματισμός συνασπισμού - Σε πολλές περιπτώσεις, οι οντότητες δεν ανταγωνίζονται αλλά αντ΄ αυτού συνεργάζονται, όπως στην περίπτωση που θέλουν να υλοποιήσουν αποτελεσματικά ένα δεδομένο στόχο. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα ότι η οντότητα x ανταμείβεται με 10 όταν εκτελεί ένα δεδομένο στόχο, ενώ η οντότητα y με 20. Εάν διαμορφώσουν μια ομάδα, το κέρδος τους μπορεί να φτάσει μέχρι 50. Αντίστοιχη περίπτωση από την καθημερινότητα θα ήταν το παράδειγμα δύο μουσικών, όταν παίζουν είτε σόλο είτε σε ντουέτο. Ο σχηματισμός συνασπισμού μελετά δύο ερωτήσεις: πώς θα δημιουργηθούν συνασπισμοί για ένα δεδομένο πρόβλημα, και πώς πρέπει να διαιρεθεί το πλεόνασμα μεταξύ των μελών του συνασπισμού (εφόσον έχουν λύσει το πρόβλημα βελτιστοποίησης). Εξαιρετικής σπουδαιότητας είναι στο σημείο αυτό η έννοια της ευστάθειας όπου μια οντότητα δεν πρέπει να έχει κανένα κίνητρο για να εγκαταλείψει το συνασπισμό. Αυτές οι ερωτήσεις μελετώνται στον τομέα της συνεργατικής θεωρίας παιγνίων [100], και έχουν παρουσιαστεί διάφορες σχετικές προσεγγίσεις.

Συνάθροιση κρίσεων και συγχώνευση πεποιθήσεων - Ο τομέας της συνάθροισης κρίσεων στοχεύει στη μελέτη του πώς μια ομάδα ατόμων πρέπει να αθροίσει τις ατομικές κρίσεις των μελών της για μερικές διασυνδεδεμένες προτάσεις, στις αντίστοιχες συλλογικές κρίσεις για αυτές τις προτάσεις. Τέτοια προβλήματα συνάθροισης εμφανίζονται σε πολλά διαφορετικά συλλογικά όργανα λήψης αποφάσεων. Η συγχώνευση πεποιθήσεων είναι ένα παρεμφερές πρόβλημα που σχετίζεται με την εξεύρεση τρόπων ώστε να αθροιστούν διάφορες ατομικές βάσεις πεποιθήσεων σε μια συλλογική (οι συνδέσεις μεταξύ των δύο προβλημάτων παρουσιάζονται από τους Eckert και Pigozzi [47], [102]).

Συστήματα ταξινόμησης - Τα αποκαλούμενα «συστήματα ταξινόμησης» είναι μια παραλλαγή της κλασσικής θεωρίας κοινωνικής επιλογής όπου το σύνολο των ψηφοφόρων και το σύνολο των υποψηφίων συμπίπτουν. Η πιο γνωστή οικογένεια τέτοιων συστημάτων είναι η ταξινόμηση σελίδων από μηχανές αναζήτησης (π.χ., [2], [119]).

1.2 Θεωρία ψηφοφοριών

Η θεωρία ψηφοφοριών (εκλογών) πρωτοεμφανίστηκε στα τέλη του 18ου αιώνα υπό την επίδραση της Γαλλικής Επανάστασης. Τότε άρχισαν να προτείνονται συστήματα και τρόποι εκλογής που σκοπό είχαν τη δίκαιη ανακήρυξη του νικητή μιας ψηφοφορίας ή εκλογής.

Η αρχή έγινε από τον Borda [12] και τον Marquis de Condorcet [39]. Τα περισσότερα από τα συστήματα που προτάθηκαν εστιάζουν στις ιδιότητες των συστημάτων ψηφοφορίας για κυβερνητικές εκλογές ή λήψη αποφάσεων σε επιτροπές [11]. Για ένα μεγάλο διάστημα δεν υπήρξε αντίστοιχη έρευνα στα συστήματα αυτά. Στα τέλη όμως του 20ού αιώνα η εμφάνιση εφαρμογών μεγάλης κλίμακας για εξόρυξη πληροφορίας, κατάταξη και ανάκτησή της μετέθεσε τα συστήματα ψηφοφορίας στην έρευνα της επιστήμης των υπολογιστών. Αυτό συνέβη διότι προβλήματα σαν την κατάταξη συνόλων ([1, 36, 46]) μπορούν να θεωρηθούν ως προβλήματα εκλογών. Στα προβλήματα κατάταξης συνόλων, δίδεται ένα σύνολο από διαφορετικές κατατάξεις (π.χ. τα αποτελέσματα από διαφορετικές μηχανές αναζήτησης ιστοσελίδων σε ένα συγκεκριμένο ερώτημα) για το ίδιο σύνολο δεδομένων (π.χ. ιστοσελίδες σχετικές με το ερώτημα), και ο σκοπός είναι να επιλεγεί μια μοναδική κατάταξη που να είναι κοντά σε όλες τις κατατάξεις σύμφωνα με ένα πλήρως αποσαφηνισμένο κριτήριο. Σε αυτό το παράδειγμα, οι διαφορετικές μηχανές αναζήτησης είναι οι ψηφοφόροι και κάθε σελίδα αντιστοιχεί σε ένα υποψήφιο, ενώ ο σκοπός σύμφωνα με το οποίον υπολογίζεται η μοναδική κατάταξη είναι ο κανόνας ψηφοφορίας. Είναι φανερό ότι σε τέτοιες εφαρμογές η απόφαση για το ποιος είναι ο νικητής των εκλογών δεν είναι το μόνο πρόβλημα αφού συνήθως απαιτείται η πλήρης κατάταξη των υποψηφίων.

Το βασικό λοιπόν ερώτημα στο οποίο προσπαθεί να απαντήσει η θεωρία των εκλογών είναι το ποιος υποψήφιος αντανακλά καλύτερα το κοινωνικό καλό. Έχοντας ως δεδομένο ένα σύνολο ψηφοφόρων που κατατάσσουν ένα σύνολο υποψηφίων, ποιος είναι ο υποψήφιος εκείνος που θα επιλεγεί ως νικητής; Ο Γάλλος μαθηματικός, φιλόσοφος και ένας από τους πρώτους πολιτικούς επιστήμονες Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet, πρότεινε το ακόλουθο διαισθητικό κριτήριο: νικητής πρέπει να είναι ένας υποψήφιος που κερδίζει όλους τους άλλους υποψηφίους σε μια ανά ζεύγος εκλογή. Αυτό σημαίνει ότι ένας υποψήφιος προτιμάται σε σχέση με οποιονδήποτε άλλο από την πλειοψηφία των ψηφοφόρων. Για παράδειγμα, ο υποψήφιος a προτιμάται σε σχέση με τον b όταν στους παραπάνω από τους μισούς ψηφοφόρους ο a βρίσκεται πιο ψηλά στην προτίμησή τους. Δυστυχώς όμως οι προτιμήσεις της πλειοψηφίας μπορεί να είναι κυκλικές. Για παράδειγμα σε μια εκλογή με 3 υποψηφίους, ο υποψήφιος a να προτιμάται σε σχέση με τον b και ο b σε σχέση με τον c αλλά ο c να προτιμάται σε σχέση με τον a. Τότε δεν μπορεί να καθοριστεί ο νικητής των εκλογών σύμφωνα με αυτό το κριτήριο. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται *παράδοξο του Condorcet* για την παράκαμψη του οποίου πολλοί ερευνητές πρότειναν την εκλογή ενός υποψηφίου που να είναι όσο πιο κοντά γίνεται στο νικητή Condorcet. Υπάρχουν διαφορετικές ιδέες όσον αφορά στο πόσο πιο κοντά είναι ένας υποψήφιος στο νικητή με βάση τον Condorcet που οδηγούν σε διαφορετικά συστήματα εκλογών.

Παρακάτω αναφέρονται συνοπτικά οι κυριότερες μέθοδοι εκλογών που υπάρχουν στη θεωρία της κοινωνικής επιλογής, οι οποίες αναδεικνύουν τον νικητή και την κατάταξη των υποψηφίων μέσα από μια διαδικασία ψηφοφορίας.

Μέθοδος αθροίσματος ηττών: Σε κάθε υποψήφιο δίνεται ένας βαθμός ίσος με το άθροισμα όλων των διαφορών όταν έχει ηττηθεί σε ανά ζεύγη αναμετρήσεις με άλλους υποψηφίους. Σε περίπτωση που έχει κερδίσει η διαφορά δεν προσμετράται στο βαθμό. Ο υποψήφιος με το χαμηλότερο βαθμό ανακηρύσσεται νικητής.

Μέθοδος Borda: Κάθε υποψήφιος παίρνει ένα βαθμό για κάθε υποψήφιο που είναι κάτω από αυτόν στην κατάταξη και μισό βαθμό για κάθε υποψήφιο με τον οποίο βρίσκεται στην ίδια θέση. Ο υποψήφιος με το συνολικό υψηλότερο βαθμό κερδίζει. Αυτός ο βαθμός συχνά ονομάζεται αρίθμηση Borda (Borda Count).

Μέθοδος Black: Προτείνει ως νικητή τον νικητή Condorcet αν υπάρχει, αλλιώς τον νικητή Borda.

Μέθοδος Bucklin: Οι ψηφοφόροι ψηφίζουν τους υποψηφίους ανάλογα με τη σειρά προτίμησής τους. Πρώτα λαμβάνονται υπόψιν οι ψήφοι πρώτης επιλογής. Αν ένας υποψήφιος έχει την πλειοψηφία, τότε αυτός θα είναι και ο νικητής, ειδάλλως οι ψήφοι δεύτερης επιλογής προστίθενται σε αυτές της πρώτης. Αν βρεθεί υποψήφιος με πλειοψηφία τότε αναδεικνύεται νικητής, αν όμως δε βρεθεί, τότε συνεχίζεται η πρόσθεση και των επόμενων κατηγοριών επιλογής έως ότου κάποιους από τους υποψηφίους να ανακηρυχθεί νικητής.

Μέθοδος Copeland: Ο βαθμός Copeland κάθε υποψηφίου υπολογίζεται αν αφαιρέσουμε τον αριθμό των υποψηφίων που τον κερδίζουν σε ανά ζεύγη αναμετρήσεις από τον αριθμό των υποψηφίων έναντι των οποίων υπερτερεί. Ο υποψήφιος με τον υψηλότερο βαθμό Copeland κερδίζει.

Μέθοδος Dodgson: Ο βαθμός Dodgson είναι ο ελάχιστος αριθμός ανταλλαγών μεταξύ γειτονικών υποψηφίων στις προτιμήσεις των ψηφοφόρων προκειμένου να γίνει ένας συγκεκριμένος υποψήφιος νικητής σύμφωνα με το κριτήριο του Condorcet. Ο νικητής κατά Dodgson είναι οποιοσδήποτε υποψήφιος με το μικρότερο βαθμό Dodgson.

Μέθοδος έγκρισης (approval): Στην γενική μορφή του κανόνα αυτού ο ψηφοφόρος ψηφίζει όσους υποψηφίους επιθυμεί ενώ υπάρχουν και πιο ειδικές μορφές της μεθόδου όπου οι υποψήφιοι που μπορεί να ψηφίσει ένας ψηφοφόρος περιορίζονται σε ένα συγκεκριμένο αριθμό. Ο υποψήφιος με τις περισσότερες ψήφους κερδίζει.

Μέθοδος ελαχίστου-μεγίστου: Σε κάθε υποψήφιο δίδεται ένας βαθμός που ισούται με τη μεγαλύτερη διαφορά από την οποία αυτός ο υποψήφιος χάνει σε μια ανά ζεύγος εκλογή. Ο βαθμός

0 δίδεται αν δεν υπάρχουν ήττες για τον υποψήφιο. Ο υποψήφιος με το χαμηλότερο βαθμό κερδίζει.

Μέθοδος IRV: Σκοπός της μεθόδου αυτής είναι να βρεθεί για κάθε υποψήφιο (ανάμεσα σε αυτούς που δεν έχουν διαγραφεί) ο συνολικός αριθμός ψηφοφόρων που τον κατατάσσουν πρώτο. Κατόπιν διαγράφεται ο υποψήφιος με το χαμηλότερο βαθμό ενώ η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να μείνει ένας υποψήφιος που είναι ο νικητής.

Μέθοδος Kemeny-Young: Ο ψηφοφόρος κατατάσσει με σειρά προτίμησης τους υποψηφίους ενώ έχει το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του να μπορεί να κατατάξει περισσότερους από έναν υποψήφιους στην ίδια σειρά. Τα βήματα για την εφαρμογή αυτού του κανόνα είναι δυο. Αρχικά συγκροτείται ένας πίνακας που υπολογίζει ανά ζεύγη τους υποψηφίους σύμφωνα με τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων. Στη συνέχεια, εξετάζονται όλες οι πιθανές κατατάξεις υποψηφίων και υπολογίζεται ένας βαθμός για κάθε κατάταξη που ισούται με το άθροισμα των ζευγών του παραπάνω πίνακα. Η κατάταξη με το μεγαλύτερο βαθμό είναι η νικήτρια κατά Kemeny-Young.

Μέθοδος Nanson: Σύφωνα με αυτή τη μέθοδο διαγράφονται όσοι υποψήφιοι έχουν αρίθμηση Borda ίση ή μικρότερη της μέσης αρίθμησης Borda των υποψηφίων. Αυτό επαναλαμβάνεται μέχρι να παραμείνει ένας υποψήφιος.

Μέθοδος Πλειοψηφίας: Εδώ, κάθε ψηφοφόρος ψηφίζει μόνο ένα υποψήφιο. Ο υποψήφιος με τις περισσότερες ψήφους κερδίζει.

Μέθοδος Slater: Το M_P είναι το γράφημα του οποίου οι κορυφές είναι οι υποψήφιοι και περιέχει την ακμή $x \to y$ αν και μόνο αν μια αυστηρά πλειοψηφία ψηφοφόρων προτιμούν τον x από τον y. Ο κανόνας του Slater αντιστοιχεί n ατομικά προφίλ προτιμήσεων $P_1, ..., P_n$ σε ένα συνολικό προφίλ (κατάταξη Slater) ελαχιστοποιώντας την απόσταση για το γράφημα πλειοψηφίας M_P το οποίο επάγεται από το P.

Μέθοδος Smith: Το σύνολο Smith είναι το μικρότερο μη κενό σύνολο υποψηφίων έτσι ώστε οποιοσδήποτε υποψήφιος του συνόλου κερδίζει ανά ζεύγος οποιονδήποτε υποψήφιο εκτός του συνόλου. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, όλα τα μέλη του συνόλου Smith είναι νικητές.

Μέθοδος STV (Single Transferable Vote): Οι εκλογές γίνονται σε γύρους, με τους ψηφοφόρους να δίνουν ένα βαθμό στον υποψήφιο που κατατάσσουν υψηλότερα σε κάθε γύρο. Ο υποψήφιος με τους λιγότερους βαθμούς αποκλείεται. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται στις εθνικές εκλογές στην Ιρλανδία, στην Αυστραλία και στη Μάλτα και σε τοπικές εκλογές στην Ν. Ζηλανδία και στη Σκωτία.

Μέθοδος Young: Ο βαθμός Young ενός υποψηφίου είναι το μέγεθος του μεγαλύτερου υποσυνόλου ψηφοφόρων έτσι ώστε, αν λαμβάνονται υπόψιν μόνο αυτά τα ψηφοδέλτια, ο δεδομένος υποψήφιος να γίνεται νικητής Condorcet. Νικητής κατά Young είναι οποιοσδήποτε υποψήφιος με μέγιστο βαθμό. Εναλλακτικά ο νικητής κατά Young είναι ο υποψήφιος που αναδεικνύεται νικητής κατά Condorcet αφαιρώντας τους λιγότερους ψηφοφόρους.

Από τους προαναφερθέντες κανόνες εκλογών, οι πλέον μελετημένοι είναι αυτοί των Dodgson ([42]) και Young ([126]). Αν και αυτοί οι δύο κανόνες εκλογής παρουσιάζουν ενδιαφέρον, είναι γνωστό ότι είναι δύσκολο να υπολογιστούν. Ήδη από το 1989 οι Bartholdi, Tovey και Trick [6] έδειξαν ότι ο υπολογισμός του βαθμού Dodgson είναι ένα πλήρες για την κλάση $\mathcal{NP}$ πρόβλημα και έτσι ο εντοπισμός του νικητή κατά Dodgson είναι ένα επίσης υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα. Αυτή η σημαντική εργασία ήταν από τις πρώτες που χρησιμοποίησαν τεχνικές θεωρίας υπολογιστικής πολυπλοκότητας στη θεωρία κοινωνικής επιλογής. Αργότερα τα αποτελέσματα επεκτάθηκαν και από τους Hemaspaandra κ.ά. [67] οι οποίοι απέδειξαν ότι το πρόβλημα απόφασης για το εάν ένας συγκεκριμένος υποψήφιος είναι νικητής Dodgson είναι ένα υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα. Δυστυχώς, πολλοί άλλοι κανόνες ψηφοφορίας όπως αυτοί των Kemeny [74], Slater [118], και Young [126] έχουν επίσης αποδειχθεί δύσχρηστοι μιας και ο υπολογισμός του νικητή αποτελεί ένα υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα (Kemeny [69], Slater [29], Young [110]).

Τα αποτελέσματα των εργασιών που προαναφέρθηκαν ([6] και [67]) δεν παρέχουν επιπλέον στοιχεία για τη δυσκολία προσέγγισης μιας εκλογής Dodgson και απλώς δηλώνουν ότι είναι δύσκολο να αποφασιστεί εάν ένας δεδομένος υποψήφιος έχει ή όχι μικρότερο βαθμό Dodgson από κάποιον άλλο υποψήφιο που έχει υψηλότερο βαθμό Dodgson από τους άλλους υποψηφίους. Με απλά λόγια ένας κανόνας επιλογής πολυωνυμικού χρόνου δεν μπορεί να προσεγγίσει ακριβώς την κατάταξη όλων των υποψηφίων σε μια κατάταξη κατά Dodgson. Για αυτό το λόγο έχουν γίνει πολλές προσπάθειες να συγκριθεί το αποτέλεσμα μιας εκλογής Dodgson με εκλογές που βασίζονται σε απλούστερους κανόνες επιλογής, τέτοιες συγκρίσεις όμως πάντοτε αποκάλυπταν έντονες διαφορές. Για παράδειγμα, ο νικητής Dodgson μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε θέση στην κατάταξη σύμφωνα με τον κανόνα του Kemeny [107] ή του Borda [108]. Επίσης η κατάταξη του Dodgson μπορεί να είναι ακριβώς αντίθετη με του Borda [78] και του Copeland ([76]), και αντιστρόφως ο νικητής των εκλογών Kemeny και Slater μπορεί να είναι οπουδήποτε στην κατάταξη κατά Dodgson [77].

Τα παραπάνω αποτελέσματα αποτέλεσαν το έναυσμα για την προσέγγιση του υπολογισμού του βαθμού ενός υποψηφίου είτε με τον κανόνα του Dodgson είτε με τον κανόνα του Young μιας και αποτελεί ένα ενδιαφέρον υπολογιστικό πρόβλημα, ως ένα πεδίο εφαρμογής αλγοριθμικών τεχνικών. Βέβαια από την οπτική γωνιά της θεωρίας κοινωνικής επιλογής δεν είναι άμεσα προφανές ότι μια προσέγγιση ενός κανόνα ψηφοφορίας είναι η επιθυμητή, εφόσον μπορεί να εκλεγεί ένας υποψήφιος που δεν είναι ψηλά στις προτιμήσεις των ψηφοφόρων (π.χ. ένας υποψήφιος που δεν είναι ο πιο κοντινός σε νικητή κατά Condorcet). Όμως αποδεικνύουμε σε αυτή τη διατριβή ότι η χρήση προσέγγισης είναι επιθυμητή. Πράγματι, στις περιπτώσεις των κανόνων των Dodgson και Young, ο νικητής που υπολογίζουν είναι μια προσέγγιση του νικητή σύμφωνα με τον κανόνα του Condorcet. Οι αλγόριθμοι προσέγγισης μπορούν να θεωρηθούν ως ισοδύναμοι με νέους κανόνες ψηφοφορίας, που εγγυημένα εκλέγουν ένα υποψήφιο που δεν είναι πολύ μακριά από τον νικητή Condorcet. Έτσι λοιπόν σχεδιάζουμε δυο αλγόριθμους, ένα ντετερμινιστικό και έναν πιθανοτικό, με λόγο προσέγγισης του βαθμού Dodgson $\mathcal{O}(\log m)$, όπου m είναι ο αριθμός των υποψηφίων [23] ενώ η ερεύνα μας επεκτείνεται και στο σχεδιασμό προσεγγιστικών αλγόριθμων που πληρούν επιθυμητές κοινωνικές ιδιότητες [24].

1.3 Υπολογιστικά ζητήματα πολυπλοκότητας στην Χειραγώγηση και Δωροδοκία Εκλογών

Ένα πολύ σημαντικό υπολογιστικό ζήτημα της θεωρίας της Κοινωνικής Επιλογής που έχει μελετηθεί εκτενώς είναι αυτό της πολυπλοκότητας του ελέγχου και της χειραγώγησης των εκλογών. Στην χειραγώγηση μια ομάδα από παράγοντες (χειραγωγούς) προσθέτει τη δική της λίστα προτιμήσεων (δηλαδή νέους ψηφοφόρους) ώστε να κάνει κάποιον συγκεκριμένο υποψήφιο της αρεσκείας τους νικητή. Ας δούμε ένα παράδειγμα χειραγώγησης. Έστω 3 υποψήφιοι c_1, c_2, c_3 και 5 ψηφοφόροι από τους οποίους οι 2 έχουν το προφίλ προτίμησης $c_1 \succ c_2 \succ c_3$, 2 άλλοι ψηφοφόροι έχουν το προφίλ προτίμησης $c_2 \succ c_1 \succ c_3$, και ο τελευταίος ψηφοφόρος έχει το προφίλ προτίμησης $c_3 \succ c_1 \succ c_2$. Εάν χρησιμοποιείται ο κανόνας της πλειοψηφίας, ο τελευταίος ψηφοφόρος θα έχει συμφέρον να ψηφίσει ανειλικρινώς τον c_1 στην κορυφή, επειδή ο επιθυμητός υποψήφιος του, ο c_3, δεν έχει καμία πιθανότητα να νικήσει. Η σημασία των συστημάτων ψηφοφορίας προκάλεσε την διερεύνηση της ευαισθησίας των κανόνων ψηφοφορίας στην χειραγώγηση. Επίσης μελετήθηκαν και άλλοι κίνδυνοι όπως ο έλεγχος και η δωροδοκία των εκλογών. Για παράδειγμα, οι διοργανωτές μιας εκλογικής διαδικασίας μπορούν να προσπαθήσουν να ελέγξουν το αποτέλεσμα των εκλογών μέσω διαδικαστικών κόλπων όπως η πρόσθεση/αφαίρεση υποψηφίων, ή η ενθάρρυνση/αποθάρρυνση ψηφοφόρων. Η κλασσική θεωρία της Κοινωνικής Επιλογής ασχολείται με το πόσο πιθανός είναι ένας τέτοιος διαδικαστικός έλεγχος. Όμως αποδείχθηκε ότι παρόλο που υπάρχει η δυνατότητα ελέγχου ή χειραγώγησης εκλογών, είναι ακόμη δύσκολο να εντοπισθούν οι ενέργειες που απαιτούνται ώστε να επηρεάσουμε τον έλεγχο ή την χειραγώγηση. Ένας λόγος είναι ότι τα προβλήματα υπολογισμού ελέγχου, χειραγώγησης και δωροδοκίας είναι υπολογιστικά δύσκολα για αρκετούς κανόνες ψηφοφορίας. Η πολυπλοκότητα του ελέγχου για το ποιος είναι ο νικητής των εκλογών μελετήθηκε αρχικά από τους Bartholdi, Tovey και Trick [7] και αργότερα από πολλούς άλλους ερευνητές ([68], [57] και [92]). Η ακεραιότητα μιας εκλογικής διαδικασίας δεν κινδυνεύει μόνο από τους διοργανωτές αλλά και από τους ψηφοφόρους (χειραγώγηση), που μπορούν να ψηφίσουν βάσει στρατηγικής (και όχι σύμφωνα με τις πραγματικές τους προτιμήσεις) ώστε να πετύχουν το αποτέλεσμα που προτιμούν. Ένα θεμελιώδες θεώρημα της Κοινωνικής Επιλογής, αυτό των Gibbard-Satterthwaite ([65] και [113]) δείχνει ότι ουσιαστικά όλα τα συστήματα εκλογών μπορούν να χειραγωγηθούν. Έτσι είναι σημαντικό να βρούμε για ποια συστήματα είναι υπολογιστικά δύσκολη η χειραγώγηση. Η έρευνα ξεκίνησε από τους Bartholdi, Tovey και Trick [5], σύμφωνα με τους οποίους υπάρχουν συστήματα που είναι τρωτά στη χειραγώγηση (δηλαδή μπορούμε να πούμε σε πολυωνυμικό χρόνο εάν και πώς ένας δεδομένος υποψήφιος μπορεί να γίνει ο νικητής) και συστήματα που αντιστέκονται στη χειραγώγηση (δηλαδή είναι υπολογιστικά δύσκολο να υπολογιστεί ο νικητής). Συγκεκριμένα απέδειξαν ότι η χειραγώγηση του κανόνα της πλειοψηφίας μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Η έρευνα αργότερα συνεχίστηκε από πολλούς άλλους ερευνητές με έμφαση σε παραλλαγές του βασικού προβλήματος της χειραγώγησης ([34] και [66]). Το πρόβλημα της χειραγώγησης με βάρη είναι το βασικό πρόβλημα της χειραγώγησης με το περιορισμό ότι κάθε ψηφοφόρος έχει βάρος (π.χ. βάρος a ισοδυναμεί με a απλούς ψηφοφόρους μοναδιαίου βάρους). Στην εργασία [66] μελετάται το πρόβλημα της α-χειραγώγησης, όπου $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ ένας πίνακας με βαθμούς. Δηλαδή ο υποψήφιος που είναι πρώτος στην προτίμηση κάποιου ψηφοφόρου παίρνει α_1 βαθμούς, ο υποψήφιος που είναι δεύτερος α_2 και ούτω καθεξής. Στη περίπτωση που $\alpha_2 = ... = \alpha_m$ τότε το πρόβλημα επιλύεται γρήγορα ειδάλλως σε όλες τις άλλες περιπτώσεις το πρόβλημα είναι υπολογιστικά δύσκολο. Επιπλέον και η χειραγώγηση του κανόνα STV είναι υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα [4]. Ο λόγος που είναι ενδιαφέρουσα αυτή η ερευνητική αναζήτηση είναι ότι εάν το πρόβλημα υπολογισμού της χειραγώγησης είναι δύσκολο υπολογιστικά, τότε οι ψηφοφόροι θα σταματήσουν την χειραγώγηση και θα εκφράσουν τις ειλικρινείς προτιμήσεις τους. Δηλαδή, είναι από τις λίγες φορές που η πολυπλοκότητα δεν έχει αρνητικό ρόλο καθώς όσο υψηλότερη είναι τόσο το καλύτερο, και άρα αυτό μας ωθεί στο να αναζητήσουμε τέτοιους αλγόριθμους.

Ένα πρόβλημα που σχετίζεται στενά με το πρόβλημα της χειραγώγησης είναι η δωροδοκία. Αντί να προσθέτουμε ψηφοφόρους όπως στη περίπτωση της χειραγώγησης, εδώ κοιτάμε το πρόβλημα από τη μεριά ενός εξωτερικού παρατηρητή που θέλει να κάνει έναν δεδομένο υποψήφιο νικητή και έχει ένα προϋπολογισμό ώστε να κάνει τους ψηφοφόρους να αλλάξουν τις ψήφους τους. Το πρόβλημα της δωροδοκίας για τον κανόνα της πλειοψηφίας αποδείχτηκε ότι επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο [54]. Επίσης στην ίδια εργασία αποδείχτηκε ότι και το πρόβλημα δωροδοκίας του κανόνα της πλειοψηφίας με βάρη λύνεται γρήγορα. Μια σημαντική παραλλαγή του προβλήματος της δωροδοκίας είναι το πρόβλημα της δωροδοκίας με βάρη και τιμές για κάθε ψηφοφόρο (weighted-$bribery). Πλέον δεν έχουν όλοι οι ψηφοφόροι το ίδιο όριο δωροδοκίας αλλά κάθε ψηφοφόρος έχει διαφορετική τιμή ώστε να αλλάξει τις προτιμήσεις του. Σύμφωνα με την εργασία [54] αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα της δωροδοκίας με τιμές για τον κανόνα της πλειοψηφίας επιλύεται γρήγορα ενώ το πρόβλημα της δωροδοκίας με τιμές και βάρη για τον κανόνα της πλειοψηφίας είναι υπολογιστικά δύσκολο. Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας [25] μελετούμε το πρόβλημα της δωροδοκίας για μια κατηγορία κανόνων ψηφοφορίας που θεωρούνται από τους απλούστερους.

1.4 Κατανεμημένη Ανάθεση Πόρων και Διαπραγμάτευση

Τα τελευταία χρόνια, οι έννοιες από τη θεωρία κοινωνικής επιλογής έχουν γίνει όλο και περισσότερο εμφανείς στην έρευνα της πληροφορικής, και ιδιαίτερα σε θέματα όπως τα κατανεμημένα συστήματα, τα συστήματα πολλαπλών χρηστών, το υπολογιστικό πλέγμα, και το ηλεκτρονικό εμπόριο. Πολλά από τα ζητήματα που ερευνώνται σε αυτές τις περιοχές μπορούν να μοντελοποιηθούν ως διαπραγμάτευση μεταξύ αυτόνομων οντοτήτων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του υπολογιστικού πλέγματος, η πρόσβαση στους λιγοστούς υπολογιστικούς πόρους μπορεί να ανατεθεί βάσει συγκεκριμένων αναγκών. Η θεωρία παιγνίων αποτελεί τη βάση για την έρευνα των στρατηγικών πτυχών τέτοιων σεναρίων, ενώ οι μηχανισμοί συνάθροισης προτίμησης που πηγάζουν από τη θεωρία κοινωνικής επιλογής μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσδιορίσουν κοινωνικά επιθυμητά αποτελέσματα της διαπραγμάτευσης.

Μπορούμε να διακρίνουμε δύο τύπους κριτηρίων κατά την αξιολόγηση μιας ανάθεσης πόρων: κριτήρια που είναι σχετικά με την αποδοτικότητα μιας ανάθεσης και κριτήρια σχετικά με τις εκτιμήσεις δικαιοσύνης. Τα δύο αυτά κριτήρια μπορούν συχνά να περιγραφούν ως *κατάταξη με βάση το κοινωνικό όφελος* ή ως *μια συλλογική συνάρτηση χρησιμότητας* [95]. Παρακάτω, παρατίθενται μερικά παραδείγματα κριτηρίων αποδοτικότητας και δικαιοσύνης:

Αποδοτικότητα κατά Pareto - Είναι μια κατάσταση κατανομής πόρων στην οποία είναι αδύνατο να έχει μια οντότητα καλύτερη θέση χωρίς να φέρει τουλάχιστον μια άλλη οντότητα σε χειρότερη κατάσταση. Δεδομένης μιας αρχικής κατανομής των αγαθών μεταξύ ενός σύνολου ατόμων, μια διαφορετική κατανομή που κάνει τουλάχιστον μια οντότητα να βρίσκεται σε καλύτερη κατάσταση χωρίς να οδηγεί οποιαδήποτε άλλη οντότητα σε χειρότερη κατάσταση ονομάζεται βελτίωση κατά Pareto. Μια κατανομή ορίζεται ως αποδοτική κατά Pareto, όταν δεν μπορούν να γίνουν περαιτέρω βελτιώσεις κατά Pareto.

Αθροιστικό Κοινωνικό Όφελος - Το αθροιστικό κοινωνικό όφελος μιας ανάθεσης είναι το άθροισμα των ατομικών κερδών των παιχτών. Η απαίτηση για το μέγιστο αθροιστικό κοινωνικό όφελος είναι μια πολύ ισχυρή απαίτηση αποδοτικότητας.

Ισότητα - Το κοινωνικό όφελος μιας ανάθεσης όταν βασίζεται στην ισότητα δίνεται από το ατομικό όφελος της φτωχότερης οντότητας στο σύστημα. Το να στοχεύουμε στη μεγιστοποίηση αυτής της αξίας είναι ένα παράδειγμα μιας βασικής απαίτησης δικαιοσύνης. Για να το πετύχουμε αυτό έχουμε την κατάταξη leximin που λειτουργεί με το να συγκρίνει πρώτα τα οφέλη των λιγότερων ικανοποιημένων οντοτήτων, και όταν αυτά συμπίπτουν, συγκρίνει τα οφέλη των επόμενων λιγότερων ικανοποιημένων οντοτήτων, και ούτω καθεξής.

Μη ύπαρξη ζήλειας - Μια οντότητα λέμε ότι είναι ζηλόφθονη όταν θα προτιμούσε να πάρει τους πόρους που έχουν ανατεθεί σε μια άλλη οντότητα αντί για τους δικούς της πόρους. Μια ανάθεση δεν χαρακτηρίζεται από ζήλεια όταν καμιά οντότητα δεν είναι ζηλόφθονη. Εάν μια ανάθεση που δεν χαρακτηρίζεται από ζήλεια δεν είναι εφικτή, τότε είναι ενδιαφέρον να μειωθεί η ζήλεια όσο το δυνατόν περισσότερο (που μπορεί, για παράδειγμα, να μετρηθεί ως ο αριθμός των ζηλόφθονων οντοτήτων).

Τα κριτήρια αποδοτικότητας και δικαιοσύνης συχνά δεν είναι συμβατά. Για παράδειγμα, για ένα συγκεκριμένο προφίλ με προτιμήσεις οντοτήτων, δε μπορεί να υπάρξει καμία ανάθεση που ταυτόχρονα είναι αποδοτική κατά Pareto και δεν περιέχει ζήλεια. Στην εργασία [14] έχει εξεταστεί η υπολογιστική πολυπλοκότητα του ελέγχου εάν υπάρχουν οι αναθέσεις που ικανοποιούν έναν ορισμένο συνδυασμό των ανωτέρω κριτηρίων για ένα δεδομένο σενάριο ανάθεσης των πόρων. Σχετικά αποτελέσματα πολυπλοκότητας που οδηγούν σε κριτήρια αποδοτικότητας είναι ήδη γνωστά στη βιβλιογραφία. Για παράδειγμα, ο έλεγχος εάν υπάρχει μια ανάθεση έτσι ώστε το αθροιστικό κοινωνικό όφελος να υπερβεί ένα δεδομένο κατώφλι είναι γνωστό ότι είναι υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα [111].

Ένα άλλο θέμα που ερευνάται έχει σχέση με τις διαδικασίες που απαιτούνται για να βρούμε καλές αναθέσεις. Οι συνδυαστικές δημοπρασίες είναι μηχανισμοί για να βρίσκουμε μια ανάθεση που μεγιστοποιεί το κέρδος του πωλητή. Το κέρδος αυτό είναι το σύνολο των τιμών που οι άλλες οντότητες είναι πρόθυμες να πληρώσουν για τις δέσμες αγαθών που ανατίθενται σε αυτές. Οι συνδυαστικές δημοπρασίες έχουν μελετηθεί εκτενώς τα τελευταία χρόνια [38]. Είναι μια κατηγορία διαδικασιών ανάθεσης, στην οποία η ισότητα και η δικαιοσύνη δεν είναι σχετικές. Σε αυτό το πλαίσιο, οι δομές προτίμησης είναι συναρτήσεις αξιολόγησης (θετικές και μονότονες συναρτήσεις χρησιμότητας). Οι συνδυαστικές δημοπρασίες είναι επίσης κεντρικοποιημένοι μηχανισμοί ανάθεσης. Στις κατανεμημένες προσεγγίσεις στην ανάθεση πόρων, οι αναθέσεις προκύπτουν καθώς οι ατομικές οντότητες συμφωνούν τοπικά σε μια ακολουθία διαπραγματεύσεων ώστε να ανταλλάξουν μερικά από τα στοιχεία που έχουν στην κατοχή τους [112], [52]. Στο πλαίσιο της κατανεμημένης ανάθεσης πόρων, μια ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι υπό ποιες περιστάσεις, μπορεί να υπάρξει η σύγκλιση σε μια κοινωνικά βέλτιστη ανάθεση. Οι έννοιες κοινωνικής βελτιστοποίησης που εξετάζονται σε αυτό το πεδίο ξεκινούν από την αθροιστική συνάρτηση οφέλους [112] μέσω βελτιστοποίησης κατά Pareto και την ισότητα [52] και καταλήγουν στη μη ύπαρξη ζήλειας [27].

Ένα ακόμη ζήτημα στην ανάθεση και στη διαπραγμάτευση των κατανεμημένων πόρων είναι αυτό της υπολογιστικής πολυπλοκότητας σε διάφορες διαδικασίες ανάθεσης. Οι Dunne κ.ά. [45] έχουν αναλύσει την υπολογιστική πολυπλοκότητα των προβλημάτων απόφασης που προκύπτουν στο πλαίσιο κατανεμημένης διαπραγμάτευσης. Για παράδειγμα, ο έλεγχος εάν μπορεί να επιτευχθεί μια δεδομένη ανάθεση με το μέγιστο κοινωνικό όφελος χρηστικότητας με τη βοήθεια μιας ακολουθίας διαπραγματεύσεων πάνω σε μοναδικούς λογικούς πόρους[1] είναι υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα [44]. Μια σχετική ερευνητική κατεύθυνση αφορά στην πολυπλοκότητα επικοινωνίας των κατανεμημένων μηχανισμών διαπραγμάτευσης, που αναλύουν τα άνω και κάτω φράγματα στον αριθμό των διαπραγματεύσεων που υλοποιούνται έως ότου να επιτευχθεί μια βέλτιστη ανάθεση [43], [51].

1.5 Απαιτήσεις Επικοινωνίας στην Κοινωνική Επιλογή

Μια περιοχή όπου η αλληλεπίδραση μεταξύ της κοινωνικής επιλογής και της θεωρητικής πληροφορικής είναι εντυπωσιακή τα τελευταία χρόνια είναι αυτή της ανάλυσης των προβλημάτων κοινωνικής επιλογής υπό το πρίσμα της πολυπλοκότητας επικοινωνίας τους. Στα πιο πολλά (εάν όχι σε όλα) προβλήματα κοινωνικής επιλογής υπάρχουν απαιτήσεις επικοινωνίας. Ακόμα κι αν η διαδικασία είναι κεντρικοποιημένη, ο κεντρικός σταθμός πρέπει σε κάποιο βαθμό να αποσπάσει τις προτιμήσεις των οντοτήτων που συμμετέχουν στη διαδικασία προκειμένου να υπολογίσει το αποτέλεσμα. Αν και μερικές φορές είναι δυνατόν να σχεδιαστούν προσεκτικά τα πρωτόκολλα που θα καταστήσουν αυτόν τον στόχο ευκολότερο, τα γενικά αποτελέσματα (κάτω φράγματα) υποδεικνύουν ότι συχνά δεν είναι ρεαλιστικό να στηριχθούμε σε αυτά τα πρώτοκολλα. Αυτό είναι στη συνέχεια ένα κύριο κίνητρο

[1] Από την άποψη ότι είναι δυνατό να τακτοποιήσει τις δευτερεύουσες πληρωμές έτσι ώστε να έχουν όφελος και οι δύο εμπορικοί εταίροι.

για να μελετηθεί περαιτέρω το πρόβλημα. Τώρα εν συντομία παρουσιάζουμε μια επισκόπηση της πρόσφατης έρευνας για αυτές τις περιοχές.

Ο σχεδιασμός πρωτοκόλλων που αποσπούν τις προτιμήσεις των οντοτήτων είναι ένα βασικό πρόβλημα. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση μιας συνδυαστικής δημοπρασίας με $|R|$ στοιχεία: η πλήρης αποκάλυψη των προτιμήσεων μιας οντότητας θα απαιτούσε να εκτιμηθούν $2^{|R|} - 1$ δέσμες αγαθών, και αυτό για κάθε μια από τις οντότητες που πλειοδοτούν. Τώρα αν μπούμε στη θέση του δημοπράτη, φυσικά θα αναρωτηθούμε εάν είμαστε πραγματικά υποχρεωμένοι να ρωτήσουμε τόσα πολλά ερωτήματα που αφορούν στην τιμή. Ίσως μια διαδοχική προσέγγιση θα διευκόλυνε τη διαδικασία με την αποφυγή των περιττών ερωτήσεων. Το βασικό σημείο συνίσταται στο ποιες προτιμήσεις πρόκειται να αποσπαστούν από κάθε οντότητα και για ποια αποτελέσματα. Ας δούμε ένα παράδειγμα από τη θεωρία ψηφοφοριών: υποθέτουμε ότι έχουμε 4 υποψηφίους A, B, C, D και 9 ψηφοφόρους, 4 από τους οποίους ψηφίζουν $C \succ D \succ A \succ B$, 2 από τους οποίους ψηφίζουν $A \succ B \succ D \succ C$, 2 από τους οποίους ψηφίζουν $B \succ A \succ C \succ D$ και η τελευταία ψήφος που είναι ακόμα άγνωστη. Εάν επιλέξουμε τον κανόνα πλειοψηφίας τότε το αποτέλεσμα είναι ήδη γνωστό (ο νικητής είναι ο C) οπότε δεν υπάρχει καμία ανάγκη να ξέρουμε τις προτιμήσεις του τελευταίου ψηφοφόρου. Εάν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Borda τότε οι επιμέρους βαθμοί είναι A: 14, B: 10, C: 14, D: 10, και επομένως το αποτέλεσμα δεν καθορίζεται. Εντούτοις, δεν χρειάζεται να ξέρουμε το σύνολο της τελευταίας ψήφου, αλλά πρέπει μόνο να ξέρουμε εάν η τελευταία ψηφοφόρος προτιμά τον A από τον C ή τον C από τον A. Μπορούμε πάντα να σχεδιάσουμε ένα τέτοιο έξυπνο πρωτόκολλο; Η πολυπλοκότητα της επικοινωνίας μπορεί να είναι χρήσιμη στην απάντηση αυτής της ερώτησης. Η πολυπλοκότητα της επικοινωνίας [82] ενδιαφέρεται για το πρόβλημα του υπολογισμού του ποσού της πληροφορίας που πρέπει να ανταλλαχθεί μεταξύ των οντοτήτων προκειμένου να υπολογιστεί μια δεδομένη συνάρτηση f, όταν η είσοδος αυτής της συνάρτησης κατανέμεται μεταξύ εκείνων των οντοτήτων. Οι υπολογιστικοί πόροι που απαιτούνται δεν θα μας απασχολήσουν. Πιο τεχνικά, η πολυπλοκότητα επικοινωνίας ορίζεται ως η χειρότερη περίπτωση του καλύτερου πρωτοκόλλου που μπορεί να βρεθεί για τον υπολογισμό αυτής της συνάρτησης. Για μη δομημένα προβλήματα, είναι απίθανο να υπάρχει καλύτερο από το τετριμμένο άνω φράγμα το οποίο προκύπτει από την αποκάλυψη ολόκληρης της εισόδου κάθε οντότητας. Σε μερικές περιπτώσεις, εντούτοις, η συνδυαστική δομή του προβλήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να ελαττωθεί το φορτίο επικοινωνίας. Η πολυπλοκότητα επικοινωνίας προσφέρει τεχνικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να παράγουμε κάτω φράγματα στις απαιτήσεις επικοινωνίας. Ίσως η δημοφιλέστερη από αυτές τις τεχνικές είναι το *έξυπνο* σύνολο. Το έξυπνο σύνολο αποτελείται από ένα σύνολο διανυσμάτων εισόδου. Κάθε διάνυσμα θα έδινε το ίδιο αποτέλεσμα στη συνάρτηση, με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μπορούμε να αναμείξουμε οποιοδήποτε ζευγάρι διανυσμάτων και να πάρουμε μια διαφορετική τιμή. Η έκθεση ενός έξυπνου συνόλου μεγέθους m εγγυάται έναν λογαριθμικό κάτω φράγμα στην πολυπλοκότητα της επικοινωνίας.

Ψηφοφορία - Σαν πρώτο παράδειγμα, παρουσιάζουμε το επιχείρημα των Conitzer και Sandholm [32] που επιτρέπει να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η πολυπλοκότητα επικοινωνίας του κανόνα ψηφοφορίας κατά Condorcet είναι $\Omega(nm)$, όπου n είναι ο αριθμός των ψηφοφόρων και m ο αριθμός των υποψηφίων. Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση f που πρέπει να υπολογιστεί είναι ο κανόνας ψηφοφορίας που επιστρέφει τον υποψήφιο που είναι νικητής, έχοντας ως είσοδο το διάνυσμα ψηφοφορίας όλων των ψηφοφόρων. Υποθέτουμε ότι το C είναι το σύνολο υποψηφίων. Η ιδέα είναι να κατασκευάσουμε ένα σύνολο διανυσμάτων ψηφοφορίας έτσι ώστε ο πρώτος ψηφοφόρος να προτιμήσει οποιοδήποτε υποψήφιο κάποιου συνόλου $S_i \subseteq C$ σε σχέση με τον α, και τον α σε σχέση με οποιονδήποτε άλλον υποψήφιο ($S_i \succ \alpha \succ \overline{S_i}$), ενώ οι υπόλοιποι θα προτιμήσουν ($\overline{S_i} \succ \alpha \succ S_i$), και ούτω καθεξής. Τέλος, ο τελευταίος ψηφοφόρος θα προτιμήσει τον α από οποιοδήποτε άλλον υποψήφιο. Ο α προτιμάται πράγματι από οποιονδήποτε άλλον υποψήφιο σε αυτό το σύνολο (από μια μοναδική ψήφο). Κατασκευάζονται τάξης nm τέτοια πιθανά διανύσματα. Τώρα αυτό το σύνολο θα ήταν πράγματι «έξυπνο» αν και μόνο αν, για οποιοδήποτε ζευγάρι τέτοιων διανυσμάτων, θα ήταν δυνατό να αναμειχθούν οι ψήφοι των διανυσμάτων και να ληφθεί ένας διαφορετικός νικητής κατά Condorcet. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε ζευγάρι των διανυσμάτων ψηφοφορίας. Από την κατασκευή, πρέπει να υπάρχει ένας υποψήφιος, έστω b, ο οποίος ταξινομείται κάτω από τον α από έναν δεδομένο ψηφοφόρο ενός διανύσματος του ζευγαριού, ενώ κατατάσσεται πάνω από τον α στο άλλο διάνυσμα. Από την αντικατάσταση της τελευταίας ψήφου στην πρώτη ψήφο, θα κάνουμε τον b προτεινόμενο από ένα μοναδικό ψηφοφόρο. Αυτό το σύνολο είναι πράγματι ένα έξυπνο σύνολο, του οποίου το μέγεθος επιτρέπει να παράγουμε το κάτω φράγμα στην πολυπλοκότητα επικοινωνίας. Οι Conitzer και Sandholm [32] ανέλυσαν την πολυπλοκότητα επικοινωνίας διάφορων άλλων κανόνων ψηφοφορίας, και ο Segal [116] μελέτησε μια ιδιαίτερη υποκατηγορία των κανόνων ψηφοφορίας.

Σχηματισμός Συνασπισμού - Ένα επιπλέον παράδειγμα της χρήσης της τεχνικής του έξυπνου συνόλου αναφέρεται στην εργασία των Procaccia και Rosenschein [104] όπου αναλύουν την πολυπλοκότητα επικοινωνίας του σχηματισμού συνασπισμού. Ακριβέστερα, αναλύουν την πολυπλοκότητα επικοινωνίας του υπολογισμού του μέσου κέρδους ενός τυχαίου παίκτη (όχι για όλους τους παίκτες) πριν μπει στο συνασπισμό. Αυτό γίνεται στο πλαίσιο του μοντέλου συνασπισμού που προτείνεται από τους Shehory και Kraus [117], όπου κάθε οντότητα ξέρει μόνο τους πόρους που κρατά αρχικά και τη δική της συνάρτηση χρησιμότητας. Οι Procaccia και Rosenschein αποδεικνύουν τα αποτελέσματα επικοινωνίας σχετικά με διάφορες έννοιες λύσης (πυρήνας, ίση υπερβολή, τιμή Shapley, κ.ά.). Τα περισσότερα από αυτά τα αποτελέσματα δείχνουν ότι όταν ο αριθμός των οντοτήτων (n) δεν είναι πάρα πολύ μεγάλος, αυτό το πρόβλημα δεν περιλαμβάνει απαγορευτικό κόστος επικοινωνίας ($\Omega(n)$).

Ανάθεση των πόρων - Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα των συνδυαστικών δημοπρασιών που συζητήσαμε πριν. Εδώ, οι κατανεμημένες είσοδοι είναι οι αξιολογήσεις των οντοτήτων πάνω σε όλες τις πιθανές δέσμες αγαθών και η συνάρτηση θα επέστρεφε τη βέλτιστη ανάθεση. Μπορούμε να έχουμε καλύτερα από εκείνα τα $2^{|R|}-1$ ερωτήματα τότε; Γενικά, η απάντηση είναι όχι, υπό την έννοια ότι τουλάχιστον μια οντότητα πρέπει να αποκαλύψει την πλήρη αξιολόγησή της. Αυτό απέδειξαν οι Nisan και Segal [99], και η απαίτηση επικοινωνίας παραμένει εκθετική υπό ορισμένες συνθήκες.

Σε πολλές καταστάσεις, η πολυπλοκότητα επικοινωνίας αποτελεί πρόβλημα. Για τις συνδυαστικές δημοπρασίες, ο Segal υποστηρίζει ότι η πολυπλοκότητα που θέτει η επικοινωνία εμφανίζεται να είναι μεγαλύτερο πρόβλημα από την υπολογιστική πολυπλοκότητα [115]. Μια συνέπεια είναι ότι η κεντρική αρχή που υπολογίζει τη συνάρτηση θα πρέπει συχνά να εξετάζει τις ελλιπείς προτιμήσεις[2]. Τεχνικά, η ελλιπής γνώση για τις προτιμήσεις μια οντότητας φτάνει στο επίπεδο των μερικών προτιμήσεων. Αυτό με τη σειρά του πυροδοτεί περαιτέρω ενδιαφέρουσες ερωτήσεις όπως το πόσο δύσκολο είναι να υπολογιστεί το αποτέλεσμα δεδομένων ελλιπών προτιμήσεων. Η υπολογιστική πολυπλοκότητα ψηφοφόρων με ελλιπείς προτιμήσεις έχει ερευνηθεί από τους Conitzer και Sandholm [31].

Η μείωση του ποσού της πληροφορίας που μεταδίδεται είναι επίσης ύψιστης σημασίας όταν εξετάζονται ζητήματα εχεμύθειας στην κοινωνική επιλογή. Οι εργασίες των Brandt, κ.ά.([19], [22]), είναι πολύ αντιπροσωπευτικές αυτής της γραμμής έρευνας. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα είναι το γεγονός ότι οι συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής που είναι μη-δικτατορικές, βέλτιστες κατά Pareto, και μονότονες δε μπορούν να δημιουργηθούν από κατανεμημένα πρωτόκολλα που εγγυώνται την άνευ όρων πλήρη μυστικότητα (δηλαδή μυστικότητα που δεν στηρίζεται ούτε στους εμπιστευόμενος τρίτους ούτε στην υπολογιστική δυσκολία προστασίας των προτιμήσεων των οντοτήτων).

1.6 Η συνεισφορά της διατριβής

Στο πλαίσιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής μελετούμε σημαντικά προβλήματα της Υπολογιστικής Κοινωνικής Επιλογής. Ασχολούμαστε εκτενέστερα με τη θεωρία ψηφοφοριών και την υπολογιστική πολυπλοκότητα στη δωροδοκία των εκλογών. Πιο συγκεκριμένα αναλύουμε στο Κεφάλαιο 2 τους κανόνες ψηφοφορίας που πρότειναν οι Dodgson και Young, οι οποίοι είναι από τους πιο επεξεργασμένους στη βιβλιογραφία της Κοινωνικής Επιλογής καθώς είναι από τους κανόνες που πληρούν αρκετά σημαντικά κριτήρια που έχουν θέσει οι θεωρητικοί της Κοινωνικής Επιλογής όπως αυτό του Condorcet. Από υπολογιστικής πλευράς ωστόσο, αυτοί οι δύο κανόνες παρουσιάζουν βασικές αδυναμίες μιας και ανάγεται σε μείζον πρόβλημα η δυσκολία υπολογισμού του βαθμού ενός δεδομένου υποψηφίου σε πολυωνυμικό χρόνο. Στην παρούσα διατριβή παρουσιάζουμε δύο αλγόριθμους που προσεγγίζουν το βαθμό Dodgson ενός δεδομένου υποψηφίου. Πρόκειται για έναν συνδυαστικό, άπληστο αλγόριθμο και έναν αλγόριθμο βασισμένο σε γραμμικό πρόγραμμα, όπου και οι δυο έχουν αρμονικό λόγο προσέγγισης H_{m-1}, όπου m είναι ο αριθμός των υποψηφίων. Είναι φανερό ότι ο άπληστος αλγόριθμος θεωρείται τεχνικά πιο επιθυμητός στο πλαίσιο της επιστήμης των υπολογιστών, όμως ο αλγόριθμος που βασίζεται σε γραμμικό πρόγραμμα έχει το πλεονέκτημα της μονοτονίας σύμφωνα με το βαθμό. Αυτή η ιδιότητα είναι που ενισχύει το αποτέλεσμα από την

[2]Σημειώνουμε εντούτοις ότι αυτός δεν είναι ο μόνος λόγος: για παράδειγμα μπορεί απλά οι προτιμήσεις των οντοτήτων να είναι πραγματικά ελλιπείς.

οπτική της θεωρίας της κοινωνικής επιλογής και καθιστά σημαντικό τον αλγόριθμο μας. Επιπλέον, ισχυροποιούμε το αποτέλεσμά μας καθότι δείχνουμε ότι οι αλγόριθμοι μας είναι βέλτιστοι κατά έναν παράγοντα 2 (εφόσον δεν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να προσεγγίζει το βαθμό Dodgson ενός υποψηφίου με λόγο $\frac{1}{2}\ln m$). Επιπλέον, αποδεικνύουμε ένα αποτέλεσμα μη-προσεγγισιμότητας της κατάταξης που παράγεται από τον κανόνα Dodgson καθώς είναι δύσκολο να αποφασίσουμε αν ένας δεδομένος υποψήφιος είναι νικητής κατά Dodgson ή στις τελευταίες $\sqrt{m}$ θέσεις. Το αποτέλεσμα αυτό παρέχει μια εξήγηση για τις μεγάλες αποκλίσεις κατά τη σύγκριση των παραγόμενων κατατάξεων σύμφωνα με το κανόνα του Dodgson σε σχέση με αυτών απλούστερων κανόνων ψηφοφορίας. Μια άλλη συνεισφορά αποτελεί η απόδειξη ότι το πρόβλημα υπολογισμού του βαθμού Young ενός υποψηφίου είναι υπολογιστικά δύσκολο να προσεγγιστεί υπό οποιονδήποτε παράγοντα. Έτσι λοιπόν είναι δύσκολος και ο υπολογισμός της κατάταξη που παράγεται από τον κανόνα του Young.

Στη συνέχεια στο Κεφάλαιο 3 μελετούμε τις ατέλειες του κανόνα του Dodgson καθώς αποτυγχάνει σε βασικές επιθυμητές ιδιότητες της κοινωνικής επιλογής, όπως η μονοτονία και η ομοιογένεια[3]. Στη προσπάθειά μας να βελτιώσουμε τη συμπεριφορά του κανόνα του Dodgson ψάχνουμε να βρούμε προσεγγιστικούς αλγόριθμους που να έχουν ως βάση τον κανόνα και να είναι μονότονοι ή ομοιογενείς. Πράγματι στη διατριβή αυτή σχεδιάζουμε ένα προσεγγιστικό μονότονο αλγόριθμο εκθετικού χρόνου με λόγο προσέγγισης 2 για τον υπολογισμό του βαθμού Dodgson ενός υποψηφίου, ενώ ταιριάζουμε αυτό το αποτέλεσμα με ένα αντίστοιχο βέλτιστο κάτω φράγμα. Στην προσπάθεια μας να βρούμε ένα πιο γρήγορο από τον εκθετικό αλγόριθμο παρουσιάζουμε επίσης έναν προσεγγιστικό μονότονο αλγόριθμο *πολυωνυμικού χρόνου* με λόγο $\mathcal{O}(\log m)$ (όπου m είναι ο αριθμός των υποψηφίων): και αυτό το αποτέλεσμα είναι βέλτιστο, λόγω ενός αντίστοιχου θεωρητικού κάτω φράγματος. Στη περίπτωση αυτή μπορεί ο λόγος προσέγγισης να είναι χειρότερος αλλά ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι πολύ πιο σύντομος. Επιπλέον για την ιδιότητα της ομοιογένειας, δείχνουμε ότι μια μικρή παραλλαγή σε ένα γνωστό κανόνα ψηφοφορίας (τον απλοποιημένο κανόνα του Dodgson από τον Tideman) δίνει ένα μονότονο, ομοιογενή, $\mathcal{O}(m \log m)$-προσεγγιστικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου. Αποδεικνύουμε ότι είναι αδύνατο να επιτευχθεί καλύτερος λόγος προσέγγισης, για αλγόριθμους που πληρούν το κριτήριο της ομοιογένειας. Ολοκληρώνουμε την έρευνα για τις ιδιότητες του κανόνα του Dodgson μελετώντας μερικές πρόσθετες ιδιότητες από τη θεωρία της κοινωνικής επιλογής. Αποδεικνύουμε ότι για αυτές δεν υπάρχει αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης που εξαρτάται μόνο από το m.

Το τελευταίο σημαντικό υπολογιστικό ζήτημα με το οποίο ασχολούμαστε στο πλαίσιο αυτής της διατριβής είναι η εσκεμμένη αλλοίωση του αποτελέσματος των εκλογών από κάποιον εξωτερικό παράγοντα και πιο συγκεκριμένα η δωροδοκία των εκλογών. Οι πιο απλοί κανόνες βαθμολόγησης όπως ο κανόνας της πλειοψηφίας και ο κανόνας της 2-έγκρισης είναι ευάλωτοι σε δωροδοκία καθώς μια βέλτιστη στρατηγική μπορεί να υπολογιστεί εύκολα. Στον πρώτο κανόνα ο υποψήφιος που

[3] Για τον ορισμό των ιδιοτήτων αυτών παραπέμπουμε στις Ενότητες 3.3 και 3.4

προτιμάται από τον εκάστοτε ψηφοφόρο παίρνει 1 βαθμό και όλοι οι υπόλοιποι υποψήφιοι από 0 βαθμούς, ενώ στον δεύτερο κανόνα οι υποψήφιοι που επιλέγονται και παίρνουν από 1 βαθμό είναι οι δύο πρώτοι στο προφίλ του κάθε ψηφοφόρου. Στη διατριβή αυτή, μελετούμε την τάξη των κανόνων βαθμολόγησης σύμφωνα με την οποία κάθε ψηφοφόρος δίνει κ βαθμούς στον υποψήφιο που κατατάσσει πρώτο στη λίστα προτίμησής του και λ βαθμούς στον υποψήφιο που κατατάσσει δεύτερο ενώ στους υπόλοιπους υποψήφιους δίνει 0 βαθμούς. Αποδεικνύουμε ότι είναι υπολογιστικά δύσκολο το πρόβλημα της δωροδοκίας ενός συνόλου ψηφοφόρων ώστε να γίνει ένας συγκεκριμένος υποψήφιος νικητής των εκλογών. Η σημασία του αποτελέσματος μας έγκειται στο γεγονός ότι ενώ στην κατηγορία αυτών των κανόνων ψηφοφορίας η δωροδοκία μοιάζει να είναι υπολογιστικά εύκολη, όπως και στους άλλους απλούς κανόνες, τελικά αποδεικνύεται δύσκολη.

Κεφάλαιο 2

Προσέγγιση των εκλογών Dodgson και Young

2.1 Εισαγωγή

Το περιβάλλον στο οποίο εφαρμόζεται η θεωρία της ψηφοφορίας είναι το ακόλουθο: υπάρχει ένα σύνολο από n ψηφοφόρους και ο καθένας εξ αυτών κατατάσσει ένα σύνολο από m υποψηφίους με σκοπό να εκλεγεί ένας υποψήφιος. Το ερώτημα είναι: ποιος είναι ο υποψήφιος εκείνος ο οποίος αντανακλά καλύτερα το κοινωνικό καλό;

Αυτό το ερώτημα είναι θεμελιώδες για τη μελέτη συστημάτων πολλαπλών χρηστών (multiagent systems), διότι οι χρήστες ενός τέτοιου συστήματος συχνά χρειάζεται να συνδυάσουν τις προσωπικές τους επιδιώξεις σε μια απόφαση που αντανακλά καλύτερα τις συνολικές ανάγκες όλων των χρηστών του συστήματος. Από τα πιο κλασσικά παραδείγματα είναι οι μηχανές αναζήτησης (web meta-search engines [46]) και τα συστήματα προτίμησης (recommender systems [64]), όπου έχουν χρησιμοποιηθεί μέθοδοι βασισμένες στη θεωρία ψηφοφορίας.

Όταν υπάρχουν δύο υποψήφιοι (και ένας μονός αριθμός ψηφοφόρων), η πλειοψηφία θεωρείται ομόφωνα ένας τέλειος τρόπος επιλογής του νικητή. Ωστόσο, όταν υπάρχουν τουλάχιστον τρεις υποψήφιοι είναι μερικές φορές ασαφές ποιος υποψήφιος είναι ο καλύτερος. Στο 18ο αιώνα, ο Marquis de Condorcet, ο θεμελιωτής της μαθηματικής θεωρίας της ψηφοφορίας, πρότεινε μια λύση για την επέκταση της πλειοψηφίας σε πολλαπλούς υποψήφιους [39]. Ένας υποψήφιος x λέγεται ότι νικά τον υποψήφιο y σε μια *ανά ζεύγος εκλογή* αν η πλειοψηφία των ψηφοφόρων προτιμούν τον x από τον y, δηλαδή, κατατάσσουν τον x πάνω από τον y. Ένας υποψήφιος που νικά κάθε άλλο υποψήφιο σε μια ανά ζεύγος εκλογή είναι εύκολο αξιωματικά να οριστεί ως ο νικητής των εκλογών. Στη σύγχρονη βιβλιογραφία ένας τέτοιος υποψήφιος είναι γνωστός ως *νικητής Condorcet*. Δυστυχώς υπάρχουν προφίλ προτίμησης π.χ., όταν οι προτιμήσεις της πλειοψηφίας είναι κυκλικές, για τα οποία δεν υπάρχει υποψήφιος που να είναι νικητής Condorcet (παράδοξο του Condorcet [11]).

Για να παρακάμψουν αυτό το αποτέλεσμα, αρκετοί ερευνητές έχουν προτείνει να επιλέγεται ο υποψήφιος που είναι «όσο το δυνατόν πλησιέστερα» στον νικητή κατά Condorcet. Μπορούν να θεωρηθούν διαφορετικές έννοιες εγγύτητας, που οδηγούν σε διαφορετικούς κανόνες ψηφοφορίας. Μια τέτοια πρόταση κανόνα ψηφοφορίας έγινε από τον Charles Dodgson, περισσότερο γνωστό με το ψευδώνυμο Lewis Carroll, συγγραφέα του μυθιστορήματος «Οι Περιπέτειες της Αλίκης στη Χώρα των Θαυμάτων». Ο βαθμός Dodgson [11] ενός υποψηφίου, δεδομένου ενός συνόλου προτιμήσεων ψηφοφόρων, είναι ο ελάχιστος αριθμός ανταλλαγών μεταξύ γειτονικών υποψηφίων στην κατάταξη των ψηφοφόρων που χρειάζονται ώστε να γίνει ο συγκεκριμένος υποψήφιος νικητής κατά Condorcet. Ο νικητής κατά Dodgson είναι όποιος υποψήφιος έχει ελάχιστο βαθμό Dodgson.

Ο Young [126] έθεσε μια δεύτερη εναλλακτική επιλογή: τη μέτρηση της απόστασης από τους ψηφοφόρους. Συγκεκριμένα, ο βαθμός Young ενός υποψηφίου είναι το μέγεθος του μεγαλύτερου υποσυνόλου ψηφοφόρων έτσι ώστε, αν μόνο αυτά τα ψηφοδέλτια λαμβάνονται υπόψη, ο δεδομένος υποψήφιος γίνεται νικητής κατά Condorcet. Ο νικητής κατά Young είναι ο υποψήφιος με το μέγιστο βαθμό Young. Εναλλακτικά, ο νικητής κατά Young είναι ο υποψήφιος που γίνεται νικητής Condorcet αφαιρώντας τους λιγότερους υποψηφίους.

Αν και αυτοί οι δύο κανόνες ψηφοφορίας ακούγονται ελκυστικοί και απλοί, έχουν επικριθεί επειδή αποτυγχάνουν να ανταποκριθούν στα διάφορα γνωστά κλασικά κριτήρια δικαιοσύνης [61, 20]. Ωστόσο, τα αποτελέσματα αδυναμίας (impossibility) μας λένε ότι κάθε κανόνας ψηφοφορίας αποτυγχάνει επίσης να ικανοποιήσει κάποια τέτοια κριτήρια. Έτσι, δεν υπάρχει καμία ελπίδα να βρεθεί ένας κανόνας ψηφοφορίας που να είναι ιδανικός για όλες τις καταστάσεις. Αντ᾽ αυτού, η θεωρία της κοινωνικής επιλογής μας παρέχει ένα συνεχώς αυξανόμενο σύνολο κανόνων ψηφοφορίας, καθένας από τους οποίους έχει μοναδικά χαρακτηριστικά, πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Οι ενδιαφερόμενοι μπορούν να επιλέξουν από αυτό το σύνολο όποιους κανόνες εφαρμόζονται καλύτερα στις ιδιαίτερες καταστάσεις τους. Οι κανόνες του Dodgson και Young είναι δύο τέτοιοι κανόνες, όπως επίσης είναι και οι δύο αλγόριθμοι προσέγγισης που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

Ένα σημαντικό μειονέκτημα των κανόνων του Dodgson και του Young είναι ότι ο υπολογισμός τους είναι υπολογιστικά δύσκολος. Ήδη από το 1989, οι Bartholdi, Tovey και Trick [6] έδειξαν ότι το πρόβλημα απόφασης του βαθμού Dodgson είναι πλήρες για την κλάση $\mathcal{NP}$ και ότι ο εντοπισμός του νικητή κατά Dodgson είναι υπολογιστικά δύσκολος. Αυτή η σημαντική εργασία ήταν μια από τις πρώτες που εισήγαγε την έννοια της υπολογιστικής πολυπλοκότητα στη θεωρία της κοινωνικής επιλογής. Οι Hemaspaandra κ.ά. [67] βελτίωσαν το παραπάνω αποτέλεσμα, αποδεικνύοντας ότι ο νικητής στο πρόβλημα απόφασης του βαθμού Dodgson είναι πλήρης για την κλάση Θ_2^p, δηλαδή την κατηγορία των προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο κάνοντας $\mathcal{O}(\log n)$ ερωτήματα μέσα στο $\mathcal{NP}$ σύνολο. Στη συνέχεια, οι Rothe κ.ά. [110] απέδειξαν ότι το πρόβλημα υπολογισμού του νικητή κατά Young είναι επίσης πλήρες για την κλάση Θ_2^p.

Αυτά τα αποτελέσματα της θεωρίας πολυπλοκότητας μπορούν να οδηγήσουν στην *προσέγγιση* του υπολογισμού του βαθμού ενός υποψηφίου, σύμφωνα με τα συστήματα του Dodgson και του Young. Αυτό είναι σαφώς ένα ενδιαφέρον υπολογιστικό πρόβλημα, και αποτελεί πεδίο εφαρμογής αλγοριθμικών τεχνικών.

Ωστόσο, από την άποψη της θεωρίας κοινωνικής επιλογής, δεν είναι αμέσως προφανές ότι μια προσέγγιση του κανόνα ψηφοφορίας είναι ικανοποιητική, δεδομένου ότι ο «λανθασμένος» υποψήφιος — στην περίπτωσή μας, ένας που δεν είναι πιο κοντά σε έναν νικητή Condorcet — μπορεί να εκλεγεί. Το βασικό συμπέρασμα είναι ότι η προσέγγιση ενός κανόνα ψηφοφορίας είναι ένας νέος κανόνας ψηφοφορίας από μόνος του, και σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι ο νέος αυτός κανόνας ψηφοφορίας έχει επιθυμητές ιδιότητες. Συζητάμε το θέμα αυτό αναλυτικά, και δικαιολογούμε την προσέγγισή μας στη συνέχεια του κεφαλαίου.

Τα αποτελέσματά μας. Στο πλαίσιο προσέγγισης του βαθμού Dodgson, παρουσιάζουμε έναν άπληστο αλγόριθμο για τον βαθμό Dodgson που έχει λόγο προσέγγισης H_{m-1}, όπου m είναι ο αριθμός των υποψηφίων και H_{m-1} είναι ο $(m-1)$-ός αρμονικός αριθμός. Προτείνουμε στη συνέχεια ένα δεύτερο αλγόριθμο που βασίζεται στην επίλυση ενός χαλαρωμένου γραμμικού προγράμματος (ILP-relaxation) για τον υπολογισμό του βαθμού Dodgson και έχει τον ίδιο λόγο προσέγγισης. Παρά το γεγονός ότι ο πρώτος αλγόριθμός μας δίνει μια καλύτερη διαίσθηση στη συνδυαστική δομή του προβλήματος, δείχνουμε ότι ο τελευταίος έχει το πλεονέκτημα της μονοτονίας όσο αφορά στο βαθμό, η οποία είναι μια επιθυμητή ιδιότητα από την πλευρά της κοινωνικής επιλογής. Παρατηρούμε, όπως προκύπτει από την εργασία του McCabe-Dansted [89] ότι ο βαθμός Dodgson δεν μπορεί να προσεγγιστεί εντός υπολογαριθμικών (sublogarithmic) παραγόντων, από αλγόριθμους πολυωνυμικού χρόνου εκτός εάν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Αποδεικνύουμε ένα σαφέστερο αποτέλεσμα μη προσεγγισιμότητας $(1/2 - \epsilon)\ln m$, με την παραδοχή ότι τα προβλήματα στη κλάση $\mathcal{NP}$ δεν έχουν αλγόριθμους που να εκτελούνται σε ψευδο-πολυωνυμικό χρόνο (quasi-polynomial). Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος προσέγγισης που επιτυγχάνεται από τους αλγόριθμούς μας είναι βέλτιστος μέχρι ένα συντελεστή 2.

Μια σειρά από πρόσφατες εργασίες [107, 108, 76, 77, 78] έχουν αποδείξει ότι υπάρχουν μεγάλες διαφορές μεταξύ της κατάταξης Dodgson και των κατατάξεων που παράγονται από άλλους κανόνες κατάταξης συνόλων (rank aggregation). Ορισμένοι από αυτούς τους κανόνες (π.χ., Borda και Copeland) υπολογίζονται σε πολυωνυμικό χρόνο, έτσι ώστε τα αντίστοιχα αποτελέσματα μπορούν να θεωρηθούν ως αρνητικά αποτελέσματα όσον αφορά στην προσεγγισιμότητα της κατάταξης Dodgson από αλγόριθμους πολυωνυμικού χρόνου. Δείχνουμε ότι το πρόβλημα της διάκρισης μεταξύ του εάν ένας δεδομένος υποψήφιος είναι ο μοναδικός νικητής Dodgson ή είναι στις τελευταίες $O(\sqrt{m})$ θέσεις στη κατάταξη Dodgson είναι υπολογιστικά δύσκολο. Το θεώρημα αυτό παρέχει μια εξήγηση από τη μεριά της πολυπλοκότητας για ορισμένες από τις παρατηρούμενες διαφορές, αλλά στην πραγματικότητα έχει πολύ ευρύτερο πεδίο εφαρμογής, δεδομένου ότι εφαρμόζεται αποτελεσματικά σε κάθε υπολογίσιμο συσσωρευτικό κανόνα κατάταξης.

Με μια πρώτη ματιά, το πρόβλημα υπολογισμού του βαθμού Young φαίνεται πιο απλό σε σύγκριση με τον βαθμό Dodgson (εξηγείται παρακάτω στην ενότητα 2.6). Επομένως, μας εξέπληξε το παρακάτω αποτέλεσμα: είναι υπολογιστικά δύσκολο να προσεγγίσουμε το βαθμό Young υπό οποιονδήποτε παράγοντα. Ειδικότερα δείχνουμε ότι είναι δύσκολο να ξεχωρίσουμε μεταξύ της περίπτωσης όπου ο βαθμός Young ενός δεδομένου υποψηφίου είναι 0, και της περίπτωσης που ο βαθμός είναι μεγαλύτερος από 0 παίρνοντας έτσι ένα αποτέλεσμα μη-προσεγγισιμότητας για την κατάταξη κατά Young. Δείχνουμε, επίσης, ότι είναι υπολογιστικά δύσκολο να προσεγγιστεί ο δυϊκός βαθμός Young μέσα σε $O(n^{1-\epsilon})$, για κάθε σταθερά $\epsilon > 0$.

Ορίζουμε το δυϊκό βαθμό Young παρακάτω στην ενότητα με τις προκαταρκτικές έννοιες (2.2).

Σχετική Έρευνα. Η προσέγγιση κανόνων ψηφοφορίας μόλις πρόσφατα επιδιώχθηκε από τους Ailon κ.ά. [1], Coppersmith κ.ά. [36], και Kenyon-Mathieu και Schudy [75]. Αυτές οι εργασίες ασχολούνται, άμεσα ή έμμεσα, με τον κανόνα του Kemeny, που επιλέγει μια κατάταξη των υποψηφίων αντί ενός μοναδικού νικητή. Ο κανόνας του Kemeny επιλέγει την κατάταξη που έχει το μέγιστο αριθμό των συμφωνιών με τις επιμέρους κατατάξεις των ψηφοφόρων όσο αφορά τη σωστή σειρά των ζευγών των υποψηφίων. Οι Ailon κ.ά. βελτιώνουν τον τετριμμένο 2-προσεγγιστικό αλγόριθμο σε ένα πιθανοτικό αλγόριθμο που δίνει μια 11/7-προσέγγιση. Οι Kenyon-Mathieu και Schudy βελτιώνουν περαιτέρω την προσέγγιση, και αποκτούν ένα σχήμα προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου (polynomial-time approximation scheme-PTAS). Μια πρόσφατη εργασία μελετά την προσεγγισιμότητα των εκλογών κατά Dodgson. Οι Faliszewski, Hemaspaandra και Hemaspaandra δείχνουν σε αυτή την εργασία [56] ότι ο minimax ως κανόνας βαθμολόγησης (scoring rule) είναι μια m^2 προσέγγιση του βαθμού κατά Dodgson.

Στο ίδιο πνεύμα, ο McCabe-Dansted [90] πρότεινε αρκετές νέες παραλλαγές στο κανόνα του Dodgson. Οι κανόνες αυτοί εμφανίζονται να δίνουν μια *προσθετική* προσέγγιση του βαθμού Dodgson. Ειδικότερα, μπορούν να υπολογίσουν προς τα κάτω τον βαθμό με πρόσθετο όρο το πολύ $(m-1)!(m-1)e$, όπου m είναι ο αριθμός των υποψηφίων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το αποτέλεσμα αυτό έχει νόημα μόνο αν υπάρχουν πολύ λίγοι υποψήφιοι, και, επιπλέον, δεν παρέχει τα φράγματα της χειρότερης περίπτωσης που επιτυγχάνουμε σε αυτή τη διατριβή.

Οι Betzler κ.ά. [10] έχουν διερευνήσει την παραμετροποιημένη υπολογιστική πολυπλοκότητα των κανόνων Dodgson και Young. Οι συγγραφείς έχουν επινοήσει έναν αλγόριθμο σταθερής παραμέτρου για τον ακριβή υπολογισμό του βαθμού Dodgson, όπου η σταθερή παράμετρος είναι η «απόσταση επεξεργασίας», δηλαδή, ο αριθμός των ανταλλαγών. Συγκεκριμένα, αν το k είναι ένα άνω όριο σχετικά με τον βαθμό Dodgson ενός δεδομένου υποψηφίου, n είναι ο αριθμός των ψηφοφόρων, και m ο αριθμός των υποψηφίων, τότε ο αλγόριθμος εκτελείται σε χρόνο $\mathcal{O}(2^k \cdot nk + nm)$. Σημειώνουμε ότι σε γενικές γραμμές μπορεί να ισχύει ότι $k = \Omega(nm)$. Σε αντίθεση, το πρόβλημα απόφασης του βαθμού Young είναι $W[2]$-πλήρες. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος που να υπολογίζει τον βαθμό Young ακριβώς, και του οποίου ο χρόνος εκτέλεσης είναι πολυωνυμικός στο nm και μόνο εκθετικός στο k, όπου η παράμετρος k είναι ο αριθμός των υπόλοιπων ψήφων. Αυτά τα αποτελέσματα συμπληρώνουν τα δικά μας αποτελέσματα όμορφα, καθώς δείχνουμε επίσης ότι ο υπολογισμός του βαθμού Dodgson είναι κατά μία έννοια ευκολότερος από τον υπολογισμό του βαθμού Young, αν και στο πλαίσιο της προσέγγισης.

Εκτός από την οπτική της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, έχει γίνει έρευνα από τους θεωρητικούς της κοινωνικής επιλογής που εξετάζει τη σύγκριση της κατάταξης που παράγεται από τον κανόνα του Dodgson, δηλαδή, την κατάταξη των υποψηφίων σύμφωνα με μη-φθίνουσα σειρά του βαθμού Dodgson, με τις εκλογές που βασίζονται σε απλούστερους κανόνες ψηφοφορίας. Τέτοιες συγκρίσεις αναδεικνύουν πάντοτε έντονες αποκλίσεις. Για παράδειγμα, ο νικητής κατά Dodgson μπορεί να εμφανιστεί σε οποιαδήποτε θέση στην κατάταξη κατά Kemeny [107] και στην κατάταξη οποιουδήποτε κανόνα βαθμολόγησης [108] (π.χ., Borda ή πλειοψηφίας), η κατάταξη κατά Dodgson μπορεί να είναι ακριβώς αντίθετη της Borda [78] και της Copeland [76], ενώ ο νικητής των Kemeny ή Slater εκλογών μπορεί να εμφανιστεί σε οποιαδήποτε θέση της κατάταξης Dodgson [77].

Πιο σχετική με τη δική μας εργασία είναι η έρευνα που ασχολείται με χρήση ευρετικών μεθόδων κανόνων ψηφοφορίας που είναι δύσκολο να υπολογιστούν. Τυπικά παραδείγματα περιλαμβάνουν εργασίες σχετικά με τον κανόνα του Kemeny [30] και του Slater [29]. Μία άλλη, πιο σχετική έρευνα ασχολείται με την εύρεση προσεγγιστικών αποτελεσματικών αναπαραστάσεων κανόνων ψηφοφορίας, συλλέγοντας όσο δυνατόν λιγότερη πληροφορία. Αυτή η γραμμή της έρευνας χρησιμοποιεί τεχνικές από τη θεωρία μάθησης [105].

Δομή του κεφαλαίου. Στην Ενότητα 2.2, παρουσιάζουμε προκαταρκτικές έννοιες και ορισμούς. Στην Ενότητα 2.3, παρουσιάζουμε άνω φράγματα για την προσέγγιση του βαθμού Dodgson. Μελετάμε τις ιδιότητες της μονοτονίας των αλγορίθμων μας στην Ενότητα 2.4. Στην Ενότητα 2.5, παρουσιάζουμε κάτω φράγματά για την προσέγγιση του βαθμού και της κατάταξης Dodgson. Στην Ενότητα 2.6, αποδεικνύουμε ότι ο βαθμός Young, ο δυικός βαθμός Young, και η κατάταξη κατά Young δεν είναι προσεγγίσιμα προβλήματα.

2.2 Προκαταρκτικές έννοιες - Ορισμοί

Θεωρούμε ένα σύνολο *ψηφοφόρων* $N = \{1, \dots, n\}$ και ένα σύνολο από *υποψηφίους* A, $|A| = m$. Δηλώνουμε τους υποψηφίους με γράμματα, όπως $a \in A$, ενώ δείκτες που αφορούν ψηφοφόρους εμφανίζονται στον εκθέτη. Κάθε ψηφοφόρος έχει γραμμική προτίμηση πάνω στους υποψηφίους, δηλαδή, μια κατάταξη πάνω στους υποψήφιους. Επισήμως, οι προτιμήσεις του ψηφοφόρου i είναι μια δυαδική σχέση $\succ_i$ πάνω στο A που ικανοποιεί τις ιδιότητες της αντί-ανακλαστικότητας, ασυμμετρίας, μεταβατικότητας και συνολικότητας. Ανεπίσημα, το $\succ_i$ είναι μια κατάταξη των υποψηφίων. Δεδομένων $x, y \in A$, το $x \succ_i y$ σημαίνει ότι ο i προτιμά τον x από τον y. Έστω $L = \mathcal{L}(A)$ το σύνολο των γραμμικών προτιμήσεων πάνω στο A. Ένα *προφίλ προτιμήσεων* $\succ = \langle \succ_0, \dots, \succ_{n-1} \rangle \in \mathcal{L}^n$ είναι μια συλλογή των προτιμήσεων για όλους τους ψηφοφόρους. Ένας *κανόνας ψηφοφορίας* είναι μία συνάρτηση $f : \mathcal{L}^n \Rightarrow 2^A \setminus \{\emptyset\}$ από τα προφίλ προτίμησης σε μη-κενά υποσύνολα υποψηφίων, και η οποία ορίζει το νικητή/τους νικητές της εκλογών. Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το $\succ_i'$ για να δηλώσουμε τις προτιμήσεις του ψηφοφόρου i, σε περιπτώσεις όπου θέλουμε να γίνει διάκριση μεταξύ δύο διαφορετικών κατατάξεων $\succ_i$ και $\succ_i'$. Για τα σύνολα των υποψηφίων $B_1, B_2 \subseteq A$, γράφουμε

$B_1 \succ_i B_2$ αν για όλα τα $a \in B_1$ και $b \in B_2$, $a \succ_i b$. Αν $B_1 = \{a\}$ (αντιστοίχως, $B_2 = \{a\}$) για κάποιο a, καμιά φορά γράφουμε $a \succ_i B_2$ (αντιστοίχως, $B_1 \succ_i a$) αντί για $\{a\} \succ_i B_2$ (αντιστοίχως, $B_1 \succ_i \{a\}$).

Έστω $x, y \in A$ και $\succ \in \mathcal{L}^n$. Λέμε ότι *ο x νικά ή κερδίζει τον y* σε μια *ανά ζεύγος εκλογή* αν $|\{i \in N : \ x \succ_i y\}| > n/2$. Ο *νικητής Condorcet* είναι ένας υποψήφιος που νικά κάθε άλλον υποψήφιο σε μια ανά ζεύγος εκλογή. Ο *βαθμός (ή σκορ) Dodgson* ενός υποψηφίου $x \in A$ σε σχέση με ένα προφίλ προτίμησης $\succ \in \mathcal{L}^n$, που συμβολίζεται με $\mathrm{sc}_D(x, \succ)$, είναι ο αριθμός των εναλλαγών μεταξύ γειτονικών υποψηφίων στις επιμέρους κατατάξεις που απαιτούνται για να γίνει ο x νικητής κατά Condorcet. Ο *νικητής κατά Dodgson* είναι ένας υποψήφιος, με τον ελάχιστο βαθμό Dodgson.

Θεωρούμε, για παράδειγμα, το προφίλ $\succ$ του πίνακα 2.1. Σε αυτό το παράδειγμα $N = \{0, \ldots, 4\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, και η i-οστή στήλη είναι η κατάταξη που αναφέρθηκε από τον ψηφοφόρο i. Ο υποψήφιος a χάνει σε ανά ζεύγη εκλογές από τον b και τον e (δύο ψηφοφόροι προτιμούν τον a από τον b, ένας ψηφοφόρος προτιμά τον a από τον e). Για να γίνει νικητής Condorcet, τέσσερις εναλλαγές αρκούν: εναλλάσσουμε τον a και τον e, και στη συνέχεια τον a και τον b, στην κατάταξη του παράγοντα 1 (μετά τις εναλλαγές η κατάταξη γίνεται $a \succ_1 b \succ_1 e \succ_1 c \succ_1 d$), και εναλλάσσουμε τον a και τον d, και στη συνέχεια τον a και τον e, στην κατάταξη του παράγοντα 4. Ο υποψήφιος a δεν μπορεί να γίνει νικητής Condorcet με λιγότερες εναλλαγές, ως εκ τούτου, έχουμε $\mathrm{sc}_D(a, \succ) = 4$ σε αυτό το προφίλ. Ωστόσο, στο προφίλ του πίνακα 2.1 υπάρχει νικητής Condorcet, ο υποψήφιος b, ως εκ τούτου, ο b είναι ο νικητής Dodgson με $\mathrm{sc}_D(b, \succ) = 0$.

0	1	2	3	4
a	b	e	e	b
b	e	b	c	e
c	a	c	d	d
d	c	a	a	a
e	d	d	b	c

Πίνακας 2.1: Ένα παράδειγμα ενός προφίλ. Για αυτό το προφίλ $\succ$, ισχύει ότι $\mathrm{sc}_D(b, \succ) = 0$, $\mathrm{sc}_D(a, \succ) = 4$.

Δεδομένου ενός προφίλ προτίμησης $\succ \in \mathcal{L}^n$ και $x, y \in A$, το έλλειμμα του x σε σχέση με τον y, συμβολίζεται ως $\mathrm{defc}(x, y, \succ)$, και ορίζεται ως ο αριθμός των πρόσθετων ψηφοφόρων που θα πρέπει να κατατάσσουν τον x πάνω από τον y, προκειμένου ο x να κερδίσει τον y σε μια ανά ζεύγος εκλογή. Δηλαδή,

$$\mathrm{defc}(x, y, \succ) \quad = \quad \max\left\{0, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - |\{i \in N : x \succ_i y\}|\right\}.$$

Συγκεκριμένα, αν ο x νικά τον y σε μια ανά ζεύγος εκλογή τότε ισχύει ότι $\mathrm{defc}(x, y, \succ) = 0$. Σημειώνουμε ότι αν ο n είναι ζυγός και ο x με τον y ισόπαλοι, δηλαδή, $|\{i \in N : \ x \succ_i y\}| = n/2$, τότε $\mathrm{defc}(x, y, \succ) = 1$. Για παράδειγμα, στο προφίλ του πίνακα 2.1 έχουμε ότι $\mathrm{defc}(a, b, \succ) = 1$,

$\text{defc}(a, c, \succ) = 0$, $\text{defc}(a, d, \succ) = 0$, $\text{defc}(a, e, \succ) = 2$. Χρησιμοποιούμε για συντομογραφία τον ισοδύναμο ορισμό $\text{defc}(y)$ όταν είναι σαφή το προφίλ προτίμησης και η ταυτότητα του υποψηφίου του οποίου το έλλειμμα μελετάμε. Π.χ. στο παραπάνω παράδειγμα επειδή μελετούμε το έλλειμμα του συγκεκριμένου υποψήφιου a λέμε ότι $\text{defc}(b) = 1, \text{defc}(c) = 0, \text{defc}(d) = 0, \text{defc}(e) = 2$. Λέμε ότι ο υποψήφιος $x \in A$ που έχει έλλειμμα έναντι οποιουδήποτε άλλου υποψηφίου, δηλαδή $\text{defc}(x, y, \succ) > 0$ είναι *ζωντανός*. Οι υποψήφιος που δεν έχει έλλειμμα έναντι οποιουδήποτε άλλου υποψηφίου, δηλαδή, αυτός με $\text{defc}(x, y, \succ) = 0$, είναι *νεκρός*.

Ο *βαθμός Young* του a^* σε σχέση με $\succ$ είναι το μέγεθος του μεγαλύτερου υποσυνόλου των ψηφοφόρων για τους οποίους ο a^* είναι νικητής κατά Condorcet. Αυτός είναι ο ορισμός που δίδεται από τον ίδιο τον Young [126], και χρησιμοποιείται και σε επόμενες εργασίες [110]. Εάν, για κάθε μη-κενό υποσύνολο ψηφοφόρων, ο a^* δεν είναι νικητής Condorcet, ο βαθμός Young του είναι 0. Στο παραπάνω παράδειγμα, ο βαθμός Young του a είναι 3, ο βαθμός Young του b είναι 1, και ο βαθμός Young του c είναι 0.

Ισοδύναμα, ένας Young νικητής είναι ένας υποψήφιος έτσι ώστε ένας πρέπει να αφαιρέσει τον ελάχιστο αριθμό ψηφοφόρων, προκειμένου να τον κάνουν νικητή Condorcet. Καλούμε αυτό τον αριθμό *δυϊκό* βαθμό Young. Σημειώνουμε ότι, στο πλαίσιο της προσεγγισιμότητας, αυτοί οι δύο ορισμοί δεν είναι ισοδύναμοι. Χρησιμοποιούμε τον πρώτο (πρωτότυπο) ορισμό, αλλά αναφερόμαστε και στο δεύτερο επίσης.

Οι Bartholdi κ.ά. [6] έχουν δείξει ότι το πρόβλημα απόφασης του βαθμού Dodgson, δηλαδή, για ένα δεδομένο προφίλ προτίμησης $\succ$, έναν υποψήφιο a και τον φυσικό αριθμό k, το πρόβλημα του καθορισμού αν ο βαθμός Dodgson του a στο $\succ$ είναι το πολύ k είναι πλήρες για την κλάση $\mathcal{NP}$. Επίσης το πρόβλημα απόφασης του νικητή κατά Young (δηλαδή το πρόβλημα απόφασης, δεδομένου ενός προφίλ προτίμησης και ενός υποψηφίου a, να καθοριστεί αν ο a είναι ο νικητής Young σε αυτό το προφίλ) είναι γνωστό ότι είναι Θ_2^P-πλήρες [110], και έτσι υπολογιστικά δύσκολο, το πρόβλημα του βαθμού Young πρέπει επίσης να είναι υπολογιστικά δύσκολο. Αλλιώς, θα ήμασταν σε θέση να υπολογίσουμε τους βαθμούς όλων των υποψηφίων αποτελεσματικά, και να προσδιορίσουμε τους υποψηφίους, με την ελάχιστη βαθμολογία.

Τα γραμμικά και ακέραια προγράμματα αποτελούν βασικά εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης. Μια ωραία εισαγωγή στο θέμα από τη σκοπιά της επιστήμης των υπολογιστών παρουσιάζεται από τους Cormen κ.ά. [37] την οποία συνοψίζουμε εδώ. Ένα *γραμμικό πρόγραμμα (ΓΠ)* στη κανονική του μορφή αποτελείται, για κάποια $p, q \in \mathbb{N}$, ένα $p \times q$ πίνακα M, ένα p-πίνακα A και ένα q-πίνακα B, και προσπαθεί να βρει ένα q-πίνακα που μεγιστοποιεί την BX (που ονομάζεται *αποτιμητική συνάρτηση-objective function*) και υπόκειται στους περιορισμούς $MX \leq A$, όπου κάθε X που ικανοποιεί τους περιορισμούς (αν οποία μπορεί να μην είναι μέγιστο) καλείται εφικτή λύση. Ένα *ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα* είναι ένα γραμμικό πρόγραμμα με το πρόσθετο περιορισμό ότι το X μπορεί να πάρει μόνο ακέραιες τιμές. Όπως γίνεται συνήθως, θα γράφουμε συχνά τα γραμμικά προγράμματα που χρησιμοποιούμε με επιδίωξη την ελαχιστοποίηση αντί της μεγιστοποίησης της αποτιμητικής συνάρτησης, και θα εκφράζουμε ορισμένους από τους περιορισμούς, ως κάτω αντί για άνω φράγματα. Μέσω απλών αλγεβρικών χειρισμών, αυτές οι εκφράσεις μπορούν πάντα να μεταφράζονται σε ισοδύναμες που είναι στην κανονική μορφή όπως ορίζεται παραπάνω.

Για ένα γραμμικό πρόγραμμα, με τη μορφή που δίνεται παραπάνω, το *δυϊκό* του είναι το γραμμικό πρόγραμμα που ορίζεται ως το πρόβλημα της εύρεσης ενός p-πίνακα $Y \geq 0$ που ελαχιστοποιεί την AY και υπόκειται στους περιορισμούς $M^{\mathrm{T}}Y \geq B$ (όπου M^{T} είναι ο ανάστροφος του M). Είναι εύκολο να δούμε ότι η BX για κάθε εφικτή λύση X για το αρχικό πρόβλημα (γνωστό και ως *πρωτεύον* γραμμικό πρόγραμμα) είναι ένα κάτω φράγμα στην AY κάθε εφικτής λύση Y στο δυϊκό του (ή αντιστρόφως αν το πρωτεύον εκφράζεται ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης), έτσι X και Y είναι βέλτιστες λύσεις στα αντίστοιχα προβλήματά τους όταν $AY = BX$. Το αντίστροφο είναι επίσης αλήθεια, αν και δεν είναι τόσο εύκολο να το δει κανείς, και παίζει ένα θεμελιώδη ρόλο στην ανάλυση αλγορίθμων για την επίλυση γραμμικών προγραμμάτων. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το γεγονός στο υπόλοιπο της διατριβής.

2.3 Προσεγγισιμότητα του βαθμού Dodgson

Ξεκινάμε με την παρουσίαση των αλγορίθμων προσέγγισης για το βαθμό κατά Dodgson.

2.3.1 Ένας άπληστος αλγόριθμος

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε ένα συνδυαστικό, άπληστο αλγόριθμο για την προσέγγιση του βαθμού Dodgson ενός δεδομένου υποψηφίου. Θεωρούμε, για άλλη μια φορά, έναν ειδικό υποψήφιο a^*, και ότι επίσης ένας ζωντανός υποψήφιος είναι αυτός με θετικό έλλειμμα. Σε κάθε βήμα, ο αλγόριθμος επιλέγει μια βέλτιστη, με βάση το αποδοτικό κόστος, μετακίνηση του υποψηφίου a^* στην προτίμηση κάποιου ψηφοφόρου. Το *αποδοτικό κόστος* της μετακίνησης του a^* στην προτίμηση ενός ψηφοφόρου $i \in N$ είναι ο λόγος μεταξύ του συνολικού αριθμού των θέσεων που ο a^* κινείται προς τα πάνω στην προτίμηση του i *σε σύγκριση με το αρχικό προφίλ* $\succ$, και του αριθμού των *υπαρχόντων* ζωντανών υποψηφίων που ξεπερνά ο a^*, ως αποτέλεσμα αυτής της μετακίνησης.

Μετά την επιλογή μιας βέλτιστης όσο αφορά το αποδοτικό κόστος μετακίνησης, δηλαδή, τη μετακίνηση με το χαμηλότερο αποδοτικό κόστος, ο αλγόριθμος μειώνει το $\mathrm{defc}(a)$ κατά ένα για κάθε ζωντανό υποψήφιο a που ο a^* ξεπερνάει. Οι υποψήφιοι $a \in A$ με $\mathrm{defc}(a) = 0$ γίνονται νεκροί. Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν δεν παραμένουν ζωντανοί υποψήφιοι. Η έξοδος του αλγορίθμου είναι ο συνολικός αριθμός των θέσεων που ο υποψήφιος a^* μετακινείται προς τα πάνω στις προτιμήσεις όλων των ψηφοφόρων.

Άπληστος Αλγόριθμος:

1. Έστω A' το σύνολο των ζωντανών υποψηφίων, δηλαδή των υποψηφίων $a \in A$ με $\mathrm{defc}(a) > 0$.

2. Όσο το $A' \neq \emptyset$:

   - Εκτέλεσε μια βέλτιστη όσο αφορά το αποδοτικό κόστος μετακίνηση, δηλαδή μετακίνησε τον a^* στις προτιμήσεις του ψηφοφόρου $i \in N$ με τέτοιο τρόπο που να ελαχιστοποιεί το λόγο μεταξύ του *συνολικού* αριθμού των θέσεων που ο a^* κινείται ανοδικά στις προτιμήσεις των i και τον αριθμό των υπαρχόντων ζωντανών υποψηφίων που ο a^* ξεπερνάει, ως αποτέλεσμα αυτής της μετακίνησης.
   - Επαναϋπολόγισε το A'.

3. Επέστρεψε τον αριθμό των ανταλλαγών που εκτελέστηκαν.

Ένα παράδειγμα της εκτέλεσης του αλγορίθμου απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1 (όπως επίσης και στο Σχήμα 2.2 στη σχετική συζήτηση στην Ενότητα 2.4). Στο αρχικό προφίλ του παραδείγματος, ο υποψήφιος a^* έχει ελλείμματα $\mathrm{defc}(b) = 2$, $\mathrm{defc}(c) = 1$ και $\mathrm{defc}(d_i) = 0$. Ως εκ τούτου, οι υποψήφιοι b και c είναι ζωντανοί και οι d_1, ..., d_8 είναι νεκροί. Κατά το πρώτο στάδιο του αλγορίθμου, υπάρχουν αρκετοί διαφορετικοί τρόποι να μετακινηθεί ο a^* προς τα πάνω για να προσπεράσει έναν από τους ζωντανούς υποψηφίους b και c ή και τους δύο. Ανάμεσά τους, αυτός με το μικρότερο αποδοτικό κόστος είναι να μετακινηθεί ο a^* προς τα πάνω στην προτίμηση $\succ_1$. Με τον τρόπο αυτό, ο a^* μετακινείται δύο θέσεις προς τα πάνω και ξεπερνάει τον ζωντανό υποψήφιο c κατά αποδοτικό κόστος ίσο με 2. Οποιαδήποτε άλλη μετακίνηση του a^* στο αρχικό προφίλ έχει αποδοτικό κόστος, τουλάχιστον $2,5$ εφόσον ο a^* πρέπει να μετακινηθεί τουλάχιστον τρεις θέσεις προς τα πάνω, προκειμένου να προσπεράσει έναν ζωντανό υποψήφιο και τουλάχιστον πέντε θέσεις προς τα πάνω για να ξεπεράσει και τους δύο b και c. Μετά το βήμα 1, ο c είναι νεκρός. Στη συνέχεια, στο βήμα 2, υπάρχουν τρεις τρόποι για να μετακινηθεί ο a^* προς τα πάνω, έτσι ώστε να ξεπεράσει τον ζωντανό υποψήφιο b: είτε μετακινώντας τον στην κορυφή του $\succ_1$ (αυτό έχει αποδοτικό κόστος 5, διότι ο a^* θα έχει μετακινηθεί πέντε θέσεις στο σύνολο σε σχέση με το αρχικό προφίλ στο $\succ_1$), είτε μετακινώντας τον στην κορυφή του $\succ_2$ (με το αποδοτικό κόστος να είναι 3), είτε μετακινώντας τον τέσσερις θέσεις πάνω στο $\succ_3$ (με το αποδοτικό κόστος να είναι 4). Ο αλγόριθμος παίρνει τη δεύτερη επιλογή. Στη συνέχεια, στο βήμα 3, ο αλγόριθμος μπορεί να μετακινήσει είτε τον a^* στην πρώτη θέση του $\succ_1$ ή να τον μετακινήσει τέσσερις θέσεις πάνω στο $\succ_3$. Η πρώτη επιλογή έχει αποδοτικό κόστος 5 (θυμίζουμε ότι το αποδοτικό κόστος ορίζεται με το συνολικό αριθμό των θέσεων που ο a^* θα κινηθεί σε σχέση με τη θέση του στο αρχικό προφίλ), ενώ η δεύτερη έχει αποδοτικό κόστος 4 και είναι η μετακίνηση που επιλέγει ο αλγόριθμος. Μετά το βήμα 3, όλοι οι υποψήφιοι είναι νεκροί και ο αλγόριθμος τερματίζει επιστρέφοντας το συνολικό αριθμό των θέσεων που ο a^* μετακινείται προς τα πάνω, δηλαδή, 9.

Από τον ορισμό του αλγορίθμου, είναι σαφές ότι παράγει ένα προφίλ όπου ο a^* είναι νικητής Condorcet. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι αν το a^* είναι αρχικά νικητής Condorcet τότε ο αλγόριθμος υπολογίζει βαθμό μηδέν, έτσι ώστε ως κανόνας ψηφοφορίας ο αλγόριθμος ικανοποιεί

$\succ_1$	$\succ_2$	$\succ_3$
b	b	c
d_1	d_4	b
d_2	d_5	d_6
c	a^*	d_7
d_3	c	d_8
a^*	d_1	a^*
d_4	d_2	d_1
d_5	d_3	d_2
d_6	d_6	d_3
d_7	d_7	d_4
d_8	d_8	d_5

(α′) Αρχικό Προφίλ

$\succ_1$	$\succ_2$	$\succ_3$
b	b	c
d_1	d_4	b
d_2	d_5	d_6
a^*	a^*	d_7
c	c	d_8
d_3	d_1	a^*
d_4	d_2	d_1
d_5	d_3	d_2
d_6	d_6	d_3
d_7	d_7	d_4
d_8	d_8	d_5

(β′) Μετά το πρώτο βήμα

$\succ_1$	$\succ_2$	$\succ_3$
b	a^*	c
d_1	b	b
d_2	d_4	d_6
a^*	d_5	d_7
c	c	d_8
d_3	d_1	a^*
d_4	d_2	d_1
d_5	d_3	d_2
d_6	d_6	d_3
d_7	d_7	d_4
d_8	d_8	d_5

(γ′) Μετά το δεύτερο βήμα

$\succ_1$	$\succ_2$	$\succ_3$
b	a^*	c
d_1	b	a^*
d_2	d_4	b
a^*	d_5	d_6
c	c	d_7
d_3	d_1	d_8
d_4	d_2	d_1
d_5	d_3	d_2
d_6	d_6	d_3
d_7	d_7	d_4
d_8	d_8	d_5

(δ′) Μετά το τρίτο βήμα

Σχήμα 2.1: Ένα παράδειγμα εκτέλεσης του άπληστου αλγόριθμου

το κριτήριο Condorcet. Επίσης, κατά τη διάρκεια κάθε επανάληψης της γραμμής 2 μια βέλτιστη όσο αφορά το αποδοτικό κόστος μετακίνηση μπορεί να μην είναι μοναδική, στην οποία περίπτωση ο αλγόριθμος επιλέγει, κατά τρόπο που να μην επηρεάζει τα προσεγγιστικά αποτελέσματα μας, ακριβώς μια από αυτές τις βέλτιστες μετακινήσεις αποδοτικού κόστους.

Θεώρημα 2.3.1. *Για κάθε είσοδο a^* και $\succ$ με m υποψηφίους, ο άπληστος αλγόριθμος επιστρέφει μια H_{m-1}-προσέγγιση του βαθμού Dodgson του a^*, όπου για όλους τους φυσικούς αριθμούς k, το $H_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}$ είναι ο k-οστός αρμονικός αριθμός.*

Απόδειξη. Βασίζουμε την απόδειξη μας στη σχέση μεταξύ του προβλήματός μας και του προβλήματος Constrained Set Multicover, για το οποίο οι Rajagopalan και Vazirani [106] έχουν δώσει έναν αλγόριθμο προσέγγισης και χρησιμοποιούν τη τεχνική της διπλής τοποθέτησης (dual fitting) για να αποδείξουν το λόγο προσέγγισης του (επίσης [122, σελ. 112–116]).

Constrained Set Multicover

Στιγμιότυπο: Ένα βασικό σύνολο A, ένα σύνολο ακεραίων $\{r_a\}_{a \in A}$, ένας για κάθε στοιχείο του $a \in A$, που αντιπροσωπεύει την *απαίτηση κάλυψης* για το a, μια δεικτοδοτημένη συλλογή $\mathcal{S} = \{S_j \mid S_j \subseteq A\}$ υποσυνόλων του A (κυρίως, το ίδιο υποσύνολο μπορεί να εμφανιστεί πάνω από μία φορά σε αυτή τη συλλογή, εφ′ όσον κάθε αντίγραφο έχει ένα ξεχωριστό δείκτη), και ένα σύνολο ακεραίων $\{c_{S_j}\}$, ένα για κάθε μέλος του $\mathcal{S}$, που αντιπροσωπεύει το *κόστος* αυτού του μέλους.
Ερώτημα: Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός $\bar{c}$ για τον οποίον υπάρχει υποσύνολο $\mathcal{C}$ του $\mathcal{S}$ έτσι ώστε

1. $\bar{c} = \sum_{S_j \in \mathcal{C}} c_{S_j}$,

2. κάθε μέλος του $\mathcal{S}$ να εμφανίζεται το πολύ μια φορά στο $\mathcal{C}$, και

3. κάθε στοιχείο $a \in A$ να εμφανίζεται σε τουλάχιστον r_a μέλη του $\mathcal{C}$;

Μπορούμε να δούμε το πρόβλημα της προσέγγισης του βαθμού Dodgson ως μια παραλλαγή του προβλήματος Constrained Set Multicover. Το βασικό σύνολο είναι το σύνολο των ζωντανών υποψηφίων. Για κάθε ζωντανό υποψήφιο $a \in A \setminus \{a^*\}$, το έλλειμμα του $\text{defc}(a)$ είναι στην πραγματικότητα απαίτηση κάλυψής του, δηλαδή, ο αριθμός των διαφορετικών συνόλων που πρέπει να ανήκει στην τελική επικάλυψη. Για κάθε ψηφοφόρο $i \in N$ που κατατάσσει τον a^* στη θέση r^i, έχουμε μια ομάδα $\mathcal{S}^i$ που αποτελείται από τα σύνολα S_k^i για $k = 1, \ldots, r^i - 1$, όπου το σύνολο S_k^i περιέχει τους (αρχικούς) ζωντανούς υποψηφίους που εμφανίζονται στις θέσεις $r^i - k$ έως $r^i - 1$ στην προτίμηση του ψηφοφόρου i. Η μεταβλητή S_k^i έχει κόστος k. Τώρα, το πρόβλημα επικάλυψης που πρέπει να λυθεί είναι το ακόλουθο. Επιθυμούμε να επιλεγεί το πολύ ένα σύνολο από κάθε μία από τις διάφορες ομάδες έτσι ώστε κάθε υποψήφιος $a \in A \setminus \{a^*\}$ να εμφανίζεται σε τουλάχιστον $\text{defc}(a)$ σύνολα και το συνολικό κόστος των επιλεγμένων συνόλων να ελαχιστοποιείται. Το βέλτιστο κόστος είναι ο βαθμός Dodgson του a^* και, ως εκ τούτου, το κόστος οποιασδήποτε προσεγγιστικής επικάλυψης που ικανοποιεί τις απαιτήσεις επικάλυψης και οι περιορισμοί είναι ένα άνω όριο για το βαθμό Dodgson.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το πρόβλημα επικάλυψης ως:

Set Multicover with Group Constraints

Στιγμιότυπο: Ένα βασικό σύνολο A, ένα σύνολο ακεραίων $\{r_a\}_{a \in A}$, ένα για κάθε στοιχείο $a \in A$, μια συλλογή $\mathcal{S} = \{S_j \mid S_j \subseteq A\}$ υποσυνόλων του A, το σύνολο των ακεραίων $\{c_{S_j}\}$, και μια διαμέριση του $\mathcal{S}$ σε ομάδες $\mathcal{S}^i$ για $i \in N$.

Ερώτημα: Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός $\bar{c}$ για τον οποίον υπάρχει υποσύνολο $\mathcal{C}$ του $\mathcal{S}$ έτσι ώστε

1. $\bar{c} = \sum_{S_j \in \mathcal{C}} c_{S_j}$,
2. κάθε μέλος του $\mathcal{S}$ να εμφανίζεται το πολύ μια φόρα στο $\mathcal{C}$,
3. κάθε στοιχείο $a \in A$ να εμφανίζεται σε τουλάχιστον r_a μέλη του $\mathcal{C}$, και
4. το πολύ ένα μέλος από κάθε ομάδα $\mathcal{S}^i$ να εμφανίζεται σε $\mathcal{C}$;

Σε όρους του παρόντος προβλήματος επικάλυψης, ο άπληστος αλγόριθμος που αναφέρεται παραπάνω μπορεί να θεωρηθεί ως εξής. Σε κάθε βήμα, επιλέγει ένα βέλτιστο σύνολο αποδοτικού κόστους. Για αυτούς τους ζωντανούς υποψηφίους, ο αλγόριθμος μειώνει τις απαιτήσεις επικάλυψής του στο τέλος του βήματος. Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν όλοι οι υποψήφιοι έχουν πεθάνει (δηλαδή, η απαίτηση επικάλυψής τους έχει γίνει μηδέν). Η έξοδος του αλγορίθμου αποτελείται από τα σύνολα μέγιστου κόστους που συλλέχθηκαν από κάθε ομάδα.

Διαπιστώνουμε ότι η διατύπωση του προβλήματος του βαθμού Dodgson μπορεί να γίνει ως το εξής ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα.

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i \in N} \sum_{k=1}^{r^i-1} k \cdot x_{S^i_k} \\
\text{subject to} \quad & \forall a \in A \setminus \{a^*\},\ \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{S}^i : a \in S} x_S \geq \mathrm{defc}(a) \\
& \forall i \in N,\ \sum_{S \in \mathcal{S}^i} x_S \leq 1 \\
& x \in \{0,1\}.
\end{aligned}
$$

Η μεταβλητή x_S που σχετίζεται με ένα σύνολο S υποδηλώνει κατά πόσον το S περιλαμβάνεται στη λύση ($x_S = 1$) ή όχι ($x_S = 0$). Θα χαλαρώσουμε το περιορισμό για ακεραίους, προκειμένου να αποκτήσουμε μια γραμμική χαλάρωση του προγράμματος και υπολογίζουμε το δυϊκό γραμμικό πρόγραμμα.

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{a \in A \setminus \{a^*\}} \mathrm{defc}(a) \cdot y_a - \sum_{i \in N} z^i \\
\text{subject to} \quad & \forall i \in N, k = 1, \ldots, r^i - 1,\ \sum_{a \in S^i_k} y_a - z^i \leq k \\
& \forall i \in N,\ z^i \geq 0 \\
& \forall a \in A \setminus \{a^*\},\ y_a \geq 0.
\end{aligned}
$$

Για ένα σύνολο S που επιλέγεται από τον αλγόριθμο για την κάλυψη του υποψηφίου $a \in A \setminus \{a^*\}$ για j-οστή φορά (το j-οστό αντίγραφο του a), θέτουμε το $p(a, j)$ να είναι ίσο με το αποδοτικό κόστος του S όταν επιλέχθηκε. Ανεπίσημα, το p διανέμει εξίσου το κόστος του S μεταξύ των αντιγράφων των ζωντανών υποψηφίων που καλύπτει. Όταν ο αλγόριθμος καλύπτει ένα ζωντανό υποψήφιο a επιλέγοντας ένα σύνολο S, που ανήκει στην ομάδα $\mathcal{S}^i$, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $j_i(a)$ για να υποδηλώσουμε το δείκτη του αντιγράφου a που ο αλγόριθμος καλύπτει επιλέγοντας αυτό το σύνολο. Δηλώνουμε με T^i το σύνολο των ζωντανών υποψηφίων που καλύπτονται από τα σύνολα της ομάδας $\mathcal{S}^i$ που επιλέγονται από τον αλγόριθμο κατά τη διάρκεια της εκτέλεσής του.

Τώρα, θα δείξουμε ότι με το να θέσουμε

$$
y_a = \frac{p(a, \mathrm{defc}(a))}{H_{m-1}}
$$

για κάθε υποψήφιο $a \in A \setminus \{a^*\}$ και

$$
z^i = \frac{1}{H_{m-1}} \sum_{a \in T^i} \left(p(a, \mathrm{defc}(a)) - p(a, j_i(a))\right)
$$

για κάθε ψηφοφόρο $i \in N$, ικανοποιούνται οι περιορισμοί του δυϊκού γραμμικού προγράμματος. Οι μεταβλητές y_a είναι σαφώς μη αρνητικές. Δεδομένου ότι ο αλγόριθμος επιλέγει ένα σύνολο με βέλτιστο αποδοτικό κόστος σε κάθε βήμα, το αποδοτικό κόστος του συνόλου δεν μειώνεται με το χρόνο. Ως εκ τούτου, $p(a,\mathrm{defc}(a)) \geq p(a,j)$ για κάθε υποψήφιο a με $\mathrm{defc}(a) > 0$ και $j \leq \mathrm{defc}(a)$. Αυτό σημαίνει επίσης ότι ο z^i είναι μη αρνητικός.

Για να δείξουμε ότι ο πρώτος περιορισμός του δυϊκού γραμμικού προγράμματος ικανοποιείται επίσης, θεωρούμε έναν ψηφοφόρο $i \in N$ και ακέραιο k τέτοιο ώστε $1 \leq k \leq r^i - 1$. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\sum_{a \in S_k^i} y_a - z^i &= \frac{1}{H_{m-1}} \left[\sum_{a \in S_k^i} p(a,\mathrm{defc}(a)) - \sum_{a \in T^i} \left(p(a,\mathrm{defc}(a)) - p(a,j_i(a))\right) \right] \\
&\leq \frac{1}{H_{m-1}} \left[\sum_{a \in S_k^i} p(a,\mathrm{defc}(a)) - \sum_{a \in S_k^i \cap T^i} \left(p(a,\mathrm{defc}(a)) - p(a,j_i(a))\right) \right] \\
&= \frac{1}{H_{m-1}} \left[\sum_{a \in S_k^i \setminus T^i} p(a,\mathrm{defc}(a)) + \sum_{a \in S_k^i \cap T^i} p(a,j_i(a)) \right]. \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Τώρα, για κάθε υποψήφιο $a \in S_k^i$, ορίζουμε το $\nu(a)$ ως εξής. Αν $a \in S_k^i \cap T^i$, το $\nu(a)$ είναι το χρονικό βήμα στο οποίο ο αλγόριθμος κάλυψε τον υποψήφιο a επιλέγοντας ένα σύνολο της ομάδας $\mathcal{S}^i$. Σε αντίθετη περίπτωση, αν το $a \in S_k^i \setminus T^i$, το $\nu(a)$ είναι το χρονικό βήμα στο οποίο ο υποψήφιος a πέθανε. Τώρα, αριθμούμε τους υποψηφίους στο S_k^i σε μη φθίνουσα σειρά $\nu(\cdot)$, σπάζοντας τις ισοπαλίες αυθαίρετα. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_{|S_k^i|}$ αυτή η σειρά. Θεωρούμε τον υποψήφιο a_t με $1 \leq t \leq |S_k^i|$. Παρατηρούμε ότι, λόγω του ορισμού της τάξης των υποψηφίων S_k^i, μετά την εκτέλεση του βήματος $\nu(a_t)$, οι υποψήφιοι $a_t, a_{t+1}, \ldots, a_{|S_k^i|}$ δεν έχουν πεθάνει ακόμη και τα σύνολα της ομάδας $\mathcal{S}^i$ που έχουν επιλεγεί από τον αλγόριθμο ως τώρα (αν υπάρχουν) δεν περιέχουν κανέναν από αυτούς. Ως εκ τούτου, στο βήμα $\nu(a_t)$, ο αλγόριθμος έχει τη δυνατότητα να επιλέξει σύνολο S_k^i με κόστος k για να καλύψει τουλάχιστον αυτούς τους $|S_k^i| - t + 1$ υποψήφιους. Έτσι, το αποδοτικό κόστος του συνόλου που πραγματικά επιλέγεται από τον αλγόριθμο στο βήμα $\nu(a_t)$ είναι το πολύ $\frac{k}{|S_k^i| - t + 1}$. Το επιχείρημα αυτό συνεπάγεται ότι

$$
p(a_t, j_i(a_t)) \leq \frac{k}{|S_k^i| - t + 1} \qquad (2.2)
$$

αν $a_t \in S_k^i \cap T^i$, και

$$
p(a_t, \mathrm{defc}(a_t)) \leq \frac{k}{|S_k^i| - t + 1} \qquad (2.3)
$$

αλλιώς (αν $a_t \in S_k^i \setminus T^i$).

Χρησιμοποιώντας τις (2.2) και (2.3) μαζί με την (2.1), παίρνουμε ότι

$$
\sum_{a \in S_k^i} y_a - z^i \leq \frac{1}{H_{m-1}} \sum_{t=1}^{|S_k^i|} \frac{k}{|S_k^i| - t + 1} = \frac{k H_{|S_k^i|}}{H_{m-1}} \leq k,
$$

πράγμα που σημαίνει ότι οι περιορισμοί του δυϊκού γραμμικού προγράμματος πάντα ικανοποιούνται. Η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού, προφανώς, $|S_k^i| \leq m-1$.

Τώρα, συμβολίζουμε με OPT τη βέλτιστη λύση του ακέραιου γραμμικού προγράμματος. Με τη δυϊκότητα, έχουμε ότι κάθε εφικτή λύση για το δυϊκό χαλαρωμένο γραμμικό πρόγραμμα έχει λύση το πολύ OPT. Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} H_{m-1} \cdot \mathrm{OPT} &\geq H_{m-1}\left(\sum_{a \in A \setminus \{a^*\}} \mathrm{defc}(a) \cdot y_a - \sum_{i \in N} z^i\right) \\ &= \sum_{a \in A \setminus \{a^*\}} \mathrm{defc}(a) \cdot p(a, \mathrm{defc}(a)) - \sum_{i \in N} \sum_{a \in T^i} \left(p(a, \mathrm{defc}(a)) - p(a, j_i(a))\right) \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{a \in T^i} p(a, j_i(a)). \end{aligned}$$

Το θεώρημα προκύπτει αφού η τελευταία έκφραση είναι ίση με το συνολικό κόστος των συνόλων που επιλέχθηκαν σε όλα τα στάδια του αλγορίθμου και σαφώς φράσσει εκ των άνω το κόστος της τελικής λύσης. □

2.3.2 Ένας αλγόριθμος βασισμένος σε γραμμικό πρόγραμμα

Η ανάλυση του άπληστου αλγόριθμου προτείνει ένα αλγόριθμο βασισμένο στο γραμμικό πρόγραμμα που προσεγγίζει το βαθμό Dodgson ενός υποψηφίου a^* χωρίς να παρέχει ρητά έναν τρόπο για να μετακινηθεί ο a^* προς τα πάνω στην προτίμηση κάποιων ψηφοφόρων, έτσι ώστε ο a^* να γίνεται ο νικητής Condorcet. Αυτός ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί την ίδια χαλάρωση του γραμμικού προγράμματος του βαθμού Dodgson που χρησιμοποιήθηκε στην ανάλυση του άπληστου αλγόριθμου. Ο αλγόριθμος υπολογίζει τη βέλτιστη λύση, και επιστρέφει την τιμή αυτή πολλαπλασιαζόμενη με H_{m-1}, ως τον βαθμό του υποψηφίου a^*. Η ιδέα ότι η χαλάρωση του ακέραιου γραμμικού προγράμματος (ILP) για το βαθμό Dodgson οδηγεί σε έναν κανόνα που είναι παρόμοιος με τον Dodgson δεν είναι καινούργια (π.χ., [89]).

Για λόγους πληρότητας, αναδιατυπώνουμε το γραμμικό πρόγραμμα σε μια πιο αναλυτική μορφή που παίρνει το προφίλ προτίμησης ως παράμετρο. Αυτό θα φανεί χρήσιμο στην επόμενη ενότητα, όπου θα συζητήσουμε τις ιδιότητες μονοτονίας του αλγορίθμου. Λαμβάνοντας υπόψη το προφίλ $R = R^N$ με ένα σύνολο ψηφοφόρων N και ένα σύνολο A από m υποψηφίους, συμβολίζουμε με $r^i(R)$ την κατάταξη του υποψηφίου a^* στην προτίμηση του ψηφοφόρου i. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathrm{defc}(a, R)$ για το έλλειμμα του a^* σε σύγκριση με έναν υποψήφιο a στο προφίλ R. Υπενθυμίζεται ότι οι υποψήφιοι $a \in A \setminus \{a^*\}$ για τους οποίους $\mathrm{defc}(a, R) > 0$ λέγονται ζωντανοί. Για κάθε ψηφοφόρο $i \in N$ που κατατάσσει τον a^* σε θέση $r^i(R)$, συμβολίζουμε με $\mathcal{S}^i(R)$ την υποσυλλογή που αποτελείται από τα σύνολα $S_k^i(R)$ για $k = 1, \ldots, r^i(R) - 1$, όπου το σύνολο $S_k^i(R)$ περιέχει τους ζωντανούς υποψηφίους που εμφανίζονται στις θέσεις $r^i(R) - k$ έως $r^i(R) - 1$ στην προτίμηση του ψηφοφόρου i. Συμβολίζουμε με $\mathcal{S}(R)$ την ένωση των υποσυλλογών $\mathcal{S}^i(R)$ για $i \in N$.

Ο αλγόριθμος βασισμένος στο γραμμικό πρόγραμμα χρησιμοποιεί την ακόλουθη χαλάρωση ΓΠ του βαθμού Dodgson του υποψηφίου a^* στο προφίλ R:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i \in N} \sum_{k=1}^{r^i(R)-1} k \cdot x_{S_k^i(R)} \\
\text{subject to} \quad & \forall a \in A \setminus \{a^*\}, \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{S}^i(R): a \in S} x_S \geq \mathrm{defc}(a, R) \\
& \forall i \in N, \sum_{S \in \mathcal{S}^i(R)} x_S \leq 1 \\
& \forall S \in \mathcal{S}(R), \ 0 \leq x_S \leq 1.
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι, όπως συμβαίνει με τον άπληστο αλγόριθμο, αν ο a^* είναι αρχικά ένας νικητής Condorcet τότε ο αλγόριθμος υπολογίζει βαθμό μηδέν.

Σε κάθε άλλη περίπτωση, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ο βαθμός που επιστρέφεται από τον αλγόριθμο είναι μεταξύ του βαθμού Dodgson του υποψηφίου a^* και του βαθμού Dodgson πολλαπλασιαζόμενο με H_{m-1}. Πράγματι, από την ανάλυση στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1 (τελευταία σχέση), γνωρίζουμε ότι ο βαθμός που επιστρέφεται από τον άπληστο αλγόριθμο και, ως εκ τούτου, ο βαθμός Dodgson του a^* δεν είναι υψηλότερος από τη βέλτιστη λύση του χαλαρωμένου ΓΠ πολλαπλασιαζόμενο με H_{m-1}. Επιπλέον, δεδομένου ότι η βέλτιστη λύση του χαλαρωμένου ΓΠ είναι ένα κάτω φράγμα για το βαθμό Dodgson του a^*, ο αλγόριθμος που είναι βασισμένος στο γραμμικό πρόγραμμα επιστρέφει ένα αποτέλεσμα που είναι μια H_{m-1}-προσέγγιση του βαθμού Dodgson. Το συνοψίζουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.2. *Για κάθε είσοδο a^* και $\succ$ με m υποψηφίους, ο αλγόριθμος που είναι βασισμένος στο γραμμικό πρόγραμμα επιστρέφει μια H_{m-1}-προσέγγιση του βαθμού Dodgson του a^*.*

2.4 Σχετικά με τη σκοπιμότητα των Αλγορίθμων προσέγγισης ως νέοι κανόνες ψηφοφορίας

Μέχρι στιγμής έχουμε δει προσεγγίσεις του κανόνα του Dodgson μέσα από μια αλγοριθμική σκοπιά. Σημαντικό επίσης είναι να τον εξερευνήσουμε εν συντομία και από τη μεριά της κοινωνικής επιλογής. Υποστηρίζουμε ότι η προσέγγιση του κανόνα του Dodgson είναι ισοδύναμη με ένα νέο κανόνα ψηφοφορίας, ο οποίος εγγυάται την εκλογή ενός υποψηφίου που δεν απέχει πολύ από το να είναι νικητής Condorcet. Με άλλα λόγια, ένας απόλυτα λογικός ορισμός του «κοινωνικά καλού» νικητή, δεδομένων των συνθηκών, είναι απλά ο υποψήφιος που επιλέγεται από τον αλγόριθμο προσέγγισης. Σημειώνουμε ότι ο προσεγγιστικός αλγόριθμος μπορεί να σχεδιαστεί για να ικανοποιείται το Condorcet κριτήριο, δηλαδή, να εκλέγεται πάντα αν υπάρχει, νικητής Condorcet.

Δεδομένου ότι ο βαθμός Dodgson του νικητή Condorcet είναι μηδέν, η επιλογή ενός τέτοιου νικητή όταν υπάρχει, δεν έχει καμία επίπτωση στον λόγο προσέγγισης.

Οι αλγόριθμοι προσέγγισής μας πρέπει να συγκριθούν με δύο εννοιολογικά διαφορετικές διαστάσεις: τις αλγοριθμικές τους ιδιότητες και τις κοινωνικές τους ιδιότητες. Από μια αλγοριθμική άποψη, ο άπληστος αλγόριθμος δίνει μια καλύτερη αίσθηση της συνδυαστικής δομής του προβλήματος. Στη συνέχεια υποστηρίζουμε, ωστόσο, ότι αλγόριθμος που βασίζεται στο γραμμικό πρόγραμμα έχει κάποιες επιθυμητές ιδιότητες από την πλευρά της κοινωνικής επιλογής.

Στα περισσότερα αλγοριθμικά προβλήματα σχεδιασμού μηχανισμών [97], όπως συνδυαστικές δημοπρασίες ή δρομολόγηση, αναζητά κανείς συνήθως αλγόριθμους προσέγγισης που είναι φιλαλήθεις, δηλαδή, οι παίχτες δεν μπορούν να επωφεληθούν από το να πουν ψέματα. Ωστόσο, το γνωστό θεώρημα Gibbard-Satterthwaite [65, 113] αποκλείει οι κανόνες ψηφοφορίας να είναι τόσο φιλαλήθεις όσο και επιθυμητοί, κατά μία έννοια. Ως εκ τούτου, άλλες ιδιότητες είναι επιθυμητές στους κανόνες ψηφοφορίας. (Φυσικά, είναι ενδιαφέρον να δούμε άλλες κοινωνικές ιδιότητες υπό το δικό τους πρίσμα, ανεξάρτητα από το Gibbard-Satterthwaite Θεώρημα).

Ας επαναλάβουμε ότι τόσο ο άπληστος αλγόριθμος όσο και ο αλγόριθμος που βασίζεται στο γραμμικό πρόγραμμα ικανοποιούν την ιδιότητα της συνέπειας κατά Condorcet. Ας εξετάσουμε τώρα την ιδιότητα της *μονοτονίας*, μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες, βάσει των οποίων συγκρίνονται οι κανόνες ψηφοφορίας. Πολλές διαφορετικές έννοιες της μονοτονίας μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία. Για τους σκοπούς μας, ένας (βασισμένος στον βαθμό) κανόνας ψηφοφορίας είναι *μονότονος σύμφωνα με τον βαθμό* αν και μόνο αν κάνοντας ένα υποψήφιο προτιμότερο στην κατάταξη κάποιου ψηφοφόρου δεν μπορεί να επιδεινώσει τον βαθμό αυτού του υποψηφίου, δηλαδή, να αυξηθεί όταν ένας χαμηλότερος βαθμός είναι επιθυμητός (όπως στο Dodgson), ή να μειωθεί όταν ένας υψηλότερος βαθμός είναι επιθυμητός. Όλοι οι εξέχοντες κανόνες ψηφοφορίας με βάση τον βαθμό (π.χ. θεσιακοί κανόνες βαθμολόγησης, Copeland, Maximin) είναι μονότονοι ως προς τον βαθμό. Είναι εύκολο να δούμε ότι οι κανόνες Dodgson και Young είναι επίσης μονότονοι ως προς τον βαθμό.

Πρώτα ισχυριζόμαστε ότι ο αλγόριθμός μας που βασίζεται στο γραμμικό πρόγραμμα είναι μονότονος ως προς τον βαθμό.

Θεώρημα 2.4.1. *Ο αλγόριθμος που βασίζεται στο γραμμικό πρόγραμμα είναι μονότονος ως προς τον βαθμό.*

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε δύο διαφορετικές εισόδους του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του βαθμού του υποψηφίου a^*: μία με προφίλ $R = R^N$ και μια άλλη με προφίλ $\bar{R}$ που λαμβάνεται από το R μετακινώντας τον υποψήφιο a^* πάνω, στις προτιμήσεις μερικών ψηφοφόρων (παραβλέποντας το συμβολισμό, θα αφήσουμε μερικές φορές το R, αντίστοιχα $\bar{R}$, να χαρακτηρίσει την είσοδο έχοντας, προφίλ R, αντίστοιχα $\bar{R}$). Λαμβάνοντας υπόψη τη βέλτιστη λύση x για το R, θα κατασκευάσουμε μια εφικτή λύση $\bar{x}$ για το $\bar{R}$ που δεν υπερβαίνει την x. Αυτό αποτελεί επαρκή προϋπόθεση για το θεώρημα.

Από τον ορισμό του προφίλ $\bar{R}$, ισχύει ότι $r^i(R) \geq r^i(\bar{R})$ για κάθε $i \in N$. Διαμερίζουμε την υποομάδα $\mathcal{S}^i(R)$ στις ακόλουθες δύο υπο-συλλογές που δεν έχουν κοινά στοιχεία:

$$\mathcal{S}^{i,1}(R) = \{S_k^i(R) : k = r^i(R) - r^i(\bar{R}) + 1, \ldots, r^i(R) - 1\}$$

και

$$\mathcal{S}^{i,2}(R) = \{S_k^i(R) : k = 1, \ldots, r^i(R) - r^i(\bar{R})\} \ .$$

Για κάθε $i \in N$, υπάρχει μια - προς - μια και επί, αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων στο $\mathcal{S}^i(\bar{R})$ και των σύνολων στο $\mathcal{S}^{i,1}(R)$, όπου για $k \in \{1, \ldots, r^i(\bar{R})\}$ το σύνολο $S_k^i(\bar{R})$ του $\mathcal{S}^i(\bar{R})$ αντιστοιχεί στο σύνολο $S^i_{k+r^i(R)-r^i(\bar{R})}(R)$ του $\mathcal{S}^{i,1}(R)$ και το αντίστροφο. Η λύση $\bar{x}$ για τη δεύτερη είσοδο κατασκευάζεται απλά θέτοντας

$$\bar{x}_{S_k^i(\bar{R})} = x_{S^i_{k+r^i(R)-r^i(\bar{R})}(R)}$$

για $i \in N$ και $k \in \{1, \ldots, r^i(\bar{R}) - 1\}$.

Θα πρέπει πρώτα να αποδείξουμε ότι η λύση $\bar{x}$ είναι μια εφικτή λύση για το $\bar{R}$. Οι ορισμοί των $\bar{x}$-μεταβλητών σαφώς συνεπάγονται ότι το δεύτερο και το τρίτο σύνολο των περιορισμών ικανοποιούνται (δεδομένου ότι η λύση x είναι εφικτή). Επίσης, το πρώτο σύνολο περιορισμών ικανοποιείται τετριμμένα για κάθε υποψήφιο a με $\mathrm{defc}(a, \bar{R}) = 0$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο υποψήφιος a έχει $\mathrm{defc}(a, \bar{R}) > 0$. Έστω e_a^i είναι 1 αν ο ψηφοφόρος i κατατάσσει τον υποψήφιο a πάνω από τον a^* στο R και κάτω από αυτόν στο $\bar{R}$, αλλιώς το e_a^i είναι 0. Στη συνέχεια, μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι $\mathrm{defc}(a, R) = \mathrm{defc}(a, \bar{R}) + \sum_{i \in N} e_a^i > 0$. Ως εκ τούτου, από την αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων στο $\mathcal{S}^i(\bar{R})$ και των συνόλων $\mathcal{S}^{i,1}(R)$, προκύπτει ότι για κάθε σύνολο $S \in \mathcal{S}^i(\bar{R})$ που περιέχει τον a, το αντίστοιχο σύνολο του στο $\mathcal{S}^{i,1}(R)$ περιέχει επίσης τον a. Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση και τον ορισμό της λύσης $\bar{x}$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{S}^i(\bar{R}) : a \in S} \bar{x}_S &= \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{S}^{i,1}(R) : a \in S} x_S \\ &= \sum_{i \in N} \left(\sum_{S \in \mathcal{S}^i(R) : a \in S} x_S - \sum_{S \in \mathcal{S}^{i,2}(R) : a \in S} x_S \right). \end{aligned}$$

Έστω $\alpha = \sum_{S \in \mathcal{S}^{i,2}(R) : a \in S} x_S$. Παρατηρούμε ότι αν $e_a^i = 0$, τότε κανένα σύνολο $S \in \mathcal{S}^{i,2}(R)$ δεν περιέχει τον a, έτσι $\alpha = 0$. Διαφορετικά, αν $e_a^i = 1$, τότε ο δεύτερος περιορισμός του γραμμικού προγράμματος σημαίνει ότι $\alpha \leq 1$. Με άλλα λόγια, σε κάθε περίπτωση, το α άνω-οριοθετείται από e_a^i. Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση και, επιπλέον, το γεγονός ότι $\mathrm{defc}(a, R) = \mathrm{defc}(a, \bar{R}) + \sum_{i \in N} e_a^i$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{S}^i(\bar{R}) : a \in S} \bar{x}_S \geq \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{S}^i(R) : a \in S} x_S - \sum_{i \in N} e_a^i \geq \mathrm{defc}(a, R) - \sum_{i \in N} e_a^i = \mathrm{defc}(a, \bar{R}),$$

όπως και επιθυμούμε.

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι η αποτιμητική συνάρτηση του $\bar{R}$ φράσσεται εκ των άνω από την αποτιμητική συνάρτηση του R. Πράγματι, ο συντελεστής για κάθε $\bar{x}$-μεταβλητή στην αποτιμητική συνάρτηση του $\bar{R}$ είναι το πολύ ίσος με τον συντελεστή της x μεταβλητής του αντίστοιχου συνόλου στο $\mathcal{S}^{i,1}(R)$ στο R, δηλαδή, η μεταβλητή $\bar{x}_{S^i_k(\bar{R})}$ πολλαπλασιάζεται με k στην αποτιμητική συνάρτηση του $\bar{R}$, ενώ η μεταβλητή $x_{S^i_{k+r^i(R)-r^i(\bar{R})}(R)}$ πολλαπλασιάζεται με $k + r^i(R) - r^i(\bar{R}) \geq k$ στο R. $\square$

Σε αντίθεση, ας εξετάσουμε τώρα τον άπληστο αλγόριθμο. Σχεδιάζουμε ένα προφίλ προτίμησης και μια μετακίνηση του a^* και δείχνουμε ότι ο αλγόριθμος δεν είναι μονότονος ως προς τον βαθμό. Οι ψηφοφόροι 1 έως 6 ψηφίζουν σύμφωνα με το προφίλ R^N που δίνεται στο σχήμα 2.2(α′). Οι θέσεις που χαρακτηρίζονται από «.» είναι οι υπόλοιποι υποψήφιοι, σε κάποια αυθαίρετη σειρά. Έστω $A' = \{a_1, \ldots, a_4\}$ και $A'' = \{b_1, \ldots, b_{17}\}$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{defc}(a) = 1$ για όλα τα $a \in A'$ και $\mathrm{defc}(b) = 0$ για όλα τα $b \in A''$. Η βέλτιστη αλληλουχία των ανταλλαγών μετακινεί τον a^* όλη τη διαδρομή προς την κορυφή των προτιμήσεων του ψηφοφόρου 2, με κόστος επτά. Ο άπληστος αλγόριθμος, δεδομένου αυτού του προφίλ προτίμησης, επιλέγει πράγματι αυτή τη σειρά.

$\succ_1$	$\succ_2$	$\succ_3$	$\succ_4$	$\succ_5$	$\succ_6$
a_4	a_4	a_4	a_3	a_2	a_1
a_3	a_3	b_4	b_9	b_{13}	b_{16}
a_2	a_2	b_5	b_{10}	b_{14}	b_{17}
a_1	a_1	b_6	b_{11}	b_{15}	a^*
.	b_1	b_7	b_{12}	a^*	.
.	b_2	b_8	a^*	.	.
.	b_3	a^*	.	.	.
.	a^*	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
a^*	.	.	.	.	.

(α′) Κανονικό Προφίλ.

$\succ_1$	$\succ_2$	$\succ'_3$	$\succ'_4$	$\succ'_5$	$\succ'_6$
a_4	a_4	a_4	a_3	a_2	a_1
a_3	a_3	b_4	b_9	b_{13}	a^*
a_2	a_2	b_5	b_{10}	a^*	b_{16}
a_1	a_1	b_6	a^*	b_{14}	b_{17}
.	b_1	a^*	b_{11}	b_{15}	.
.	b_2	b_7	b_{12}	.	.
.	b_3	b_8	.	.	.
.	a^*	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
a^*	.	.	.	.	.

(β′) Βελτίωση του a^*.

Σχήμα 2.2: Ο κανόνας ψηφοφορίας που αντιστοιχεί στο άπληστο αλγόριθμο δεν είναι μονότονος ως προς τον βαθμό: ένα παράδειγμα.

Από την άλλη πλευρά, θεωρούμε το προφίλ $(\succ_1, \succ_2, \succ'_3, \succ'_4, \succ'_5, \succ'_6)$ που δίνεται στο Σχήμα 2.2(β′) (όπου η θέση του a^* βελτιώθηκε κατά δύο θέσεις στις προτιμήσεις των ψηφοφόρων 3 έως 6). Βλέπουμε ότι τα ελλείμματα δεν έχουν αλλάξει σε σχέση με το προφίλ του R^N. Ο άπληστος αλγόριθμος θα μπορούσε στην πραγματικότητα να μετακινήσει τον a^* στην κορυφή των προτιμήσεων των ψηφοφόρων 6, 5, 4 και 3 (με αυτή τη σειρά), με συνολικό κόστος δέκα. Σημειώνουμε ότι η βέλτιστη λύση εξακολουθεί να έχει ένα κόστος επτά. Εν κατακλείδι, ο άπληστος αλγόριθμος δεν είναι μονότονος ως προς τον βαθμό, ενώ ο αλγόριθμος που βασίζεται στο γραμμικό πρόγραμμα είναι.

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η ακόλουθη ισχυρότερη έννοια της μονοτονίας θεωρείται συχνά στη βιβλιογραφία: μετακινώντας ένα νικηφόρο υποψήφιο στις προτιμήσεις των ψηφοφόρων δεν μπορεί να τον βλάψει, δηλαδή, δεν μπορεί να τον κάνει να χάσει τις εκλογές. Λέμε ότι ένας κανόνας ψηφοφορίας που ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα είναι *μονότονος*. Είναι ενδιαφέρον, ότι ο Dodgson δεν είναι μονότονος [20, 62], γεγονός που θεωρείται από πολλούς ένα σοβαρό ελάττωμα. Ωστόσο, αυτό δεν αποκλείει την ύπαρξη ενός αλγορίθμου προσέγγισης για το βαθμό Dodgson που είναι μονότονος ως κανόνας ψηφοφορίας. Επιπλέον, υπάρχουν άλλες εξέχουσες ιδιότητες κοινωνικής επιλογής που συχνά εξετάζονται, π.χ., η ομοιογένεια: ένας κανόνας ψηφοφορίας λέγεται ότι είναι ομοιογενής εάν διπλασιάζοντας και αντιγράφοντας το εκλογικό σώμα δεν αλλάζει το αποτέλεσμα των εκλογών. Θα ασχοληθούμε με την ιδιότητα της ομοιογένειας και σε επόμενο κεφάλαιο αναλυτικότερα.

2.5 Κάτω φράγματα για τον κανόνα του Dodgson

Ο McCabe-Dansted [89] δίνει μια πολυωνυμικού χρόνου αναγωγή από το πρόβλημα του ελάχιστου κυρίαρχου συνόλου (Minimum Dominating Set) στο πρόβλημα του βαθμού Dodgson με την ακόλουθη ιδιότητα: δεδομένου ενός γραφήματος G με k κορυφές, η αναγωγή δημιουργεί ένα προφίλ προτίμησης με $n = \Theta(k)$ ψηφοφόρους και $m = \Theta(k^4)$ υποψηφίους, έτσι ώστε το μέγεθος του ελάχιστου κυρίαρχου συνόλου G είναι $\lfloor k^{-2}\mathrm{sc}_D(a^*)\rfloor$, όπου $\mathrm{sc}_D(a^*)$ είναι ο βαθμός Dodgson ενός διακεκριμένου υποψηφίου $a^* \in A$. Παρατηρούμε ότι εφόσον το πρόβλημα ελάχιστου κυρίαρχου συνόλου είναι γνωστό ότι είναι υπολογιστικά δύσκολο να προσεγγιστεί υπό λογαριθμικούς παράγοντες [109], προκύπτει ότι το πρόβλημα του βαθμού Dodgson είναι επίσης δύσκολο να προσεγγιστεί σε ένα παράγοντα του $\Omega(\log m)$. Λόγω της σχέσης μεταξύ του ελάχιστου κυρίαρχου συνόλου και του προβλήματος ελάχιστης επικάλυψης συνόλων, χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα μη-προσεγγισιμότητας του Feige [60], το φράγμα μη-προσεγγισιμότητας μπορεί να γίνει $\left(\frac{1}{4} - \epsilon\right) \ln m$, με την παραδοχή ότι προβλήματα στο $\mathcal{NP}$ δεν έχουν ψευδο-πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμους. Αυτό σημαίνει ότι οι αλγόριθμοι μας είναι ασυμπτωτικά βέλτιστοι.

2.5.1 Μη-προσεγγισιμότητα του βαθμού Dodgson

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε μια εναλλακτική και πιο φυσική αναγωγή απευθείας από το πρόβλημα ελάχιστης επικάλυψης συνόλων που μας επιτρέπει να αποκτήσουμε ένα καλύτερο φράγμα μη-προσεγγισιμότητας. Αυτό το φράγμα σημαίνει ότι ο άπληστος αλγόριθμός μας είναι βέλτιστος μέχρι ένα συντελεστή 2.

Θεώρημα 2.5.1. *Υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο ώστε να είναι υπολογιστικά δύσκολο να προσεγγίσουμε το πρόβλημα του βαθμού Dodgson ενός δεδομένου υποψηφίου σε μια εκλογή με m υποψηφίους μέσα σε ένα παράγοντα $\beta \ln m$. Επιπλέον, για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, δεν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου $\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \ln m$-προσέγγιση για το βαθμό Dodgson ενός δεδομένου υποψηφίου εκτός εάν όλα τα προ-*

βλήματα στο $\mathcal{NP}$ έχουν αλγόριθμους που τρέχουν σε χρόνο $k^{O(\log \log k)}$, όπου k είναι το μέγεθος εισόδου.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε μια αναγωγή από το πρόβλημα ελάχιστης επικάλυψης συνόλων (που ορίζεται επισήμως παρακάτω, όταν παρουσιάζουμε την αναγωγή μας) και τα ακόλουθα γνωστά αποτελέσματα μη-προσεγγισιμότητας.

Θεώρημα 2.5.2 (Raz και Safra [109]). *Υπάρχει μια σταθερά $\alpha > 0$ τέτοια ώστε, δεδομένου ενός στιγμιότυπου $(U, \mathcal{S})$ του προβλήματος ελαχιστοποίησης επικάλυψης συνόλων με $|U| = n$ και ένα ακέραιο $K \leq n$, είναι υπολογιστικά δύσκολο να ξεχωρίσουμε μεταξύ των δυο ακόλουθων καταστάσεων.*

- *Το $(U, \mathcal{S})$ έχει μια επικάλυψη μεγέθους το πολύ K.*
- *Οποιαδήποτε επικάλυψη του $(U, \mathcal{S})$ έχει μέγεθος τουλάχιστον $\alpha K \ln n$.*

Θεώρημα 2.5.3 (Feige [60]). *Για οποιαδήποτε σταθερά $\epsilon > 0$, δεδομένου ενός στιγμιότυπου $(U, \mathcal{S})$ του προβλήματος ελαχιστοποίησης επικάλυψης συνόλων με $|U| = n$ και ένα ακέραιο $K \leq n$, δεν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να ξεχωρίζει μεταξύ των δυο ακόλουθων καταστάσεων.*

- *Το $(U, \mathcal{S})$ έχει μια επικάλυψη μεγέθους το πολύ K.*
- *Οποιαδήποτε επικάλυψη του $(U, \mathcal{S})$ έχει μέγεθος τουλάχιστον $(1 - \epsilon)K \ln n$.*

εκτός εάν $NP \subseteq DTIME(n^{O(\log \log n)})$.

Τα γνωστά αποτέλεσμα μη-προσεγγισιμότητας για τα προβλήματα που χρησιμοποιούμε στις αποδείξεις μας κατανοούνται καλύτερα εξετάζοντας τη σχέση τους με ένα γενικό υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα, όπως η Ικανοποιησιμότητα ([122], κεφάλαιο 29). Για παράδειγμα, το Θεώρημα 2.5.2 δηλώνει ουσιαστικά ότι υπάρχει αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου η οποία, όταν έχει για είσοδο ένα στιγμιότυπο ϕ της Ικανοποιησιμότητας, κατασκευάζει ένα στιγμιότυπο $(U, \mathcal{S})$ της ελάχιστης επικάλυψης συνόλων με τις ακόλουθες ιδιότητες: αν το ϕ είναι ικανοποιήσιμο, τότε το $(U, \mathcal{S})$ έχει κάλυψη μεγέθους το πολύ K, και αν το ϕ δεν είναι ικανοποιήσιμο, οποιαδήποτε κάλυψη του $(U, \mathcal{S})$ έχει μέγεθος τουλάχιστον $\alpha K \ln n$. Η αναγωγή αυτή σημαίνει ότι είναι υπολογιστικά δύσκολο να προσεγγιστεί το πρόβλημα ελάχιστης επικάλυψης συνόλων μέσα σε έναν παράγοντα $\alpha \ln n$. Η ερμηνεία των υπόλοιπων αποτελεσμάτων μη-προσεγγισιμότητας που χρησιμοποιούνται ή αποδεικνύονται στην διατριβή είναι παρόμοια.

Δεδομένου ενός στιγμιότυπου του προβλήματος ελαχιστοποίησης επικάλυψης συνόλων αποτελούμενο από ένα σύνολο των n στοιχείων, μια συλλογή από σύνολα πάνω σε αυτά τα στοιχεία και ένα ακέραιο $K \leq n$, κατασκευάζουμε το ακόλουθο προφίλ εκλογής με $m = (1 + \zeta)n + \lceil \alpha \zeta K n \ln n \rceil + 1$ υποψηφίους και έναν ειδικό υποψήφιο a^* στο οποίο δείχνουμε ότι αν μπορούμε να ξεχωρίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο μεταξύ των παρακάτω δυο περιπτώσεων:

- Ο a^* έχει βαθμό Dodgson το πολύ $(1+\zeta)Kn$, και

- Ο a^* έχει βαθμό Dodgson τουλάχιστον $\alpha\zeta Kn \ln n$,

τότε θα μπορούσαμε να ξεχωρίσουμε μεταξύ των δυο καταστάσεων των Θεωρημάτων 2.5.2 και 2.5.3 για το αυθεντικό στιγμιότυπο ελάχιστης επικάλυψης συνόλων, αντικρούοντας τις παραπάνω προτάσεις μη-προσεγγισιμότητας.

Εδώ το α είναι η σταθερά μη-προσεγγισιμότητας στα Θεωρήματα 2.5.2 ή 2.5.3 (στο τελευταίο $\alpha = 1 - \epsilon$), και το ζ είναι μια αυθαίρετη μεγάλη θετική σταθερά. Με τον τρόπο αυτό, παίρνουμε ένα φράγμα μη-προσεγγισιμότητας της τάξεως του $\frac{\alpha\zeta}{1+\zeta}\ln n$. Εφόσον $m = (1+\zeta)n + \lceil \alpha\zeta Kn \ln n \rceil + 1$, ισχύει ότι $\ln n \geq \frac{1}{2}\ln m - \mathcal{O}(\ln \ln m)$, και ως εκ τούτου το φράγμα μη-προσεγγισιμότητας για το βαθμό Dodgson μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με τον αριθμό των υποψηφίων m, όπως αναφέρεται στο Θεώρημα 2.5.1.

Θα παρουσιάσουμε τώρα την αναγωγή μας. Δεδομένου ενός στιγμιότυπου $(U, \mathcal{S})$ του προβλήματος ελαχιστοποίησης επικάλυψης συνόλων αποτελούμενο από ένα σύνολο U των n στοιχείων, μια συλλογή $\mathcal{S}$ από σύνολα $S_1, S_2, \ldots, S_{|\mathcal{S}|}$ και ένα ακέραιο $K \leq n$, κατασκευάζουμε το ακόλουθο προφίλ προτίμησης. Υπάρχουν οι ακόλουθοι υποψήφιοι:

- Ένα σύνολο από n βασικούς υποψήφιους που ο καθένας τους αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του U. Κάνοντας κατάχρηση της σημειογραφίας, καλούμε επίσης αυτό το σύνολο U.

- Ένα σύνολο Z από ζn υποψηφίους όπου ζ είναι μια θετική σταθερά.

- Ένα σύνολο F από $\lceil \alpha\zeta Kn \ln n \rceil$ υποψηφίους, όπου α είναι η σταθερά του Θεωρήματος 2.5.2.

- Ένας συγκεκριμένος υποψήφιος a^*.

Υπάρχουν οι ακόλουθοι $2|\mathcal{S}| + 1$ ψηφοφόροι:

- Ένας κρίσιμος ψηφοφόρος ℓ_i για κάθε σύνολο $S_i \in \mathcal{S}$.

- Ένας αδιάφορος ψηφοφόρος r_i για κάθε σύνολο $S_i \in \mathcal{S}$.

- Ένας ειδικός ψηφοφόρος v^*.

Οι προτιμήσεις των ψηφοφόρων ορίζονται ακολούθως:

- Ο ειδικός ψηφοφόρος v^* κατατάσσει τον a^* στην πρώτη θέση της προτίμησής του και οι υπόλοιποι υποψήφιοι καταλαμβάνουν τις υπόλοιπες θέσεις με τυχαία σειρά, δηλαδή, $a^* \succ_{v^*} (U \cup Z \cup F)$.

- Ο κρίσιμος ψηφοφόρος ℓ_i κατατάσσει τους βασικούς υποψηφίους που αντιστοιχούν στα στοιχεία του S_i στις πρώτες θέσεις προτίμησής του (σε τυχαία σειρά), μετά κατατάσσει τους υποψηφίους του Z, έπειτα τον a^*, ακολούθως τους υποψηφίους του F, και στις τελευταίες θέσεις προτίμησής του κατατάσσει τους βασικούς υποψηφίους που αντιστοιχούν στα στοιχεία του $U \backslash S_i$, δηλαδή, $S_i \succ_{\ell_i} Z \succ_{\ell_i} a^* \succ_{\ell_i} F \succ_{\ell_i} (U \backslash S_i)$.

- Κατασκευάζουμε την κατάταξη των αδιάφορων ψηφοφόρων ως εξής: Αρχικοποιούμε τα $S'_1, S'_2, \ldots, S'_{|\mathcal{S}|}$ ως $S'_1 \leftarrow S_1, S'_2 \leftarrow S_2, \ldots, S'_{|\mathcal{S}|} \leftarrow S_{|\mathcal{S}|}$. Για κάθε στοιχείο u του U, επιλέγουμε τυχαία $j \in \{1, 2, \ldots, |\mathcal{S}|\}$ τέτοιο ώστε $u \in S'_j$ και σύνολο $S'_j \leftarrow S'_j \setminus \{u\}$. Ορίζουμε ως $\mathcal{S}'$ τη συλλογή $S'_1, S'_2, \ldots, S'_{|\mathcal{S}|}$ που προκύπτει εφόσον κάθε $u \in U$ έχει επεξεργαστεί με αυτόν τον τρόπο. Ο αδιάφορος ψηφοφόρος r_i κατατάσσει τους βασικούς υποψηφίους που αντιστοιχούν στα στοιχεία του $U \setminus S'_i$ στις πρώτες θέσεις της προτίμησης του, μετά κατατάσσει τους υποψηφίους του F, έπειτα τον a^*, ακολούθως τους υποψηφίους του Z και στις τελευταίες θέσεις της προτίμησής του κατατάσσει τους βασικούς υποψήφιους που αντιστοιχούν στα στοιχεία στο S'_i (αν υπάρχουν)—δηλαδή, $(U \setminus S'_i) \succ_{r_i} F \succ_{r_i} a^* \succ_{r_i} Z \succ_{r_i} S'_i$.

Είναι φανερό ότι ο a^* προτιμάται σε σύγκριση με οποιονδήποτε υποψήφιο του Z από τον ειδικό ψηφοφόρο και από τους $|\mathcal{S}|$ αδιάφορους ψηφοφόρους, δηλαδή από την πλειοψηφία των ψηφοφόρων. Παρομοίως, ο a^* προτιμάται σε σύγκριση με οποιονδήποτε υποψήφιο του F από τον ειδικό ψηφοφόρο και από τους $|\mathcal{S}|$ κρίσιμους ψηφοφόρους. Τώρα, έστω λοιπόν για κάθε στοιχείο του U, ορίζουμε ως f_u τον αριθμό των συνόλων του $\mathcal{S}$ που περιέχουν τον u. Τότε, ο a^* προτιμάται σε σχέση με τον βασικό υποψήφιο που αντιστοιχεί στο u από τον ειδικό ψηφοφόρο, από τους $|\mathcal{S}| - f_u$ κρίσιμους ψηφοφόρους που αντιστοιχούν στα σύνολα του $\mathcal{S}$ που δεν περιέχουν τον u, και από τους $f_u - 1$ αδιάφορους ψηφοφόρους που αντιστοιχούν στα σύνολα του $\mathcal{S}'$ που περιέχουν τον u (π.χ., από $|\mathcal{S}|$ ψηφοφόρους συνολικά). Συνεπώς, ο a^* έχει έλλειμμα ακριβώς 1 σε σχέση με κάθε υποψήφιο του U.

Το Θεώρημα 2.5.1 προκύπτει από τα επόμενα δύο λήμματα που δίνουν φράγματα για το βαθμό Dodgson του a^* στις δυο περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν: όταν ο $(U, \mathcal{S})$ έχει μια επικάλυψη μεγέθους το πολύ K (Λήμμα 2.5.4) και όταν οποιαδήποτε επικάλυψη του $(U, \mathcal{S})$ έχει μέγεθος τουλάχιστον $\alpha K \ln n$ (Λήμμα 2.5.5).

Λήμμα 2.5.4. *Αν ο $(U, \mathcal{S})$ έχει μια επικάλυψη μεγέθους K, τότε ο a^* έχει βαθμό Dodgson το πολύ $(1 + \zeta)Kn$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $H \subseteq \mathcal{S}$ είναι μια επικάλυψη για το $(U, \mathcal{S})$ με $|H| = K$. Από τον ορισμό της επικάλυψης, ο H καλύπτει όλα τα στοιχεία του U. Έτσι, ανεβάζοντας τον a^* στην πρώτη θέση προτίμησης του κρίσιμου ψηφοφόρου ℓ_i έτσι ώστε $S_i \in H$, ο a^* θα νικήσει καθέναν από τους βασικούς υποψήφιους τουλάχιστον ακόμη μια φορά και θα γίνει νικητής Condorcet. Ο συνολικός αριθμός θέσεων που ανεβαίνει ο a^* είναι το πολύ $|H| \cdot (|Z| + n) = (1 + \zeta)nK$. □

Λήμμα 2.5.5. *Αν οποιαδήποτε επικάλυψη στο $(U, \mathcal{S})$ έχει μέγεθος τουλάχιστον $\alpha K \ln n$, τότε ο a^* έχει βαθμό Dodgson τουλάχιστον $\alpha \zeta K n \ln n$.*

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι ο ελάχιστος αριθμός θέσεων που πρέπει να ανέβει ο a^* προκειμένου να κερδίσει όλους τους βασικούς υποψήφιους και να γίνει νικητής Condorcet είναι $|F|$ θέσεις σε κάποιον αδιάφορο ψηφοφόρο r_i. Δηλαδή, ο a^* ανεβαίνει $|F|$ θέσεις στην προτίμηση του r_i έτσι ώστε να φτάσει στη θέση $|U \backslash S'_i|+1$, και τουλάχιστον n επιπλέον θέσεις έτσι ώστε να κερδίσει τους βασικούς υποψηφίους. Έτσι ο βαθμός Dodgson του είναι τουλάχιστον $|F|+n \geq \alpha\zeta K n \ln n$.

Τώρα, υποθέτουμε ότι ο ελάχιστος αριθμός θέσεων που πρέπει να ανέβει ο a^* ώστε να κερδίσει τους βασικούς υποψήφιους δεν περιλαμβάνει το να ανεβάσουμε τον a^* τουλάχιστον $|F|$ θέσεις σε κάποιο αδιάφορο ψηφοφόρο. Θα δείξουμε ότι αν ο βαθμός Dodgson του a^* είναι μικρότερος από $\alpha\zeta K n \ln n$, τότε υπάρχει μια επικάλυψη του $(U, \mathcal{S})$ μεγέθους μικρότερο από $\alpha K \ln n$, που έρχεται όμως σε αντίθεση με την υπόθεση του λήμματος.

Έστω ότι H είναι το σύνολο των κρίσιμων ψηφοφόρων όπου ο a^* ανεβαίνει τουλάχιστον $|Z|$ θέσεις προκειμένου να κερδίσει όλους τους βασικούς υποψηφίους τουλάχιστον μια φορά ακόμη. Συνολικά, ο a^* ανεβαίνει $|H|\cdot|Z|$ θέσεις για να φτάσει στην $|S_i|+1$ θέση σε κάθε κρίσιμο ψηφοφόρο ℓ_i που ανήκει στο H, και τουλάχιστον n επιπλέον θέσεις για να νικήσει όλους τους βασικούς υποψηφίους τουλάχιστον ακόμη μια φορά, π.χ., τουλάχιστον $\zeta|H|n+n$ θέσεις συνολικά. Έτσι, ορίζοντας το βαθμό Dodgson του a^* ως $sc_D(a^*)$, έχουμε $|H| \leq \frac{1}{\zeta n} sc_D(a^*) - \frac{1}{\zeta} < \alpha K \ln n$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται παρατηρώντας ότι η ένωση των συνόλων S_i για κάθε κρίσιμο ψηφοφόρο ℓ_i που ανήκει στο H περιέχει όλους τους βασικούς υποψηφίους, π.χ., το H αντιστοιχεί σε μια επικάλυψη για το $(U, \mathcal{S})$ μεγέθους μικρότερο από $\alpha K \ln n$. □

Ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1 □

2.5.2 Μη-προσεγγισιμότητα της κατάταξης κατά Dodgson

Μια ερώτηση σχετικά με την προσεγγισιμότητα του βαθμού Dodgson αφορά την προσεγγισιμότητα της κατάταξης Dodgson, δηλαδή, την κατάταξη των υποψηφίων σύμφωνα με μη-φθίνουσα Dodgson βαθμολόγηση. Από όσο γνωρίζουμε, καμία συνάρτηση κατάταξης συνόλων, η οποία αντιστοιχεί προφίλ προτίμησης με τις κατατάξεις των υποψηφίων, δεν είναι γνωστή ότι αποδεδειγμένα παράγει κατατάξεις που βρίσκονται κοντά στην κατάταξη Dodgson [107, 108, 76, 77, 78].

Το επόμενό μας αποτέλεσμα καθορίζει ότι οι αποδοτικοί αλγόριθμοι προσέγγισης για την κατάταξη Dodgson είναι απίθανο να υπάρξουν εκτός αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Αυτό επιτυγχάνεται με την απόδειξη ότι το πρόβλημα της διάκρισης μεταξύ του αν ένας δεδομένος υποψήφιος είναι ο μοναδικός νικητής Dodgson ή στις τελευταίες $O(\sqrt{m})$ θέσεις είναι υπολογιστικά δύσκολο. Το αποτέλεσμα αυτό παρέχει μια εξήγηση σύμφωνα με τη θεωρία της πολυπλοκότητας για τις απότομες διαφορές που παρατηρούνται στη βιβλιογραφία της θεωρίας της κοινωνικής επιλογής κατά τη σύγκριση εκλογών Dodgson με απλούστερους, και αποτελεσματικά υπολογίσιμους, κανόνες ψηφοφορίας.

Θεώρημα 2.5.6. *Δεδομένου ενός προφίλ προτίμησης με m υποψηφίους και έναν δεδομένο υποψήφιο a^*, είναι υπολογιστικά δύσκολο να αποφασίσουμε αν ο a^* είναι νικητής κατά Dodgson ή έχει* *θέση τουλάχιστον $m - 6\sqrt{m}$ σε οποιαδήποτε κατάταξη κατά Dodgson.*

Απόδειξη. Η απόδειξή μας βασίζεται στη μη-προσεγγισιμότητα του προβλήματος ελαχιστοποίησης επικάλυψης κορυφών σε 3-κανονικά γραφήματα [9]. Συγκεκριμένα, η αναγωγή μας χρησιμοποιεί την ακόλουθη πολύ απλή παραλλαγή ενός αποτελέσματος μη-προσεγγισιμότητας που παρουσιάζεται στο [9]. Η προσέγγιση μας είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1, αλλά λίγο πιο τεχνική.

Θεώρημα 2.5.7 (Berman και Karpinski [9], [73]). *Δεδομένου ενός 3-κανονικού γραφήματος G με $n = 22t$ κόμβους για κάποιο ακέραιο $t > 0$ και έναν ακέραιο K που ανήκει στο $[n/2, n-6]$, είναι υπολογιστικά δύσκολο να διαχωρίσουμε μεταξύ των δυο περιπτώσεων:*

- *Το G έχει μια επικάλυψη κορυφών μεγέθους το πολύ K.*
- *Οποιαδήποτε επικάλυψη κορυφών του G έχει μέγεθος τουλάχιστον $K + 6$.*

Δεδομένου ενός στιγμιότυπου του προβλήματος ελαχιστοποίησης επικάλυψης κορυφών που αποτελείται από ένα 3-κανονικό γράφημα G με $n = 22t$ κόμβους $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ και ένα ακέραιο $K \in [n/2, n-6]$, κατασκευάζουμε σε πολυωνυμικό χρόνο ένα προφίλ μιας εκλογής Dodgson στο οποίο αν μπορούσαμε να ξεχωρίσουμε αν ένας συγκεκριμένος υποψήφιος είναι νικητής Dodgson ή όχι πολύ μακριά από την τελευταία θέση σε οποιαδήποτε κατάταξη Dodgson, τότε θα μπορούσαμε επίσης να ξεχωρίσουμε μεταξύ των δύο περιπτώσεων που αναφέρονται στο Θεώρημα 2.5.7 για το κανονικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης επικάλυψης κορυφών (βλέπε σελίδα 53 για ένα παράδειγμα της κατασκευής). Η εκλογή Dodgson έχει τα ακόλουθα σύνολα από υποψηφίους.

- Ένας ειδικός υποψήφιος a^*.
- Ένα σύνολο F από $4Kn/11 + 3n/2$ υποψηφίους. Αυτοί οι υποψήφιοι διαχωρίζονται σε n ξεχωριστά τμήματα F_0, F_1, ..., F_{n-1} έτσι ώστε κάθε τμήμα περιέχει είτε $\lceil 4K/11 + 3/2 \rceil$ ή $\lfloor 4K/11 + 3/2 \rfloor$ υποψηφίους.
- Ένα σύνολο A των n υποψηφίων $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.
- Ένας υποψήφιος u_j για κάθε ακμή e_j του G. Έστω U το σύνολο αυτών των $3n/2$ υποψηφίων. Ορίζουμε ως S_i το σύνολο των τριών υποψηφίων του U που αντιστοιχούν στις ακμές του G που είναι γειτονικές στο κόμβο v_i.

Για κάθε κόμβο v_i του G, υπάρχουν δύο ψηφοφόροι: ένας αριστερός ℓ_i και ένας δεξιός r_i. Η προτίμηση του αριστερού ψηφοφόρου ℓ_i είναι η ακόλουθη:

- Οι τρεις υποψήφιοι του S_i κατατάσσονται από τον ψηφοφόρο ℓ_i στις τρεις πρώτες θέσεις της προτίμησης του (σε τυχαία σειρά).

- Από τη θέση 4 μέχρι τη θέση $4n/11 + 3$, ο ℓ_i κατατάσσει τους υποψηφίους $a_i, a_{(i+1) \bmod n}, \ldots, a_{(i+4n/11-1) \bmod n}$ με αυτή τη σειρά.

- Στη θέση $4n/11 + 4$, ο ℓ_i κατατάσσει τον a^*.

- Από τη θέση $4n/11 + 5$ ως τη θέση $4Kn/11 + 41n/22 + 4$, ο ℓ_i κατατάσσει τους υποψηφίους του F με την ακόλουθη σειρά: Οι υποψήφιοι του F_i κατατάσσονται στις θέσεις από $4n/11+5$ έως $4n/11+4+|F_i|$ (σε τυχαία σειρά). Μετά, ο ℓ_i κατατάσσει τους υποψηφίους των συνόλων $F_0, \ldots, F_{i-1}, F_{i+1}, \ldots, F_{n-1}$ με αυτή τη σειρά (η σχετική σειρά των υποψηφίων του ίδιου τμήματος είναι τυχαία).

- Από τη θέση $4Kn/11 + 41n/22 + 5$ ως τη θέση $4Kn/11 + 5n/2 + 4$, ο ℓ_i κατατάσσει τους υποψηφίους $a_{(i+4n/11) \bmod n}, a_{(i+4n/11+1) \bmod n}, \ldots, a_{(i-1) \bmod m}$ με αυτή τη σειρά.

- Στις τελευταίες $3n/2 - 3$ θέσεις, ο ℓ_i κατατάσσει τους υποψηφίους του $U \setminus S_i$ (σε τυχαία σειρά).

Η προτίμηση του δεξιού ψηφοφόρου r_i είναι η ακόλουθη:

- Στις πρώτες $3n/2-3$ θέσεις, ο r_i κατατάσσει τους υποψηφίους του $U \setminus S_i$ σε αντίθετη σχετική σειρά σε σχέση με την κατάταξη του ℓ_i.

- Από τη θέση $3n/2 - 2$ ως τη θέση $4Kn/11 + 3n - |F_i| - 3$, ο r_i κατατάσσει τους υποψηφίους των τμημάτων $F_{n-1}, F_{n-2}, \ldots, F_{i+1}, F_{i-1}, \ldots, F_0$ με αυτή τη σειρά έτσι ώστε οι υποψήφιοι του τμήματος F_j κατατάσσονται σε αντίθετη σχετική σειρά με την κατάταξη του ℓ_i.

- Από τη θέση $4Kn/11+3n-|F_i|-2$ ως τη θέση $4Kn/11+40n/11-|F_i|-5$, ο r_i κατατάσσει τους υποψηφίους $a_{(n-i-1) \bmod n}, a_{(n-i-2) \bmod n}, \ldots, a_{(4n/11-i+2) \bmod n}$ με αυτή τη σειρά.

- Στη θέση $4Kn/11 + 40n/11 - |F_i| - 4$, ο r_i κατατάσσει τον a^*.

- Από τη θέση $4Kn/11+40n/11-|F_i|-3$ ως τη θέση $4Kn/11+40n/11-4$, ο r_i κατατάσσει τους υποψηφίους του F_i σε αντίθετη σχετική σειρά με την κατάταξη του ℓ_i.

- Από τη θέση $4Kn/11 + 40n/11 - 3$ ως τη θέση $4Kn/11 + 4n - 2$, ο r_i κατατάσσει τους υποψηφίους $a_{(4n/11-i+1) \bmod n}$, $a_{(4n/11-i) \bmod n}$, …, $a_{(n-i) \bmod n}$ με αυτή τη σειρά.

- Οι τρεις υποψήφιοι του S_i κατατάσσονται στις τρεις τελευταίες θέσεις του ψηφοφόρου r_i, σε αντίθετη σχετική σειρά με την κατάταξη του ℓ_i.

Παρατηρούμε ότι ο a^* κερδίζει όλους τους υποψηφίους εκτός από τους υποψηφίους του U. Πιο συγκεκριμένα, ο a^* προτιμάται σε σχέση με κάθε υποψήφιο του F σε $n + 1$ ψηφοφόρους. Πράγματι, ο a^* νικά ένα υποψήφιο που ανήκει στο τμήμα F_i στους n αριστερούς ψηφοφόρους και στον δεξιό r_i. Επίσης, ο υποψήφιος a_i είναι κάτω από τον a^* στους $7n/11$ αριστερούς ψηφοφόρους $\ell_{(i+1) \bmod n}, \ell_{(i+2) \bmod n}, \ldots, \ell_{(i+7n/11-1) \bmod n}$ και στους $4n/11 + 2$ δεξιούς ψηφοφόρους $r_{(i+7n/11-1) \bmod m}, r_{(i+7n/11) \bmod n}, \ldots, r_i$. Έτσι, ο a^* κερδίζει όλους τους υποψηφίους του συνόλου A αφού νικά καθένα από αυτούς σε $n+2$ ψηφοφόρους. Επίσης, ο a^* νικά τον υποψήφιο u_j που αντιστοιχεί στην ακμή e_j του G στους αριστερούς ψηφοφόρους ℓ_i και $\ell_{i'}$ και όλους τους δεξιούς εκτός από τους r_i και $r_{i'}$ έτσι ώστε οι κόμβοι v_i και $v_{i'}$ να είναι οι άκρες της ακμής e_j στο G. Έτσι, ο a^* έχει έλλειμμα 1 και για να γίνει νικητής Condorcet, πρέπει να ανέβει κάποιες θέσεις στις προτιμήσεις κάποιων ψηφοφόρων έτσι ώστε να νικήσει καθένα από τους υποψήφιους στο U τουλάχιστον ακόμη μια φορά.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι υποψήφιοι του F κερδίζουν κάθε υποψήφιο στο A. Παρατηρούμε ότι όταν ο a^* προτιμάται σε σχέση με ένα υποψήφιο στο A εκτός από τον δεξιό ψηφοφόρο r_i, ένας υποψήφιος του τμήματος F_i επίσης προτιμάται σε σχέση με τον υποψήφιο στο A. Έτσι, κάθε υποψήφιος του F κερδίζει κάθε υποψήφιο του A εφόσον τον νικά σε $n+1$ ψηφοφόρους. Επιπλέον, όμοια με τον a^*, κάθε υποψήφιος στο F προτιμάται σε σχέση με κάθε υποψήφιο του U σε n ψηφοφόρους. Επίσης, όταν ένας υποψήφιος f του F είναι πάνω από κάποιον άλλον f' του F στον ℓ_i, ο f' είναι πάνω από τον f στον r_i. Έτσι, για να γίνει νικητής Condorcet, ένας υποψήφιος του F έχει να ανέβει θέσεις στην προτίμηση κάποιων από τους ψηφοφόρους έτσι ώστε να νικήσει καθένα από τους υποψηφίους στο U και κάθε άλλο υποψήφιο στο F τουλάχιστον μια φορά ακόμη (έλλειμμα 1), και τον a^* τουλάχιστον δύο φορές ακόμη (έλλειμμα 2).

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι κάθε υποψήφιος στο A είναι πάνω από τον υποψήφιο u_j που αντιστοιχεί στην ακμή e_j του G στους αριστερούς ψηφοφόρους ℓ_i και $\ell_{i'}$ και σε όλους τους δεξιούς εκτός των r_i και $r_{i'}$ έτσι ώστε οι κόμβοι v_i και $v_{i'}$ να είναι τα άκρα της ακμής e_j στο G, π.χ., σε n ψηφοφόρους. Επίσης, όταν ένας υποψήφιος a του A προτιμάται σε σχέση με κάποιον άλλο υποψήφιο a' του A από τον ℓ_i, ο a' προτιμάται σε σχέση με τον a από τον r_i. Έτσι, για να γίνει νικητής Condorcet, ένας υποψήφιος στο A πρέπει να ανέβει θέσεις στις προτιμήσεις κάποιων ψηφοφόρων. Πρέπει να νικήσει καθένα από τους υποψηφίους στο U και κάθε άλλο υποψήφιο στο A τουλάχιστον ακόμη μια φορά (έλλειμμα 1), τους υποψηφίους στο F τουλάχιστον ακόμη 2 φορές (έλλειμμα 2) και τον a^* τουλάχιστον τρεις ακόμη φορές (έλλειμμα 3). Αυτό αμέσως οδηγεί στο ότι ο βαθμός Dodgson κάθε υποψηφίου στο U είναι τουλάχιστον $8Kn/11 + 11n/2 + 2$.

Ομοίως, όταν ένας υποψήφιος u του U προτιμάται σε σχέση με ένα άλλο υποψήφιο u' του U στον ℓ_i, ο u' προτιμάται σε σχέση με τον u στον r_i. Έτσι, για να γίνει νικητής Condorcet, ένας υποψήφιος στο U πρέπει να ανέβει θέσεις στις προτιμήσεις κάποιων ψηφοφόρων για να νικήσει καθένα από τους υποψηφίους στο A και στο F, και κάθε άλλο υποψήφιο στο U, και τον a^* τουλάχιστον ακόμη μια φορά. Αυτό αμέσως οδηγεί ότι ο βαθμός Dodgson κάθε υποψηφίου στο U είναι τουλάχιστον $4Kn/11 + 4n$.

Μια περίληψη των ελλειμμάτων για κάθε υποψήφιο σε σχέση με οποιαδήποτε άλλο υποψήφιο παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.2.

	a^*	οποιοσδ. υποψ. στο F	οποιοσδ. υποψ. στο A	οποιοσδ. υποψ. στο U
a^*	-	0	0	1
οποιοσδ. υποψ. στο F	2	1	0	1
οποιοσδ. υποψ. στο A	3	2	1	1
οποιοσδ. υποψ. στο U	1	1	1	1

Πίνακας 2.2: Το έλλειμμα του κάθε υποψηφίου (γραμμές) έναντι οποιουδήποτε άλλου υποψηφίου (στήλες)

Το επόμενο λήμμα δίνει άνω και κάτω φράγματα για το βαθμό Dodgson των υποψηφίων στο F.

Λήμμα 2.5.8. *Κάθε υποψήφιος στο F έχει βαθμό Dodgson μεταξύ* $4Kn/11+3n+1$ *και* $4Kn/11+37n/11+2K/11+3/4$.

Απόδειξη. Εφόσον κάθε υποψήφιος στο F πρέπει να ανέβει θέσεις στις προτιμήσεις κάποιων ψηφοφόρων για να νικήσει καθένα από τους υποψηφίους στο U τουλάχιστον ακόμη μια φορά, και κάθε άλλο υποψήφιο στο F ακόμη μια φορά, και τον a^* δυο φορές ακόμη, ο βαθμός Dodgson του είναι τουλάχιστον $|U|+|F|-1+2=4Kn/11+3n+1$.

Τώρα, θεωρούμε ένα υποψήφιο f που ανήκει στο F_i. Ο f είναι σε απόσταση το πολύ

$$\left\lfloor \frac{|F_i|-1}{2}+1 \right\rfloor \leq \frac{|F_i|+1}{2} \leq \frac{\lceil 4K/11+3/2\rceil+1}{2} \leq 2K/11+7/4$$

από τον a^* στην προτίμηση είτε του αριστερού ψηφοφόρου ℓ_i είτε στου δεξιού r_i. Έτσι, ανεβάζοντας τον f το πολύ $2K/11+7/4$ θέσεις στην προτίμηση είτε του ℓ_i είτε του r_i, το έλλειμμά του σε σχέση με τον a^* θα μειωθεί κατά 1. Θεωρούμε ένα αριστερό ψηφοφόρο $\ell_{i'}$ με $i' \neq i$ και έστω F' το υποσύνολο των υποψηφίων στο F που είναι πιο ψηλά από τον f στην προτίμηση του $\ell_{i'}$. Ανεβάζοντας τον f στην πρώτη θέση προτίμησης του $\ell_{i'}$ (π.χ., $4n/11+3+|F'|$ επιπλέον θέσεις), ο f θα νικήσει κάθε υποψήφιο του F' και τον a^* ακόμη μια φορά, καθώς επίσης και τους τρεις υποψηφίους του $S_{i'}$ στις πρώτες τρεις θέσεις στην προτίμηση του $\ell_{i'}$ ακόμη μια φορά. Τώρα, θεωρούμε τον δεξιό ψηφοφόρο $r_{i'}$. Στην προτίμηση του $r_{i'}$, ο f είναι υψηλότερα από τους υποψηφίους στο F' και χαμηλότερα από τους υποψηφίους στο $F\backslash F'-\{f\}$. Έτσι, ανεβάζοντας τον f στην πρώτη θέση στην προτίμηση του ψηφοφόρου $r_{i'}$ (π.χ., $|F\backslash F'-\{f\}|+3n/2-3=4Kn/11-|F'|+3n-4$ επιπλέον θέσεις), ο f θα νικήσει κάθε υποψήφιο του $F\backslash F'-\{f\}$ ακόμη μια φορά καθώς επίσης τους υποψηφίους του $U\backslash S_{i'}$ στις πρώτες $3n/2-3$ θέσεις στην προτίμηση του r_i ακόμη μια φορά. Έτσι, ανεβαίνοντας $4Kn/11+37n/11+2K/11+3/4$ θέσεις, ο f γίνεται νικητής Condorcet. □

Τα επόμενα δύο λήμματα δίνουν φράγματα για τον βαθμό Dodgson ενός υποψηφίου a^* στις δυο περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν: όταν το G έχει μια επικάλυψη κορυφών το πολύ K, (Λήμμα 2.5.9) και όταν οποιαδήποτε επικάλυψη κορυφών του G έχει μέγεθος τουλάχιστον $K+6$ (Λήμμα 2.5.10).

Λήμμα 2.5.9. *Αν το G έχει μια επικάλυψη κορυφών μεγέθους το πολύ K, τότε ο βαθμός Dodgson του a^* είναι μικρότερος από $4Kn/11 + 3n$.*

Απόδειξη. Έστω $H \subseteq V$ μια επικάλυψη κορυφών του G με $|H| = K$. Από τον ορισμό της επικάλυψης κορυφών, το H καλύπτει όλες τις ακμές του G και αυτό σημαίνει ότι $\cup_{i:v_i \in H} S_i = U$. Έτσι, ανεβάζοντας τον a^* στην πρώτη θέση στην προτίμηση του καθενός από τους K αριστερούς ψηφοφόρους ℓ_i έτσι ώστε $v_i \in H$, ο a^* θα νικήσει καθένα από τους υποψηφίους στο U τουλάχιστον ακόμη μια φορά και, έτσι, θα γίνει νικητής Condorcet. Ο συνολικός αριθμός θέσεων που ο a^* ανεβαίνει είναι $K(4n/11 + 3) < 4Kn/11 + 3n$. Η τελευταία ανισότητα προκύπτει αφού $K < n$. □

Λήμμα 2.5.10. *Αν οποιαδήποτε επικάλυψη κορυφών του G έχει μέγεθος τουλάχιστον $K + 6$, τότε ο βαθμός Dodgson του a^* είναι μεγαλύτερος από $4Kn/11 + 37n/11 + 2K/11 + 3/4$.*

Απόδειξη. Πρώτα υποθέτουμε ότι ο ελάχιστος αριθμός θέσεων που ο a^* πρέπει να ανέβει για να κερδίσει τους υποψηφίους του U και να γίνει ένας νικητής Condorcet περιλαμβάνει να ανεβάσουμε τον a^* σε κάποιες από τις πρώτες $3n/2 - 3$ θέσεις στην προτίμηση κάποιου δεξιού ψηφοφόρου r_i. Φυσικά, δεν κερδίζονται όλοι οι υποψήφιοι του U έτσι εφόσον οι τρεις υποψήφιοι του S_i είναι χαμηλότερα από τον a^* στον ψηφοφόρο r_i. Έτσι, για να κερδίσει τους υπόλοιπους 3 υποψηφίους του S_i, ο a^* πρέπει να ανέβει είτε σε μερικές από τις τρεις πρώτες θέσεις ενός αριστερού ψηφοφόρου ή σε κάποιες από τις πρώτες $3n/2 - 3$ θέσεις ενός άλλου δεξιού ψηφοφόρου $r_{i'}$ με $i' \neq i$. Ως εκ τούτου, ο a^* έχει να ανέβει στη θέση $3n/2 - 2$ του ψηφοφόρου r_i (π.χ., $|F \backslash F_i| + 7n/11 - 2$ θέσεις), στη θέση 4 ενός αριστερού ψηφοφόρου (π.χ., $4n/11$ επιπλέον θέσεις) ή στη θέση $3n/2 - 2$ του $r_{i'}$ (π.χ., $|F \backslash F_{i'}| + 7n/11 - 2$ επιπλέον θέσεις), και να ανέβει τουλάχιστον $3n/2$ επιπλέον θέσεις έτσι ώστε να κερδίσει όλους τους υποψήφιους του U. Συνολικά, ο a^* ανεβαίνει τουλάχιστον

$$\begin{aligned}
& |F \backslash F_i| + 7n/11 - 2 + \min\{4n/11, |F \backslash F_{i'}| + 7n/11 - 2\} + 3n/2 \\
\geq\ & |F| - |F_i| + 5n/2 - 2 \\
\geq\ & 4Kn/11 + 4n - \lceil 4K/11 + 3/2 \rceil - 2 \\
\geq\ & 4Kn/11 + 4n - 4K/11 - 9/2 \\
=\ & 4Kn/11 + 37n/11 + n/11 + 6n/11 - 4K/11 - 9/2 \\
\geq\ & 4Kn/11 + 37n/11 + 22/11 + 6(K+6)/11 - 4K/11 - 9/2 \\
>\ & 4Kn/11 + 37n/11 + 2K/11 + 3/4
\end{aligned}$$

θέσεις. Η τέταρτη ανισότητα ισχύει εφόσον $n \geq 22$ και $n \geq K + 6$.

Τώρα, υποθέτουμε ότι ο ελάχιστος αριθμός των θέσεων που πρέπει να ανέβει ο a^* για να κερδίσει όλους τους υποψηφίους στο U δεν περιλαμβάνει το να ανέβει ο a^* στις πρώτες $3n/2 - 3$ θέσεις οποιουδήποτε δεξιού ψηφοφόρου. Θα δείξουμε ότι αν ο a^* έχει βαθμό Dodgson το πολύ

$4Kn/11 + 37n/11 + 2K/11 + 3/4$, τότε ο G έχει επικάλυψη κορυφών μεγέθους μικρότερο από $K + 6$, που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση του λήμματος.

Έστω H το σύνολο των αριστερών ψηφοφόρων όπου ο a^* ανεβαίνει σε μια από τις τρεις πρώτες θέσεις έτσι ώστε να κερδίσει όλους τους υποψηφίους του U τουλάχιστον ακόμη μια φορά. Συνολικά, ο a^* ανεβαίνει $4|H|n/11$ θέσεις έτσι ώστε να πιάσει τη θέση 4 σε καθένα από τους ψηφοφόρους στο H και τουλάχιστον $3n/2$ επιπλέον θέσεις για να νικήσει όλους τους υποψηφίους του U τουλάχιστον μια φορά, π.χ.., τουλάχιστον $4|H|n/11+3n/2$ θέσεις συνολικά. Έτσι, ορίζοντας ως βαθμό Dodgson του a^*, το $sc_D(a^*)$, έχουμε ότι $|H| \leq \frac{11}{4n}(sc_D(a^*) - 3n/2)$

Εφόσον $\cup_{i:\ell_i \in H} S_i = U$, το σύνολο των κόμβων του G αποτελούμενο από κόμβους v_i έτσι ώστε ο ℓ_i να ανήκει στο H είναι μια επικάλυψη κορυφών του G μεγέθους $|H|$. Υποθέτοντας ότι ο βαθμός Dodgson του a^* είναι το πολύ $4Kn/11 + 37n/11 + 2K/11 + 3/4$, έχουμε

$$\begin{aligned} |H| &\leq \frac{11}{4n}(sc_D(a^*) - 3n/2) \\ &\leq \frac{11}{4n}\left(4Kn/11 + 41n/22 + 2K/11 + 3/4\right) \\ &< K + 6 \quad , \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει εφόσον $K \leq n - 6$. □

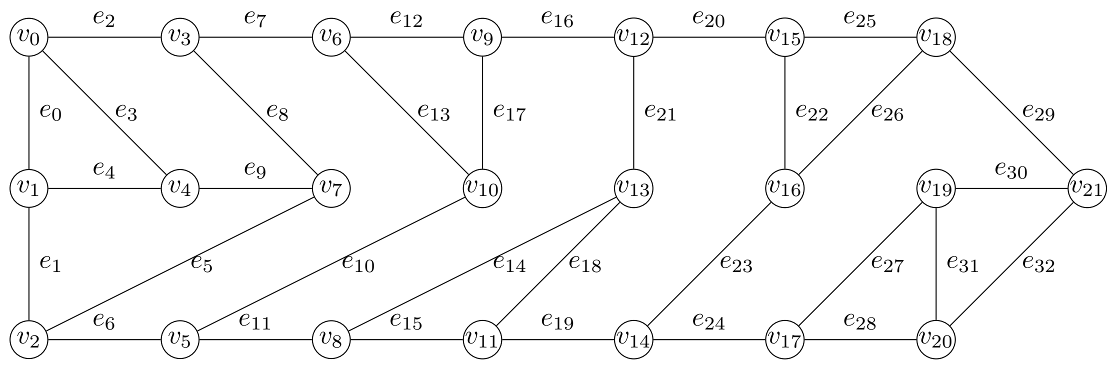
Από τα Λήμματα 2.5.8, 2.5.9, και 2.5.10, παίρνουμε ότι αν ο G έχει μια επικάλυψη κορυφών μεγέθους το πολύ K, τότε ο a^* είναι μοναδικός νικητής Dodgson, ενώ αν οποιαδήποτε επικάλυψη κορυφών του G έχει μέγεθος τουλάχιστον $K + 6$, τότε ο a^* είναι χαμηλότερα από όλους τους υποψηφίους στο F σε οποιαδήποτε κατάταξη Dodgson. Ορίζουμε ως $m = |F| + |A| + |U| + 1 = 4Kn/11 + 4n + 1$ το συνολικό αριθμό υποψηφίων. Τότε, η κατάταξη του a^* στη δεύτερη περίπτωση είναι τουλάχιστον

$$\begin{aligned} |F| + 1 &= 4Kn/11 + 3n/2 + 1 = m - 5n/2 = m - \sqrt{25n^2/4} \\ &\geq m - \sqrt{25nK/2} \geq m - 6\sqrt{4Kn/11 + 4n + 1} = m - 6\sqrt{m} \quad , \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ανισότητα ισχύει εφόσον $K \geq n/2$. Από το Θεώρημα 2.5.7, παίρνουμε το απαιτούμενο αποτέλεσμα. □

Ένα παράδειγμα της κατασκευής. Παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα της κατασκευής στην απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος 2.5.6. Θεωρούμε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος της ελαχιστοποίησης της επικάλυψης κορυφών με το 3-κανονικό γράφημα με 22 κόμβους του παρακάτω Σχήματος 2.3, και $K = 12$.

Το αντίστοιχο προφίλ προτίμησης έχει 185 υποψηφίους και 44 ψηφοφόρους. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο F έχει 129 υποψηφίους $f_0, f_1, \ldots, f_{128}$, που είναι χωρισμένοι σε 22 μπλοκ όπως φαίνεται παρακάτω. Το μπλοκ F_0 περιέχει τους έξι υποψηφίους $f_0, f_1, \ldots, f_5$, το μπλοκ F_1 περιέχει τους έξι



Σχήμα 2.3: Ένα 3-κανονικό γράφημα με 22 κόμβους

υποψηφίους $f_6, \ldots, f_{11}$, ..., το μπλοκ F_{18} περιέχει τους έξι υποψηφίους $f_{108}, \ldots, f_{113}$, το μπλοκ F_{19} περιέχει τους πέντε υποψηφίους $f_{114}, \ldots, f_{118}$, ..., και το μπλοκ F_{21} περιέχει τους υποψηφίους $f_{124}, \ldots, f_{128}$. Το σύνολο A έχει 22 υποψηφίους $a_0, \ldots, a_{21}$. Το σύνολο U έχει 33 υποψηφίους $u_0, \ldots, u_{32}$, έναν υποψήφιο δηλαδή, για κάθε ακμή του γράφου. Οι ψηφοφόροι χωρίζονται σε 22 αριστερούς ψηφοφόρους και 22 δεξιούς ψηφοφόρους. Για να υπολογίσουμε τις προτιμήσεις ενός ψηφοφόρου, έστω του ψηφοφόρου ℓ_{17}, πρώτα υπολογίζουμε το σύνολο S_{17}, που περιέχει τους υποψηφίους που αντιστοιχούν στις ακμές που είναι γειτονικές στο κόμβο v_{17} του γραφήματος, δηλαδή, $S_{17} = \{u_{24}, u_{27}, u_{28}\}$. Τώρα οι προτιμήσεις του ψηφοφόρου ℓ_{17} είναι:

$$S_{17} \succ_{\ell_{17}} a_{17} \succ_{\ell_{17}} a_{18} \succ_{\ell_{17}} \cdots \succ_{\ell_{17}} a_1 \succ_{\ell_{17}} a_2 \succ_{\ell_{17}} a^* \succ_{\ell_{17}} F_{17} \succ_{\ell_{17}} F_0 \succ_{\ell_{17}} \cdots F_{16}$$
$$\succ_{\ell_{17}} F_{18} \succ_{\ell_{17}} \cdots \succ_{\ell_{17}} F_{21} \succ_{\ell_{17}} a_3 \succ_{\ell_{17}} \cdots \succ_{\ell_{17}} a_{16} \succ_{\ell_{17}} (U \setminus S_{17})$$

Παρομοίως, οι προτιμήσεις του ψηφοφόρου r_{17} είναι:

$$(U \setminus \overleftarrow{S_{17}}) \succ_{r_{17}} \overleftarrow{F_{21}} \succ_{r_{17}} \overleftarrow{F_{20}} \succ_{r_{17}} \cdots \succ_{r_{17}} \overleftarrow{F_{18}} \succ_{r_{17}} \overleftarrow{F_{16}} \succ_{r_{17}} \cdots \succ_{r_{17}} \overleftarrow{F_0} \succ_{r_{17}}$$
$$a_4 \succ_{r_{17}} a_3 \succ_{r_{17}} \cdots \succ_{r_{17}} a_{15} \succ_{r_{17}} a^* \succ_{r_{17}} \overleftarrow{F_{17}}\, a_{16} \succ_{r_{17}} a_5 \succ_{r_{17}} \overleftarrow{S_{17}}$$

όπου το σύμβολο $\leftarrow$ στη κορυφή ενός συνόλου από υποψήφιους χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι η σειρά τους στην προτίμηση του r_{17} είναι η αντίστροφη της σειράς με την οποία κατατάσσει ο ℓ_{17} τους υποψηφίους.

2.6 Μη-προσεγγισιμότητα του βαθμού Young και κατατάξεων κατά Young.

Υπενθυμίζουμε ότι ο βαθμός Young ενός δεδομένου υποψηφίου $a^* \in A$ είναι το μέγεθος του μεγαλύτερου υποσυνόλου των ψηφοφόρων για τους οποίους ο a^* είναι νικητής Condorcet.

Είναι εύκολο να πάρουμε ένα απλό γραμμικό ακέραιο πρόγραμμα για το πρόβλημα του βαθμού Young. Όπως πριν έστω ότι $a^* \in A$ είναι ο υποψήφιος του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε τον βαθμό Young. Έστω ότι οι μεταβλητές του προγράμματος είναι $x^i \in \{0,1\}$ για όλα τα $i \in N$, $x^i = 1$ αν και μόνο αν ο ψηφοφόρος i περιέχεται στο υποσύνολο των ψηφοφόρων για τον a^*. Ορίζουμε τις σταθερές $e_a^i \in \{-1,1\}$ για όλα τα $i \in N$ και $a \in A \setminus \{a^*\}$, που εξαρτώνται από το δεδομένο προφίλ προτίμησης $e_a^i = 1$ αν και μόνο αν ο ψηφοφόρος i κατατάσσει ψηλότερα τον a^* από τον a. Το ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα που υπολογίζει τον βαθμό Young του a^* δίνεται από:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{i \in N} x^i \\ \text{subject to} \quad & \forall a \in A \setminus \{a^*\},\ \sum_{i \in N} x^i e_a^i \geq 1 \\ & \forall i \in N,\ x^i \in \{0,1\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Το ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα (2.4) για τον βαθμό Young είναι φαινομενικά πιο εύκολο από αυτό για τον βαθμό Dodgson. Αυτό υποδεικνύει ότι το πρόβλημα μπορεί εύκολα να προσεγγιστεί από παρόμοιες τεχνικές. Επομένως το επόμενο αποτέλεσμα είναι αρκετά προφανές.

Θεώρημα 2.6.1. *Είναι υπολογιστικά δύσκολο να προσεγγιστεί ο βαθμός Young κατά οποιονδήποτε παράγοντα.*

Απόδειξη. Αυτό το αποτέλεσμα γίνεται περισσότερο αυταπόδεικτο όταν προσέξουμε ότι ο βαθμός Young έχει τη σπάνια ιδιότητα του να μην είναι μονοτονικό σαν πρόβλημα βελτιστοποίησης, με τον ακόλουθο τρόπο: δεδομένου ενός υποσυνόλου από ψηφοφόρους, όπου ο a^* είναι νικητής Condorcet, αυτό δεν συνεπάγεται ότι ένα μικρότερο υποσύνολο από ψηφοφόρους θα ικανοποιούσε την ίδια ιδιότητα. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με πολλά προσεγγιστικά προβλήματα βελτιστοποίησης, στα οποία μια λύση που είναι χειρότερη από μια έγκυρη λύση είναι επίσης μια έγκυρη λύση. Θεωρούμε το πρόβλημα της επικάλυψης συνόλου, για παράδειγμα αν κάποιος προσθέτει περισσότερα υποσύνολα σε μια έγκυρη επικάλυψη, τότε ένας παίρνει μια έγκυρη επικάλυψη. Τα ίδια ισχύουν για το πρόβλημα του βαθμού Dodgson: αν μια αλληλουχία ανταλλαγών έκανε τον a^* νικητή Condorcet παρουσιάζοντας περισσότερες ανταλλαγές στην κορυφή των ήδη υπαρχουσών δεν θα αναιρούσε το γεγονός.

Για να αποδείξουμε τη μη-προσεγγισιμότητα του βαθμού Young, ορίζουμε το ακόλουθο πρόβλημα.

Nonempty Subset
Στιγμιότυπο: Ένας υποψήφιος a^*, και ένα προφίλ προτίμησης $\succ \in L^N$.
Ερώτημα: Υπάρχει μη-κενό υποσύνολο ψηφοφόρων $C \subseteq N$, $C \neq \emptyset$, για το οποίο ο a^* είναι νικητής Condorcet;

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.6.1 είναι αρκετό να δείξουμε ότι το Nonempty Subset είναι υπολογιστικά δύσκολο. Όντως, αυτό σημαίνει ότι είναι υπολογιστικά δύσκολο να διακρίνουμε αν ο βαθμός Young ενός δεδομένου υποψηφίου είναι 0 ή μεγαλύτερος του μηδενός, που αμέσως συνεπάγεται ότι ο βαθμός δεν μπορεί να προσεγγιστεί.

Λήμμα 2.6.2. *Το* Nonempty Subset *είναι πλήρες για την κλάση $\mathcal{NP}$.*

Απόδειξη. Το πρόβλημα ανήκει καθαρά στο $\mathcal{NP}$, μια μαρτυρία δίνεται από ένα μη-κενό σύνολο ψηφοφόρων για το οποίο ο a^* είναι νικητής Condorcet.

Για να δείξουμε την υπολογιστική δυσκολία, παρουσιάζουμε μια αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου από το υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα Exact Cover by Three sets (X3C) [63] στο δικό μας πρόβλημα. Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος X3C περιλαμβάνει ένα πεπερασμένο σύνολο από στοιχεία U, $|U| = n$ (όπου το n διαιρείται με το 3), και μια συλλογή $\mathcal{S}$ από υποσύνολα 3 στοιχείων του U, $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_k\}$, τέτοια ώστε για κάθε i, $1 \leq i \leq k$, $S_i \subseteq U$ και $|S_i| = 3$. Το ερώτημα είναι αν η συλλογή $\mathcal{S}$ περιέχει μια *ακριβή επικάλυψη* για το U, δηλαδή μια υποσυλλογή $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{S}$ μεγέθους $n/3$ έτσι ώστε κάθε στοιχείο του U να βρίσκεται ακριβώς ένα υποσύνολο στο $\mathcal{S}$.

Τώρα δίνουμε τις λεπτομέρειες της αναγωγής από το X3C στο Nonempty Subset. Δεδομένου ενός στιγμιότυπου X3C, που ορίζεται από το σύνολο U και μια συλλογή από σύνολα τριών στοιχείων $\mathcal{S}$, κατασκευάζουμε το ακόλουθο στιγμιότυπο του Nonempty Subset.

Ορίζουμε το σύνολο των υποψηφίων ως $A = U \cup \{a\} \cup \{a^*\}$. Έστω ότι το σύνολο των ψηφοφόρων είναι $N = N' \cup N''$, όπου N' και N'' ορίζονται ακολούθως. Το σύνολο N' αποτελείται από k ψηφοφόρους, που αντιστοιχούν στα k υποσύνολα στο $\mathcal{S}$, τέτοια ώστε για κάθε $i \in N'$ ο ψηφοφόρος i να προτιμά τους υποψηφίους στο $U \setminus S_i$ σε σχέση με τον a^* και να προτιμά τον a^* σε σχέση με όλους τους υποψηφίους $S_i \cup \{a\}$ (δηλαδή, $U \setminus S_i \succ_i a^* \succ_i S_i \cup \{a\}$).

Το υποσύνολο N'' αποτελείται από $\frac{n}{3} - 1$ ψηφοφόρους που προτιμούν τον a από τον a^* και τον a^* σε σχέση με τον U (δηλαδή, για όλα τα $i \in N''$, $a \succ_i a^* \succ_i U$).

Μετά δείχνουμε ότι υπάρχει μια ακριβής επικάλυψη στο δεδομένο στιγμιότυπο αν και μόνο αν υπάρχει ένα μη-κενό υποσύνολο ψηφοφόρων για τους οποίους ο a^* είναι νικητής Condorcet στο κατασκευασμένο στιγμιότυπο.

Επάρκεια: Έστω ότι $\mathcal{S}^*$ είναι μια ακριβής επικάλυψη από 3-σύνολα του U, και έστω ότι $N^* \subseteq N'$ είναι το υποσύνολο των ψηφοφόρων που αντιστοιχούν στα $\frac{n}{3}$ υποσύνολα $S_i \in \mathcal{S}^*$. Δείχνουμε ότι ο a^* είναι νικητής Condorcet για το $C = N^* \cup N''$. Εφόσον $\mathcal{S}^*$ είναι μια ακριβής επικάλυψη, για όλα τα $b \in U$ υπάρχει ακριβώς ένας ψηφοφόρος στο N^* που προτιμά τον a^* σε σχέση με τον b και $\frac{n}{3} - 1$ ψηφοφόροι στο N^* που προτιμούν τον b σε σχέση με τον a^*. Επιπροσθέτως, όλοι οι $\frac{n}{3} - 1$ ψηφοφόροι στο N'' προτιμούν τον a^* σε σχέση με τον b. Επομένως, ο a^* κερδίζει τον b σε μια ανά ζεύγος εκλογή.

Παραμένει να δείξουμε ότι ο a^* κερδίζει τον a σε μια ανά ζεύγος εκλογή. Αυτό είναι αληθές εφόσον όλοι οι $\frac{n}{3}$ ψηφοφόροι στο N^* προτιμούν τον a^* σε σχέση με τον a, και υπάρχουν μόνο $\frac{n}{3} - 1$

ψηφοφόροι στο N'' που προτιμούν τον a σε σχέση με τον a^*. Προκύπτει ότι ο a^* είναι νικητής Condorcet για το $N^* \cup N''$.

Αναγκαιότητα: Υποθέτουμε ότι το δεδομένο στιγμιότυπο του X3C δεν έχει ακριβή επικάλυψη. Έχουμε να δείξουμε ότι δεν υπάρχει υποσύνολο ψηφοφόρων για τους οποίους ο a^* είναι νικητής Condorcet. Έστω $C \subseteq N$, $C \neq \emptyset$ και $N^* = C \cap N'$. Ξεχωρίζουμε μεταξύ τριών περιπτώσεων.

Πρώτη Περίπτωση: $|N^*| = 0$. Πρέπει να ισχύει ότι $C \cap N'' \neq \emptyset$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο a^* χάνει από τον a σε μια ανά ζεύγος εκλογή, εφόσον όλοι οι ψηφοφόροι στο N'' προτιμούν τον a σε σχέση με τον a^*.

Δεύτερη Περίπτωση: $0 < |N^*| \leq \frac{n}{3}$. Εφόσον δεν υπάρχει ακριβής επικάλυψη, τα αντίστοιχα σύνολα S_i δεν μπορούν να καλύψουν το U. Επομένως υπάρχει $b \in U$ που κατατάσσεται υψηλότερα από τον a^* από όλους τους ψηφοφόρους στο N^*. Για να κερδίσει ο a^* τον b σε μια ανά ζεύγος εκλογή, ο C πρέπει να περιλαμβάνει τουλάχιστον $|N^*| + 1$ ψηφοφόρους από το N''. Όμως αυτό σημαίνει ότι ο a κερδίζει τον a^* σε μια ανά ζεύγος εκλογή (εφόσον ο a κατατάσσεται χαμηλότερα από τον a^* σε $|N^*|$ ψηφοφόρους και ψηλότερα από τον a^* σε $|N^*| + 1$ ψηφοφόρους τουλάχιστον). Ακολουθεί ότι ο a^* δεν είναι νικητής Condorcet για το C.

Τρίτη Περίπτωση: $|N^*| > \frac{n}{3}$. Ας απονείμουμε σε κάθε υποψήφιο $b \in A \setminus \{a^*\}$ ένα βαθμό για κάθε ψηφοφόρο που τον κατατάσσει πάνω από τον a^* και να αφαιρέσουμε ένα βαθμό για κάθε ψηφοφόρο που τον κατατάσσει κάτω από τον a^*. Ο a^* είναι νικητής Condorcet αν και μόνο αν ο βαθμός κάθε άλλου υποψηφίου που μετριέται σύμφωνα με τον τρόπο αυτό, είναι αρνητικό. Αυτό σημαίνει ότι ο a^* είναι νικητής Condorcet μόνο εάν για κάθε υποσύνολο $B \subseteq A$ υποψηφίων, η συνολική βαθμολογία των υποψηφίων στο B είναι το πολύ $-|B|$.

Θα υπολογίσουμε την συνολική βαθμολογία των υποψηφίων στο U από τους ψηφοφόρους στο N^*. Κάθε ψηφοφόρος στο N^* προτιμά τον a^* σε σχέση με 3 υποψηφίους στο U και προτιμά $n - 3$ υποψηφίους στο U σε σχέση με τον a^*. Έτσι, κάθε ψηφοφόρος στο N^* συνεισφέρει $(n-3) - 3 = n - 6$ βαθμούς στην συνολική βαθμολογία του U. Προσθέτοντας για όλους τους ψηφοφόρους στο N^*, έχουμε ότι η συνολική βαθμολογία του U από το N^* είναι $|N^*|(n-6)$. Με $|N^*| > \frac{n}{3}$, έχουμε ότι

$$|N^*|(n-6) \geq \left(\left(\frac{n}{3} - 1\right) + 2\right)(n-6) = \left(\frac{n}{3} - 1\right)n - 6$$

Θυμόμαστε ότι κάθε ψηφοφόρος στο N'' προτιμά τον a^* σε σχέση με όλους τους υποψηφίους στο U. Όμως εφόσον $|N''| = \frac{n}{3} - 1$, οι ψηφοφόροι από το N'' μπορούν να αφαιρέσουν μόνο $(\frac{n}{3} - 1)n$ από τη συνολική βαθμολογία του U. Καταλήγουμε στο ότι η συνολική βαθμολογία του U είναι τουλάχιστον -6. Εφόσον μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|U| = n > 6$ [1]. Ο a^* δεν μπορεί να κερδίσει όλους τους υποψηφίους στο U σε ανά ζεύγη εκλογές.

□

[1] Το X3C είναι προφανώς ευκόλως διαχειριζόμενο για μια σταθερά n, αφού ένας μπορεί να εξετάσει όλες τις οικογένειες $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ σταθερού μεγέθους σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ολοκληρώνουμε έτσι την απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.1. □

Το Θεώρημα 2.6.1 αναφέρει ότι ο βαθμός Young δεν μπορεί να προσεγγιστεί αποτελεσματικά υπό οποιονδήποτε παράγοντα. Η απόδειξη δείχνει ότι, στην πραγματικότητα, εκτός αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ τότε είναι αδύνατο να διακρίνουμε αποτελεσματικά μεταξύ μιας μηδενικής και μιας μη μηδενικής βαθμολογίας. Ωστόσο, η απόδειξη στην πραγματικότητα δείχνει περισσότερα: κατασκευάζει μια οικογένεια στιγμιοτύπων, όπου είναι δύσκολο να διακρίνουμε μεταξύ μηδενικής βαθμολογίας και βαθμού σχεδόν $2m/3$.

Τώρα αν κάποιος εξετάσει μια διαφορετική διατύπωση του προβλήματος του βαθμού Young όπου όλοι οι βαθμοί κλιμακώνονται από μια προσθετική σταθερά, δεν είναι πλέον αληθές ότι είναι δύσκολο να προσεγγίσουμε τον βαθμό κατά *οποιονδήποτε* παράγοντα, όμως η απόδειξη δείχνει ακόμη ότι είναι δύσκολο να προσεγγίσουμε τον βαθμό Young, ακόμη και κάτω από αυτήν τη διαφορετική διατύπωση, με ένα παράγοντα της τάξης του $\mathcal{O}(m)$.

Το δυνατό αποτέλεσμα μη-προσεγγισιμότητας για τον βαθμό Young διαισθητικά συνεπάγεται ότι η κατάταξη Young δεν μπορεί να προσεγγιστεί. Το ακόλουθο συμπέρασμα είναι μια ευθεία παραλλαγή της απόδειξης του Λήμματος 2.6.2. Μπορεί να θεωρηθεί ως ανάλογο του Θεωρήματος 2.5.6 μη-προσεγγισιμότητας της κατάταξης Dodgson για τον Young.

Συμπέρασμα 2.6.3. *Για οποιαδήποτε σταθερά $\epsilon > 0$, δεδομένου ενός προφίλ προτίμησης με m υποψηφίους και ένα υποψήφιο a^*, είναι υπολογιστικά δύσκολο να αποφασίσουμε αν ο a^* έχει θέση $\mathcal{O}(m^\epsilon)$ ή κατατάσσεται στη θέση m (δηλαδή τελευταίος) σε οποιαδήποτε κατάταξη Young.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\epsilon > 0$ είναι μια σταθερά. Κάνουμε την ίδια αναγωγή όπως πριν, με τις ακόλουθες διαφορές. Έστω ότι A' είναι το σύνολο των υποψηφίων που κατασκευάστηκαν στην αναγωγή του Λήμματος 2.6.2, και $m' = |A'|$. Προσθέτουμε ένα σύνολο B από $(m')^{1/\epsilon}$ επιπλέον υποψηφίους δηλαδή, $A = A' \cup B$ και $m = |A| = m' + (m')^{1/\epsilon}$. Το σύνολο των ψηφοφόρων είναι $N' \cup N'' \cup N^*$, οι προτιμήσεις των N' και N'' που περιορίζονται στο A' είναι όπως πριν και όλοι αυτοί οι ψηφοφόροι κατατάσσουν τον B στο τέλος. Όλοι οι ψηφοφόροι στο N^* κατατάσσουν τον a^* τελευταίο, για κάθε $b \in A' \setminus \{a^*\}$, αυτό είναι $i \in N^*$ που κατατάσσει τον b πρώτο και το B αμέσως πάνω από τον a^* δηλαδή,

$$b \succ_i A' \setminus \{a^*, b\} \succ_i B \succ_i a^*.$$

Για κάθε $c \in B$ υπάρχει ένα $i \in N^*$ που κατατάσσει τον c πρώτο και τους υπόλοιπους του B ακριβώς πάνω από τον a^*, ήτοι

$$c \succ_i A' \setminus \{a^*\} \succ_i B \setminus \{c\} \succ_i a^*.$$

Ο βαθμός Young των υποψηφίων στο $A' \setminus \{a^*\}$ είναι τουλάχιστον ένα. Ο βαθμός Young οποιουδήποτε υποψηφίου στο $c \in B$ είναι ακριβώς ένα, εφόσον ακριβώς ένας ψηφοφόρος (στο N^*) δεν κατατάσσει τον $A' \setminus \{a^*\}$ πάνω από τον c. Τώρα αν υπάρχει μια ακριβής επικάλυψη από 3-σύνολα, τότε ο βαθμός Young του a^* είναι τουλάχιστον $2n/3 - 1$ (σύμφωνα με την απόδειξη του Λήμματος

2.6.2) και έτσι ο a^* κατατάσσεται υψηλότερα από όλους τους υποψηφίους B. Αυτό σημαίνει στις κορυφαίες $m' + 1 = \mathcal{O}(m^{\epsilon})$ θέσεις. Στον αντίποδα, αν δεν υπάρχει ακριβής 3-επικάλυψη, τότε ο βαθμός Young του a^* είναι μηδέν ακολουθώντας τα ίδια επιχειρήματα όπως στο Λήμμα 2.6.2, εφόσον όλοι οι ψηφοφόροι στο N^* κατατάσσουν τον a^* τελευταίο. Έτσι ο a^* κατατάσσεται τελευταίος σε οποιαδήποτε κατάταξη Young □

Όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως στην Ενότητα 2.2, κάποιος μπορεί να φανταστεί μια διαφορετική διατύπωση του βαθμού Young. Όντως κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί: δεδομένου ενός προφίλ προτίμησης, ποιος είναι ο *μικρότερος* αριθμός ψηφοφόρων που πρέπει να *αφαιρεθεί* ώστε να γίνει ο a^* νικητής Condorcet; Αυτό το πρόβλημα ελαχιστοποίησης, όπου ο βαθμός είναι ο αριθμός των ψηφοφόρων που αφαιρούνται, αναφέρεται ως ο *Δυϊκός βαθμός Young* από τους Betzler κ.ά. [10]. Φυσικά, ο νικητής κατά Young σύμφωνα με την αρχική διατύπωση είναι πάντα νικητής και σύμφωνα με τη δυϊκή διατύπωση, και αντιστρόφως. Είναι εύκολο να πάρουμε μια $\epsilon \cdot n$-προσέγγιση κάτω από τη δυϊκή διατύπωση για οποιαδήποτε σταθερά $\epsilon > 0$, αριθμώντας όλα τα υποσύνολα από ψηφοφόρους μεγέθους τουλάχιστον $n - 1/\epsilon$ και ελέγχοντας αν ο a^* είναι νικητής Condorcet στις προτιμήσεις αυτών των ψηφοφόρων. Το επόμενο αποτέλεσμα δηλώνει ότι ο δυϊκός βαθμός Young είναι δύσκολο να προσεγγιστεί κατά ένα αρκετά καλύτερο παράγοντα.

Θεώρημα 2.6.4. *Για οποιαδήποτε σταθερά $\epsilon > 0$, το πρόβλημα του δυϊκού βαθμού Young είναι υπολογιστικά δύσκολο να προσεγγιστεί μέσα σε $O(n^{1-\epsilon})$.*

Απόδειξη. Βασιζόμαστε σε μια πρόταση σχετικά με τη μη-προσεγγισιμότητα της επικάλυψης κορυφών που είναι πιο αδύναμη από ό,τι το Θεώρημα 2.5.7, το οποίο το χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη για τη μη-προσεγγισιμότητα της κατάταξης Dodgson.

Θεώρημα 2.6.5 (Berman και Karpinski [9], [73])**.** *Δεδομένου ενός 3-κανονικού γραφήματος G και ενός ακέραιου $K \geq 1$, είναι υπολογιστικά δύσκολο να διαχωρίσουμε μεταξύ των δυο περιπτώσεων:*

- *Το G έχει μια επικάλυψη κορυφών μεγέθους το πολύ K.*
- *Οποιαδήποτε επικάλυψη κορυφών του G έχει μέγεθος τουλάχιστον $K + 2$.*

Η αναγωγή μας επεκτείνει αυτή της απόδειξης του Λήμματος 2.6.2. Θεωρούμε ένα 3-κανονικό γράφημα $G = (V_1, E)$ με p κόμβους και έναν ακέραιο $K \geq 1$. Επίσης, έστω $\epsilon \in (0, 1)$ είναι μια σταθερά και έστω $n = \lceil p^{1/\epsilon} \rceil$. Ορίζουμε ως $H = (V_2, F)$ το πλήρες γράφημα με $n - p$ κόμβους.

Ορίζουμε το σύνολο των υποψηφίων ως $A = E \cup F \cup \{a\} \cup \{a^*\}$. Έστω το σύνολο των ψηφοφόρων $N = N' \cup N'' \cup N'''$, όπου N', N'', και N''' ορίζονται ως εξής. Το σύνολο N' αποτελείται από p ψηφοφόρους που αντιστοιχούν στους p κόμβους του G, τέτοιοι ώστε για όλα τα $i \in N'$, ο ψηφοφόρος i προτιμά τους υποψηφίους του $F \cup E \setminus E_i$ σε σχέση με τον a^* (όπου το σύνολο E_i αποτελείται από τις ακμές του E οι οποίες προσπίπτουν στον κόμβο i), και προτιμά τον a^* σε σχέση με όλους τους υποψηφίους του $E_i \cup \{a\}$ (δηλαδή, $((F \cup E) \setminus E_i) \succ_i a^* \succ_i (E_i \cup \{a\})$). Το σύνολο

N'' αποτελείται από $n-p$ ψηφοφόρους που αντιστοιχούν στους $n-p$ κόμβους του H, τέτοιοι ώστε για όλα τα $i \in N''$, ο ψηφοφόρος i προτιμά τους υποψηφίους του $E \cup F \setminus F_i$ σε σχέση με τον a^* (όπου το σύνολο F_i αποτελείται από τις ακμές του F οι οποίες προσπίπτουν στον κόμβο i), και προτιμά τον a^* σε σχέση με όλους τους υποψηφίους του $F_i \cup \{a\}$ (δηλαδή, $((E \cup F) \setminus F_i) \succ_i a^* \succ_i (F_i \cup \{a\})$). Το υποσύνολο N''' αποτελείται από $n-p+K-2$ ψηφοφόρους που προτιμούν τον a σε σχέση με τον a^* και τον a^* σε σχέση με τα $E \cup F$ (δηλάδή, $a \succ_i a^* \succ_i (E \cup F)$). Το Θεώρημα 2.6.4 ακολουθεί πλέον από το Θεώρημα 2.6.5 και τα επόμενα δύο Λήμματα.

Λήμμα 2.6.6. *Αν το G έχει μια επικάλυψη κορυφών μεγέθους το πολύ K, τότε ο δυϊκός βαθμός Young του υποψηφίου a^* είναι το πολύ n^ϵ.*

Απόδειξη. Έστω $C \subseteq V_1$ μια επικάλυψη κορυφών του G μεγέθους το πολύ K. Θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα ψηφοφόρων: Ένα σύνολο $N^* \subseteq N'$ που περιέχει τους υποψηφίους που αντιστοιχούν σε κόμβους στην επικάλυψη κορυφή C, ένα σύνολο N^+ όλων των ψηφοφόρων του N'', εκτός από έναν, και το σύνολο N'''.

Υπενθυμίζουμε ότι το $N^* \cup N^+$ έχει μέγεθος το πολύ $n-p+K-1$, ενώ τοN''' έχει μέγεθος $n-p+K-2$. Εφόσον το C είναι μια επικάλυψη κορυφών στο G, κάθε υποψήφιος στο E κατατάσσεται χαμηλότερα από τον a^* από τουλάχιστον έναν ψηφοφόρο του N^*. Επίσης, οι κόμβοι που αντιστοιχούν στους ψηφοφόρους στο N^+ σχηματίζουν μια επικάλυψη κορυφών του H. Έτσι, κάθε υποψήφιος στο F κατατάσσεται χαμηλότερα από τον a^* από τουλάχιστον έναν ψηφοφόρο του N^+. Ως εκ τούτου, λαμβάνοντας υπόψη τους ψηφοφόρους του $N^* \cup N^+ \cup N'''$, ο a^* νικά κάθε άλλο υποψήφιο σε ανά ζεύγος σύγκριση και το δυϊκό του βαθμού Young είναι το πολύ $p - |C| + 1 \leq p \leq n^\epsilon$. □

Λήμμα 2.6.7. *Αν το G δεν έχει επικάλυψη κορυφών μεγέθους λιγότερο από $K+2$, ο δυϊκός βαθμός Young του υποψηφίου a^* είναι n.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει μη κενό υποσύνολο των ψηφοφόρων που κάνουν τον a^* νικητή Condorcet. Πράγματι, ας υποθέσουμε για το άτοπο ότι υπάρχει ένα τέτοιο υποσύνολο που περιέχει τα σύνολα των ψηφοφόρων $N^* \subseteq N'$, $N^+ \subseteq N''$, και $N^- \subseteq N'''$.

Αν $|N^+| < n-p-1$ ή $|N^*| < K+2$ τότε υπάρχει ένας υποψήφιος του E ή F ο οποίος δεν κατατάσσεται χαμηλότερα από τον a^* από οποιαδήποτε ψηφοφόρο $N^* \cup N^+$. Και στις δύο περιπτώσεις, το N^- πρέπει να έχει μέγεθος τουλάχιστον $|N^*| + |N^+|$ προκειμένου για τον a^* να κερδίσει κάθε υποψήφιο στο $E \cup F$ σε μια ανά ζεύγος σύγκριση τους. Ωστόσο, ο a^* δεν νικά τον a και έτσι δεν μπορεί να είναι νικητής Condorcet.

Ως εκ τούτου, ισχύει ότι $|N^+| \in \{n-p-1, n-p\}$ και $|N^*| \geq K+2$. Αν $|N^+| = n-p-1$, τότε κάποιος υποψήφιος του F κατατάσσεται κάτω από τον a^* κατά το πολύ ένα παράγοντα του N^+. Επίσης, κατατάσσεται πάνω από τον a^* από τους ψηφοφόρους του N^* και κάτω από τους ψηφοφόρους του N^-. Συνολικά, κατατάσσεται πάνω από τον a^* από τουλάχιστον $n-p+K$

ψηφοφόρους, ενώ κατατάσσεται κάτω από τον a^* από το πολύ $n - p + K - 1$ ψηφοφόρους. Ως εκ τούτου, το a^* δεν μπορεί να είναι νικητής Condorcet σε αυτή την περίπτωση.

Αν $|N^+| = n-p$ τότε κάθε υποψήφιος στο F κατατάσσεται κάτω από τον a^* από δύο ψηφοφόρους του N^+. Συνολικά, κατατάσσεται πάνω από τον a^* από τουλάχιστον $n - p + K$ ψηφοφόρους, ενώ κατατάσσεται κάτω από τον a^* από το πολύ $n - p + K$ ψηφοφόρους. Και πάλι, ο a^* δεν μπορεί να είναι νικητής Condorcet. □

Ολοκληρώνουμε έτσι την απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.4. □

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.4 παρέχει μια εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.1. Όσον αφορά τον βαθμό Young, αυτό σημαίνει ότι, για κάθε σταθερό $\epsilon > 0$, υπάρχουν περιπτώσεις για τις οποίες είναι δύσκολο να γίνει διάκριση μεταξύ ενός βαθμού μηδέν και ενός βαθμού τουλάχιστον $n - n^{\epsilon}$. Έτσι, για τη διαμόρφωση του βαθμού Young, όπου όλες οι βαθμολογίες κλιμακώνονται κατά μια πρόσθετη σταθερά, παρέχει πρόσθετη πληροφορία που είναι συμπληρωματική προς εκείνη που παρέχεται από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.1: αυτό σημαίνει ότι είναι δύσκολο να προσεγγιστεί ο βαθμός Young, ακόμη και κάτω από αυτή την εναλλακτική διατύπωση, μέσα σε έναν παράγοντα $\mathcal{O}(n)$.

Κεφάλαιο 3

Κοινωνικά επιθυμητοί προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για τον κανόνα ψηφοφορίας του **Dodgson**

3.1 Εισαγωγή

Ο κανόνας του Dodgson αν και είναι διαισθητικά ελκυστικός, έχει επικριθεί έντονα όλα αυτά τα χρόνια για την αποτυχία του να ικανοποιήσει επιθυμητές ιδιότητες που θεωρούνται πολύ βασικές από τους θεωρητικούς της Κοινωνικής Επιλογής. Εξέχουσα θέση μεταξύ αυτών των ιδιοτήτων έχουν η *μονοτονία* και η *ομοιογένεια*. Ένας κανόνας ψηφοφορίας είναι *μονότονος* αν δεν αλλάζει το αποτέλεσμα όταν ο νικητής υποψήφιος μετακινείται προς τα πάνω στις προτιμήσεις των ψηφοφόρων, και λέγεται *ομοιογενής* αν είναι αναλλοίωτο το αποτέλεσμα κατά την αντιγραφή του εκλογικού σώματος, δηλαδή του συνόλου των ψηφοφόρων. Στην πραγματικότητα, αρκετοί ερευνητές έχουν σχολιάσει ότι είναι κάπως άδικο να αποδώσει κανείς τον παραπάνω κανόνα στον Dodgson, δεδομένου ότι ο ίδιος ο Dodgson φαίνεται να τον έχει αμφισβητήσει λόγω των σοβαρών ελαττωμάτων του (π.χ., οι εργασίες των Tideman [120, π. 194] και Fishburn [61, π. 474]).

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, λάβαμε υπόψιν σε μεγάλο βαθμό την πλευρά της υπολογιστικής πολυπλοκότητας με την εξέταση του υπολογισμού του βαθμού Dodgson ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Μεταξύ άλλων αποτελεσμάτων, δώσαμε δύο πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμους που εγγυώνται ένα λόγο προσέγγισης $\mathcal{O}(\log m)$ στο πρόβλημα του βαθμού Dodgson (όπου m είναι ο αριθμός των υποψηφίων). Αυτό το φράγμα είναι ασυμπτωτικά βέλτιστο σε σχέση με αλγόριθμους πολυωνυμικού χρόνου (εκτός αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$). Η προσέγγιση του κανόνα του Dodgson (με ελαφρώς διαφορετικές έννοιες της προσέγγισης) έχει επίσης γίνει από τους Homan και Hemaspaandra [71], McCabe-Dansted κ.ά. [91], και Tideman [121, σελίδες 199-201].

Λαμβάνοντας υπόψιν τη θεωρία της Κοινωνικής Επιλογής, προτείνουμε ότι ένας αλγόριθμος που προσεγγίζει το βαθμό Dodgson είναι ένας κανόνας ψηφοφορίας από μόνος του, με την έννοια ότι παράγει φυσικά ένα κανόνα ψηφοφορίας που επιλέγει έναν υποψήφιο με την ελάχιστη βαθμολογία.

Ως εκ τούτου, αυτοί οι αλγόριθμοι δεν θα πρέπει να αξιολογούνται μόνο από τις υπολογιστικές τους ιδιότητες (π.χ., λόγος προσέγγισης και πολυπλοκότητα), αλλά και από τις ιδιότητες τους με βάση τη θεωρία της Κοινωνικής Επιλογής (π.χ., μονοτονία και την ομοιογένεια). Με άλλα λόγια, θα πρέπει να είναι «κοινωνικά επιθυμητοί». Το ζήτημα αυτό εν συντομία διερευνήθηκε στην εργασία [23] και το παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο: παρατηρήσαμε ότι ο ένας από τους δύο αλγόριθμους προσέγγισης ικανοποιεί έναν αδύναμο ορισμό της μονοτονίας, ενώ ο άλλος όχι. Και οι δύο αλγόριθμοι, καθώς και ο κανόνας του Dodgson, δεν είναι ούτε μονότονοι (με τη συνήθη έννοια του όρου), ούτε ομοιογενείς, αλλά αυτό δεν αποκλείει την ύπαρξη μονότονων ή ομοιογενών αλγόριθμων προσέγγισης για το βαθμό Dodgson. Μια φυσική ερώτηση είναι η εξής: υπάρχουν τέτοιοι αλγόριθμοι προσέγγισης που αποφέρουν ένα καλό λόγο προσέγγισης;

Στη συνέχεια, αναφερόμαστε σε αλγόριθμους προσέγγισης του βαθμού Dodgson (καθώς και τους κανόνες ψηφοφορίας που επάγουν) χρησιμοποιώντας τον όρο *προσεγγίσεις Dodgson*. Μια ωραία ιδιότητα που έχουν οι προσεγγίσεις Dodgson είναι ότι ένας πεπερασμένος λόγος προσέγγισης συνεπάγεται την *συνέπεια κατά Condorcet*, δηλαδή, να εκλέγεται ένας νικητής Condorcet (εάν υπάρχει) ως ο μοναδικός νικητής. Θα ήταν επιθυμητές προσεγγίσεις της κατάταξης του Dodgson (δηλαδή, κατάταξη των υποψηφίων σε σχέση με το βαθμό Dodgson τους) άμεσα, αντί της προσέγγισης του βαθμού Dodgson. Δυστυχώς, όπως δείξαμε, η διάκριση του αν ένας υποψήφιος είναι ο νικητής Dodgson ή στις τελευταίες $\mathcal{O}(\sqrt{m})$ θέσεις στην κατάταξη Dodgson είναι υπολογιστικά δύσκολη. Αυτή το ακραίο αποτέλεσμα μη-προσεγγισιμότητας παρέχει μια εξήγηση από τη θεωρία της πολυπλοκότητας των διαφορών που έχουν παρατηρηθεί στον τομέα της βιβλιογραφία της κοινωνικής επιλογής κατά τη σύγκριση του κανόνα του Dodgson με απλούστερους πολυωνυμικού χρόνου κανόνες ψηφοφορίας και σημαίνει ότι, όσο νοιαζόμαστε για αποδοτικούς αλγόριθμους, λογικές προσεγγίσεις της κατάταξης Dodgson είναι αδύνατες. Ωστόσο, οι περιπτώσεις κατά τις οποίες η κατάταξη είναι δύσκολο να προσεγγιστεί είναι οι περιπτώσεις όπου οι υποψήφιοι έχουν πολύ παρόμοιες βαθμολογίες Dodgson. Θα λέγαμε ότι σε αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι ζωτικής σημασίας, από την πλευρά του Dodgson, ποιος υποψήφιος θα εκλεγεί, δεδομένου ότι όλοι είναι σχεδόν εξίσου κοντά στο να είναι νικητές Condorcet. Με άλλα λόγια, αν ο βαθμός Dodgson είναι ένα μέτρο της ποιότητας ενός υποψηφίου, ο στόχος είναι απλά να εκλέξουμε ένα καλό υποψήφιο, σύμφωνα με το μέτρο αυτό.

3.1.1 Τα αποτελέσματα και οι τεχνικές μας

Στην διατριβή αυτή δίνουμε οριστικές (και ως επί το πλείστον θετικές) απαντήσεις στα ερωτήματα που τέθηκαν παραπάνω. Τα αποτελέσματά μας είναι τα βέλτιστα δυνατά.

Στην Ενότητα 3.3 μελετούμε μονότονες προσεγγίσεις Dodgson. Σχεδιάζουμε πρώτα έναν αλγόριθμο που συμβολίζουμε με M. Σε γενικές γραμμές, ο αλγόριθμος αυτός «μονοτονοποιεί» τον κανόνα του Dodgson καθορίζοντας ρητά ένα νικητήριο σύνολο για κάθε δεδομένο προφίλ προτίμησης, και αναθέτει ένα υποψήφιο στο νικητήριο σύνολο αν είναι νικητής Condorcet σε κάποια προφίλ προτιμήσεων, έτσι ώστε το προηγούμενο προφίλ να προκύπτει από το τελευταίο μετακινώντας τον υποψήφιο προς τα πάνω. Αποδεικνύουμε ότι ο M είναι ένας μονότονος αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης 2.

Επιπλέον δείχνουμε ότι δεν υπάρχει μονότονη προσέγγιση Dodgson με λόγο μικρότερο από 2 (Θεώρημα 3.3.4), ως εκ τούτου, ο M είναι ο βέλτιστος μεταξύ μονότονων προσεγγίσεων Dodgson. Σημειώνουμε ότι το κάτω φράγμα είναι ανεξάρτητο υπολογιστικών υποθέσεων, και, κυρίως, ο υπολογισμός του βαθμού ενός υποψηφίου στον M απαιτεί εκθετικό χρόνο. Αυτό είναι αναμενόμενο δεδομένου ότι ο βαθμός Dodgson είναι υπολογιστικά δύσκολο να προσεγγιστεί μέσα σε έναν παράγοντα καλύτερο από $\Omega(\log m)$ [23].

Τώρα είναι φυσικό να αναρωτηθούμε αν υπάρχει μια μονότονη προσέγγιση *πολυωνυμικού χρόνου* του Dodgson με λόγο προσέγγισης $\mathcal{O}(\log m)$. Επίσης δίνουμε θετική απάντηση στο ερώτημα αυτό. Πράγματι, σχεδιάζουμε μια προσέγγιση Dodgson που συμβολίζουμε με Q, και αποδεικνύουμε ότι ο Q είναι ένας μονότονος αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου με λόγο προσέγγισης $\mathcal{O}(\log m)$.

Το αποτέλεσμά μας βασίζεται σε μια μονοτονοποίηση μια υπάρχουσας προσέγγισης Dodgson που βασίζεται σε γραμμικό προγραμματισμό. Το κύριο εμπόδιο είναι η εκτέλεση της μονοτονοποίησης σε πολυωνυμικό χρόνο και όχι κοιτάζοντας εκθετικό αριθμό προφίλ, όπως περιγράφεται παραπάνω. Κύριο εργαλείο μας είναι η έννοια του *απαισιόδοξου εκτιμητή*, η οποία επιτρέπει στον αλγόριθμο να περιορίσει την προσοχή του σε ένα μοναδικό προφίλ προτίμησης. Οι απαισιόδοξοι εκτιμητές υπολογίζονται με την επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος που είναι μια παραλλαγή εκείνου που προσεγγίζει το βαθμό Dodgson.

Στην Ενότητα 3.4 μελετούμε την ομοιογένεια. Θεωρούμε τον *απλοποιημένο Dodgson κανόνα* του Tideman [121, σελίδες 199-201], ο οποίος σχεδιάστηκε για να ξεπεραστούν οι ανεπάρκειες του κανόνα του Dodgson. Αυτός ο κανόνας είναι υπολογίσιμος σε πολυωνυμικό χρόνο, και επιπλέον είναι γνωστό ότι είναι μονότονος και ομοιογενής. Με την κλιμάκωση της βαθμολογίας που δίνεται από τον απλοποιημένο Dodgson κανόνα παίρνουμε έναν κανόνα, που συμβολίζουμε Td′, που είναι ταυτόσημος ως κανόνας ψηφοφορίας και, επιπλέον, έχει τις ακόλουθες ιδιότητες. Ο Td′ είναι ένας μονότονος, ομοιογενής, αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου με λόγο προσέγγισης $\mathcal{O}(m \log m)$.

Σημειώνουμε ότι ο βαθμός Dodgson μπορεί να είναι μεταξύ 0 και $\Theta(nm)$, έτσι ώστε αυτό το αποτέλεσμα να είναι μακριά από το τετριμμένο. Η ανάλυση είναι βέλτιστη όταν υπάρχει ένας υποψήφιος που είναι ισόπαλος έναντι πολλών άλλων υποψηφίων σε ανά ζεύγη εκλογές (και ως εκ τούτου έχει σχετικά υψηλή βαθμολογία Dodgson), ενώ ένας άλλος υποψήφιος χάνει αυστηρά σε ανά ζεύγη εκλογές από λίγους υποψήφιους (έτσι ώστε έχει σχετικά χαμηλό βαθμό Dodgson). Σύμφωνα με την ομοιογένεια ο πρώτος υποψήφιος θα πρέπει να εκλεγεί, αφού η βαθμολογία του κλιμακώνεται, όταν το εκλογικό σώμα αναπαράγεται (βλέπε Ενότητα 3.4). Αυτή η διαίσθηση οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα που ισχύει για οποιαδήποτε (ακόμα και εκθετικού χρόνου) ομοιογενή προσέγγιση Dodgson. Οποιοσδήποτε ομοιογενής Dodgson προσεγγιστικός αλγόριθμος έχει λόγο προσέγγισης τουλάχιστον $\Omega(m \log m)$.

Ειδικότερα, το άνω φράγμα που δίδεται από το Θεώρημα 3.4.1 είναι ασυμπτωτικά βέλτιστο. Η ουσία της κατασκευής μας είναι ο σχεδιασμός ενός προφίλ προτίμησης όπου ένας υποψήφιος είναι ισόπαλος με $\Omega(m)$ άλλους υποψηφίους. Αυτό είναι ισοδύναμο με μία κατασκευή μιας οικογένειας υποσυνόλων ενός συνόλου U, $|U| = m$, έτσι ώστε κάθε στοιχείο του U εμφανίζεται σε περίπου μισά υποσύνολα, αλλά η ελάχιστη επικάλυψη έχει μέγεθος $\Omega(\log m)$.

Για να ολοκληρωθεί η εικόνα, στην Ενότητα 3.5 συζητάμε για κάποιες άλλες, λιγότερο εμφανείς, ιδιότητες κοινωνικής επιλογής που δεν ικανοποιούνται από τον κανόνα του Dodgson [121, Κεφάλαιο 13]: τη συνδυαστικότητα, τη συνέπεια κατά Smith, την αμοιβαία πλειοψηφία, την αμετάβλητη απώλεια συνέπειας, και την ανεξαρτησία των κλώνων. Θα δείξουμε ότι κάθε προσέγγιση Dodgson που ικανοποιεί μία από αυτές τις ιδιότητες έχει λόγο προσέγγισης $\Omega(nm)$ (στην περίπτωση των δύο πρώτων ιδιοτήτων) ή $\Omega(n)$ (στην περίπτωση των τελευταίων τριών). Ένας λόγος προσέγγισης $\Omega(nm)$ είναι εντελώς τετριμμένος, αλλά θεωρούμε επίσης τον λόγο προσέγγισης $\Omega(n)$ να μην είναι ικανοποιητικός, καθώς ο αριθμός των ψηφοφόρων n είναι πολύ μεγάλος σε πολλές καταστάσεις.

3.1.2 Η ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Μια κατασκευαστική απέναντι σε μια περιγραφική άποψη.

Η δική μας ερμηνεία των αποτελεσμάτων εμπεριέχει δύο απόψεις. Η πρώτη είναι η *κατασκευαστική*: θα θέλαμε να σχεδιάσουμε νέους πολυωνυμικού χρόνου υπολογίσιμους κανόνες ψηφοφορίας που διατηρούν τις ιδιότητες του κανόνα του Dodgson (π.χ., η εγγύτητα των υποψηφίων στο να γίνουν νικητές Condorcet), ενώ ικανοποιούνται πρόσθετες κοινωνικές ιδιότητες. Η δεύτερη είναι η *περιγραφική*: τα αποτελέσματά μας παρέχουν ένα νέο τρόπο για να *ποσοτικοποιήσουμε* πόσο «κοντά» είναι ο κανόνας του Dodgson στο να ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες. Πιστεύουμε ότι η περιγραφική άποψη είναι πιο ελκυστική από τη πλευρά της θεωρίας της Κοινωνικής Επιλογής.

Η κατασκευαστική άποψη δημιουργεί το ακόλουθο εννοιολογικό ερώτημα: έχει νόημα να χρησιμοποιούμε μια προσέγγιση Dodgson, όταν αρκετοί από τους κανόνες ψηφοφορίας είναι μονότονοι, ομοιογενείς και πολυωνυμικού χρόνου; Ωστόσο, τα αποτελέσματά μας σχετικά με τον απλοποιημένο Dodgson κανόνα του Tideman αντιπροσωπεύουν καλύτερα τις προσδοκίες και των θεωρητικών της Πληροφορικής αλλά και των θεωρητικών της Κοινωνικής Επιλογής: αποτελούν τόσο μια βέλτιστη προσέγγιση του Dodgson όσο και έναν καθιερωμένο κοινωνικά επιθυμητό κανόνα ψηφοφορίας. Επίσης, σημειώνουμε ότι το ερώτημα αυτό δεν τίθεται ως θέμα όσο αφορά τη περιγραφική άποψη.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της περιγραφικής άποψης είναι ότι οι ιδέες μας μπορούν να εφαρμοστούν και στους κανόνες ψηφοφορίας, στους οποίους η ανάδειξη των νικητών δεν είναι υπολογιστικά δύσκολη, διευρύνοντας έτσι σημαντικά το πεδίο εφαρμογής των αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, ο κανόνας της πλειοψηφίας δεν είναι συνεπής κατά Condorcet, αλλά πόσο απέχει από το να είναι συνεπής κατά Condorcet;

Και οι δύο απόψεις στηρίζονται στη βασική παραδοχή ότι η βαθμολογία ενός υποψηφίου σύμφωνα με κάποιο κανόνα ψηφοφορίας είναι ανάλογη (ή αντιστρόφως ανάλογη, στην περίπτωση του Dodgson) με μια μετρική της κοινωνικής αποδοχής του εν λόγω υποψηφίου. Μια παρόμοια σιωπηρή παραδοχή στην πραγματικότητα γίνεται συνήθως στο πλαίσιο πολλών τυπικών προβλημάτων προσέγγισης, π.χ., μια επικάλυψη κορυφών που είναι διπλάσια από το μέγεθος της βέλτιστης κάλυψης είναι δύο φορές τόσο κακή. Η προσέγγιση αυτή αντιμετωπίζει ένα κανόνα ψηφοφορίας όταν σχετίζεται με ένα συγκεκριμένο ορισμό του τρόπου βαθμολόγησης. Ως εκ τούτου, αν και η προσέγγιση του βαθμού κατά ένα πρόσθετο όρο θα απέδιδε την ίδια συνάρτηση από τα προφίλ προτίμησης στους υποψήφιους, θα τροποποιούσε το πρόβλημα κατά ένα θεμελιώδη τρόπο (με τον ίδιο τρόπο που η προσέγγιση του ανεξάρτητου συνόλου κατά έναν πρόσθετο όρο θα έκανε το πρόβλημα πιο εύκολο στην προσέγγιση, αλλά θα καταστούσε τη λύση του άχρηστη).

3.2 Προκαταρκτικές έννοιες - Ορισμοί

Υπενθυμίζουμε σύντομα το περιβάλλον στο οποίο εκτελείται μια ψηφοφορία και εν συντομία κάποιους ορισμούς. Παραπέμπουμε για πιο αναλυτική περιγραφή στην ενότητα 2.2. Το περιβάλλον μιας εκλογής αποτελείται ένα σύνολο *ψηφοφόρων* $N = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ και ένα σύνολο από *υποψηφίους* A, $|A| = m$. Όταν ο ψηφοφόρος ο i προτιμά τον x από τον y συμβολίζουμε με $x \succ_i y$. Το *προφίλ προτιμήσεων* $\succ$ είναι μια συλλογή των προτιμήσεων για όλους τους ψηφοφόρους. Λέμε ότι ο υποψήφιος x νικά ή κερδίζει τον y σε μια *ανά ζεύγος εκλογή* αν προτιμάται από την πλειοψηφία των ψηφοφόρων. Ο *νικητής Condorcet* είναι ένας υποψήφιος που νικά κάθε άλλον υποψήφιο σε μια ανά ζεύγος εκλογή. Ο *βαθμός Dodgson* ενός υποψηφίου συμβολίζεται με $\mathrm{sc}_D(x, \succ)$, και είναι ο αριθμός των εναλλαγών μεταξύ γειτονικών υποψηφίων στις επιμέρους κατατάξεις που απαιτούνται για να γίνει ο x νικητής κατά Condorcet. Ο *νικητής κατά Dodgson* είναι ένας υποψήφιος, με τον ελάχιστο βαθμό Dodgson. Το έλλειμμα του x σε σχέση με τον y ορίζεται ως $\mathrm{defc}(x, y, \succ)$, και είναι ο αριθμός των πρόσθετων ψηφοφόρων που θα πρέπει να κατατάσσουν τον x πάνω από τον y, προκειμένου ο x να κερδίσει τον y σε μια ανά ζεύγος εκλογή.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε έννοιες που χρησιμοποιούμε παρακάτω. Θεωρούμε αλγόριθμους που λαμβάνουν σαν είσοδο ένα υποψήφιο $x \in A$ και ένα προφίλ προτίμησης $\succ \in \mathcal{L}^n$, και επιστρέφουν έναν βαθμό για τον x. Ορίζουμε την τιμή που επιστρέφει ο αλγόριθμος V στην είσοδο που αποτελείται από έναν υποψήφιο $x \in A$ και ένα προφίλ $\succ \in \mathcal{L}^n$ ως $\mathrm{sc}_V(x, \succ)$. Ορίζουμε ένα τέτοιο αλγόριθμο V ως *Dodgson προσεγγιστικό* αν το $\mathrm{sc}_V(x, \succ) \geq \mathrm{sc}_D(x, \succ)$ για κάθε υποψήφιο $x \in A$ και κάθε προφίλ $\succ \in \mathcal{L}^n$. Ορίζουμε ότι ο V έχει *λόγο προσέγγισης* ρ αν

$$\mathrm{sc}_D(x, \succ) \leq \mathrm{sc}_V(x, \succ) \leq \rho \cdot \mathrm{sc}_D(x, \succ),$$

για κάθε $x \in A$ και κάθε $\succ \in \mathcal{L}^n$. Μια προσέγγιση Dodgson φυσικά παράγει ένα κανόνα ψηφοφορίας με την εκλογή του υποψηφίου με τον ελάχιστο βαθμό. Ως εκ τούτου, όταν λέμε ότι μια προσέγγιση Dodgson ικανοποιεί μια ιδιότητα της κοινωνικής επιλογής αναφερόμαστε στον κανόνα ψηφοφορίας που παράγεται από τον αλγόριθμο. Παρατηρούμε ότι ο κανόνας ψηφοφορίας που παράγεται από μια προσέγγιση Dodgson με πεπερασμένο λόγο προσέγγισης είναι *Condorcet-συνεπής*. Πράγματι, από τον ορισμό του λόγου προσέγγισης ρ της προσέγγισης Dodgson V, αν το ρ είναι πεπερασμένο και ο x είναι νικητής Condorcet (δηλαδή, $\mathrm{sc}_D(x, \succ) = 0$), τότε πρέπει να ισχύουν επίσης ότι $\mathrm{sc}_V(x, \succ) = 0$ και ο x είναι ο (μοναδικός) νικητής στον V.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα. Θεωρούμε τον αλγόριθμο V, δεδομένου ενός υποψηφίου $x \in A$ και ενός προφίλ προτίμησης $\succ \in \mathcal{L}^n$, επιστρέφει έναν βαθμό $\mathrm{sc}_V(x, \succ) = m \cdot \sum_{y \in A \setminus \{x\}} \mathrm{defc}(x, y, \succ)$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο αλγόριθμος αυτός είναι μια προσέγγιση Dodgson και, επιπλέον, έχει λόγο προσέγγισης το πολύ m. Πράγματι, είναι δυνατόν να κάνουμε τον x να νικήσει τον y σε μια ανά ζεύγος εκλογή μετακινώντας τον x στην κορυφή των προτιμήσεων των $\mathrm{defc}(x, y, \succ)$ ψηφοφόρων, και αυτό απαιτεί το πολύ $m \cdot \mathrm{defc}(x, y, \succ)$ εναλλαγές. Αθροίζοντας όλα τα $y \in A \setminus \{x\}$, παίρνουμε ένα άνω φράγμα $\mathrm{sc}_V(x, \succ)$ για το βαθμό Dodgson του x. Από την άλλη πλευρά, δεδομένου $x \in A$ για κάθε $y \in A \setminus \{x\}$ χρειαζόμαστε $\mathrm{defc}(x, y, \succ)$ εναλλαγές που ωθούν τον x πάνω από τον y στις προτιμήσεις κάποιων ψηφοφόρων ώστε ο x να κερδίσει τον y σε μια ανά ζεύγος εκλογή. Επιπλέον, αυτές οι ανταλλαγές δεν μειώνουν το έλλειμμα έναντι οποιουδήποτε άλλου υποψηφίου. Ως εκ τούτου, $\sum_{y \in A \setminus \{x\}} \mathrm{defc}(x, y, \succ) \leq \mathrm{sc}_D(x, \succ)$, και πολλαπλασιάζοντας με m παίρνουμε ότι $\mathrm{sc}_V(x, \succ) \leq m \cdot \mathrm{sc}_D(x, \succ)$. [1]

3.3 Μονοτονία

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματά μας που αφορούν μονότονες προσεγγίσεις Dodgson. Ένας κανόνας ψηφοφορίας είναι *μονότονος* αν ένας νικητής υποψήφιος παραμένει νικητής και εφόσον μετακινηθεί προς τα πάνω στις προτιμήσεις μερικών από τους ψηφοφόρους. Ο κανόνας του Dodgson είναι γνωστό ότι είναι μη μονότονος ([20]). Η διαίσθηση είναι ότι αν ένας ψηφοφόρος κατατάσσει τον x ακριβώς πάνω από τον y και τον y πάνω από τον z, ανταλλάσσοντας τον x με τον y μπορεί να μη βοηθήσει εφόσον ο y νικά ήδη τον x, αλλά μπορεί να βοηθήσει τον z να νικήσει τον x.

Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση Dodgson που αναφέρεται στο τέλος της προηγούμενης ενότητας είναι μονότονη ως κανόνας ψηφοφορίας. Πράγματι, θεωρούμε ένα προφίλ προτίμησης $\succ$ και ένα νικητή υποψήφιο x. Μετακινώντας τον x προς τα πάνω στις προτιμήσεις μερικών από τους ψηφοφόρους δεν μπορεί να αυξήσει τον βαθμό του (καθώς το έλλειμμα του σε σχέση με κάθε άλλο υποψήφιο δεν αυξάνει), ούτε να μειώσει τη βαθμολογία κάθε άλλου υποψηφίου $y \in A \setminus \{x\}$ (δεδομένου ότι το έλλειμμα του y ενάντια σε κάθε υποψήφιο στο $A \setminus \{x, y\}$ παραμένει αμετάβλητο και το έλλειμμά του ενάντια στο x δεν μειώνεται). Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα πολύ ισχυρότερο αποτέλεσμα.

[1] Πρόσφατα, μια παρόμοια συλλογιστική είχε χρησιμοποιηθεί από τους Faliszewski κ.ά. [56] για να αποδείξουν ότι ένας κανόνας ψηφοφορίας γνωστός ως Maximin (ο οποίος είναι ομοιογενής και μονότονος) είναι μια προσέγγιση Dodgson με λόγο προσέγγισης το πολύ m^2.

3.3.1 Μονοτονοποίηση κανόνα ψηφοφορίας Dodgson

Χρησιμοποιώντας μια φυσική μονοτονοποίηση του κανόνα ψηφοφορίας Dodgson, επιτυγχάνουμε μια μονότονη προσέγγιση Dodgson με λόγο προσέγγισης το πολύ 2. Η βασική ιδέα είναι, αρχικά, ο ορισμός ενός συνόλου νικητών υποψηφίων για ένα δεδομένο προφίλ και, στη συνέχεια, η ανάθεση της ίδιας τιμής στους υποψηφίους στο σύνολο των νικητών και μεγαλύτερης τιμής στους υποψηφίους που δεν είναι νικητές. Χοντρικά, το νικητήριο σύνολο ορίζεται κατά τέτοιον τρόπο ώστε να περιέχει τους κατά Dodgson νικητές για δεδομένο προφίλ καθώς και τους κατά Dodgson νικητές άλλων προφίλ που είναι απαραίτητοι για να ικανοποιείται η συνθήκη μονοτονίας.

Πιο τυπικά, ένα προφίλ προτίμησης $\succ' \in \mathcal{L}^n$ είναι μια *y-βελτίωση* του $\succ$ για κάποιον υποψήφιο $y \in A$ αν το $\succ'$ προκύπτει ξεκινώντας από το $\succ$ και ανεβάζοντας το y προς τα πάνω στις προτιμήσεις κάποιων ψηφοφόρων. Συγκεκριμένα ένα προφίλ αποτελεί μια y-βελτίωση του εαυτού του για κάθε υποψήφιο $y \in A$. Η επόμενη πρόταση είναι προφανής.

Παρατήρηση 3.3.1. Έστω $y \in A$ και έστω $\succ, \succ' \in \mathcal{L}^n$ προφίλ τέτοια ώστε $\succ'$ να αποτελεί μια y-βελτίωση του $\succ$. Τότε,

$$\mathrm{sc}_D(y, \succ') \leq \mathrm{sc}_D(y, \succ).$$

Ο κανόνας ψηφοφορίας του Dodgson μετατρέπεται σε μονότονο ως εξής. Έστω M ο νέος, υπό κατασκευή κανόνας ψηφοφορίας. Συμβολίζουμε με $W(\succ)$ το σύνολο των νικητών του M (που θα οριστεί σύντομα) για το προφίλ $\succ \in \mathcal{L}^n$. Έστω $\Delta = \max_{y \in W(\succ)} \mathrm{sc}_D(y, \succ)$. Ο κανόνας ψηφοφορίας M αναθέτει μια τιμή ίση με $\mathrm{sc}_M(y, \succ) = \Delta$ σε κάθε υποψήφιο $y \in W(\succ)$ και μία τιμή ίση με

$$\mathrm{sc}_M(y, \succ) = \max\{\Delta + 1, \mathrm{sc}_D(y, \succ)\}$$

σε κάθε υποψήφιο $y \notin W(\succ)$. Το μόνο που υπολείπεται είναι ο ορισμός του συνόλου των νικητών $W(\succ)$ για το προφίλ $\succ$. Αυτό το πραγματοποιούμε ως εξής: για κάθε προφίλ προτιμήσεων $\succ^* \in \mathcal{L}^n$ και κάθε νικητή κατά Dodgson y^* στο $\succ^*$, ο y^* συμπεριλαμβάνεται στο νικητήριο σύνολο $W(\succ')$ σε κάθε προφίλ προτιμήσεων $\succ' \in \mathcal{L}^n$ που αποτελεί μια y^*-βελτίωση του $\succ^*$.

Θεώρημα 3.3.2. *Ο M είναι ένας μονότονος Dodgson προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης 2.*

Απόδειξη. Προφανώς, ο κανόνας ψηφοφορίας M αποτελεί προσέγγιση Dodgson (δηλαδή, $\mathrm{sc}_M(y, \succ) \geq \mathrm{sc}_D(y, \succ)$ για κάθε υποψήφιο στοιχείο $y \in A$ και κάθε προφίλ $\succ \in \mathcal{L}^n$). Επιπλέον, είναι εξ ορισμού μονότονος, αν ο y αποτελεί νικητή για ένα προφίλ $\succ$, ο y παραμένει νικητής για κάθε y-βελτίωση του $\succ$. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε, επίσης, ότι έχει λόγο προσέγγισης 2. Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα, με απλά λόγια, το λήμμα αυτό δηλώνει ότι μετακινώντας προς τα πάνω ένα υποψήφιο δε μπορεί να μειωθεί σημαντικά (δηλαδή, να βελτιωθεί) η τιμή Dodgson ενός άλλου υποψηφίου.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω $y \in A$ και $\succ, \succ' \in \mathcal{L}^n$ προφίλ τέτοια ώστε το $\succ'$ να αποτελεί y-βελτίωση του $\succ$. Για κάθε υποψήφιο $z \in A \setminus \{y\}$ ισχύει ότι $sc_D(z, \succ) \leq 2 \cdot sc_D(z, \succ')$.*

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός ότι ο βαθμός Dodgson του υποψήφιου z στο προφίλ $\succ'$ είναι $\mathrm{sc}_D(z, \succ')$ σημαίνει ότι ο z μπορεί να αποτελέσει νικητή κατά Condorcet αν τοποθετηθεί κατά $\mathrm{sc}_D(z, \succ')$ θέσεις ψηλότερα στις προτιμήσεις κάποιων ψηφοφόρων, έστω $\succ''$ το προφίλ που προκύπτει (όπου z ο νικητής κατά Condorcet). Για $i \in N$ συμβολίζουμε

$$S_i = \{x \in A : \ x \succ'_i z \wedge z \succ''_i x\}.$$

Προφανώς, $\sum_{i \in N} |S_i| = \mathrm{sc}_D(z, \succ')$.

Θεωρώντας, τώρα, το προφίλ $\succ$ παρατηρούμε ότι για όλους τους υποψηφίους $x \in A \setminus \{z\}$, $\mathrm{defc}(z, x, \succ) \leq \mathrm{defc}(z, x, \succ')$. Επομένως, ο z αποτελεί πλέον νικητή κατά Condorcet όταν τοποθετηθεί ψηλότερα σε κάθε ψηφοφόρο i έτσι ώστε να παρακάμψει όλα τους υποψηφίους στο σύνολο S_i. Αυτό δεν απαιτεί εναλλαγές στον ψηφοφόρο i αν $S_i = \emptyset$ ενώ η τοποθέτηση του z ψηλότερα κατά $|S_i| + 1$ θέσεις στον ψηφοφόρο i αρκεί για την παράκαμψη των υποψηφίων στο σύνολο S_i και, πιθανώς, υποψηφίων y που μπορεί να βρίσκονται μεταξύ τους στο $\succ$ (και εκτός του $\succ'$). Επομένως, ο βαθμός Dodgson του z στο προφίλ $\succ$ είναι

$$\mathrm{sc}_D(z, \succ) \leq \sum_{i \in N : S_i \neq \emptyset} (|S_i| + 1) \leq 2 \sum_{i \in N} |S_i| = 2 \cdot \mathrm{sc}_D(z, \succ'),$$

και αποδεικνύεται το Λήμμα. □

Ας θεωρήσουμε, τώρα, ένα προφίλ $\succ \in \mathcal{L}^n$. Έστω y^* ένας υποψήφιος στο $W(\succ)$ με υψηλότερο βαθμό Dodgson (ίσο με Δ). Αν ο y^* αποτελεί νικητή κατά Dodgson στο $\succ$ τότε $\mathrm{sc}_M(z, \succ) = \mathrm{sc}_D(z, \succ)$ για κάθε υποψήφιο $z \in A$. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο y^* δεν αποτελεί νικητή κατά Dodgson αλλά ανήκει στο $W(\succ)$.

Εξ ορισμού πρέπει να υπάρχει προφίλ $\succ^* \in \mathcal{L}^n$ τέτοιο ώστε ο y^* να αποτελεί νικητή κατά Dodgson στο $\succ^*$ και το $\succ$ αποτελεί y^*-βελτίωση του $\succ^*$. Από την Παρατήρηση 3.3.1, εφόσον το $\succ$ αποτελεί μια y^*-βελτίωση του $\succ^*$, ισχύει

$$\mathrm{sc}_D(y^*, \succ) \leq \mathrm{sc}_D(y^*, \succ^*). \tag{3.1}$$

Αφού ο y^* αποτελεί νικητή κατά Dodgson στο $\succ^*$, ισχύει

$$\mathrm{sc}_D(y^*, \succ^*) \leq \mathrm{sc}_D(z, \succ^*) \tag{3.2}$$

για κάθε υποψήφιο $z \in W(\succ)$. Επίσης, εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.3.3, προκύπτει ότι

$$\mathrm{sc}_D(z, \succ^*) \leq 2 \cdot \mathrm{sc}_D(z, \succ) \tag{3.3}$$

για κάθε υποψήφιο $z \in W(\succ)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του M και τις ανισότητες (3.1), (3.2), και (3.3), για κάθε υποψήφιο $z \in W(\succ)$ ισχύει

$$\mathrm{sc}_M(z, \succ) = \Delta = \mathrm{sc}_D(y^*, \succ) \leq 2 \cdot \mathrm{sc}_D(z, \succ).$$

Απομένει να υπολογιστεί ο λόγος προσέγγισης σε σχέση με τους υποψηφίους στο $A \setminus W(\succ)$. Έστω $y' \in A \setminus \{y^*\}$ ένας νικητής κατά Dodgson στο $\succ$. Αφού $y' \in W(\succ)$ η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι

$$\Delta \leq 2 \cdot \mathrm{sc}_D(y', \succ). \tag{3.4}$$

Έστω $z' \in A \setminus W(\succ)$. Εξ ορισμού, $\mathrm{sc}_M(z', \succ) = \mathrm{sc}_D(z', \succ)$ όταν $\mathrm{sc}_D(z', \succ) > \Delta + 1$. Διαφορετικά, ισχύει ότι $\mathrm{sc}_M(z', \succ) = \Delta + 1$. Επειδή ο z' δεν αποτελεί νικητή κατά Dodgson για το $\succ$, ισχύει ότι $\mathrm{sc}_D(z', \succ) \geq \mathrm{sc}_D(y', \succ) + 1$ στην περίπτωση αυτή, και με χρήση της σχέσης (3.4) λαμβάνουμε

$$\mathrm{sc}_M(z', \succ) = \Delta + 1 \leq 2 \cdot \mathrm{sc}_D(y', \succ) + 1 \leq 2 \cdot \mathrm{sc}_D(z', \succ).$$

Συμπερασματικά, η τιμή κάθε υποψηφίου σύμφωνα με τον κανόνα M είναι το πολύ διπλάσια από τον βαθμό Dodgson αυτού. □

Γενικά, η προσέγγιση Dodgson M υπολογίζεται σε εκθετικό χρόνο. Όμως, μπορεί να υλοποιηθεί ώστε να εκτελείται σε πολυωνυμικό χρόνο όταν το m είναι σταθερά. Σε αυτή την ειδική περίπτωση ο αριθμός των διαφορετικών προφίλ με n ψηφοφόρους είναι πολυωνυμικός και η τιμή Dodgson μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια σε πολυωνυμικό χρόνο [6].

Η επόμενη πρόταση υποδεικνύει ότι ο κανόνας ψηφοφορίας M είναι η βέλτιστη δυνατή μονότονη προσέγγιση Dodgson. Αξίζει να σημειωθεί ότι δε βασίζεται σε κάποια υπόθεση σχετικά με την πολυπλοκότητα και, επομένως, ισχύει επίσης και για εκθετικού χρόνου προσεγγίσεις.

Θεώρημα 3.3.4. *Μία μονότονη προσέγγιση Dodgson δε μπορεί να έχει λόγο προσέγγιση μικρότερο του 2.*

Απόδειξη. Έστω k θετικός ακέραιος. Χρησιμοποιούμε ένα προφίλ προτιμήσεων $\succ$ (Πίνακας 3.1) με $18k$ ψηφοφόρους και πέντε υποψηφίους a, b, c, d, και e.

$\times k$	$\times k$	$\times k$	$\times k$	$\times k$	$\times k$	$\times 2k$	$\times 2k$	$\times 2k$	$\times 2k$	$\times 2k$	$\times 2k$
c	c	a	a	b	b	a	a	b	b	c	c
b	b	c	c	a	a	d	e	d	e	d	e
a	a	b	b	c	c	b	b	c	c	a	a
d	e	d	e	d	e	e	d	e	d	e	d
e	d	e	d	e	d	c	c	a	a	b	b

Πίνακας 3.1: Το προφίλ προτιμήσεων $\succ$ που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.4.

Το έλλειμμα των d και e σε σχέση με κάθε υποψήφιο a, b, και c είναι $3k+1$ ενώ ο d με τον e, έχουν έλλειμμα

$$\mathrm{defc}(d, e, \succ) = \mathrm{defc}(e, d, \succ) = 1.$$

Επιπλέον,

$$\mathrm{defc}(a, c, \succ) = \mathrm{defc}(b, a, \succ) = \mathrm{defc}(c, b, \succ) = k+1$$

ενώ τα λοιπά ελλείμματα είναι μηδενικά.

Επομένως, ο βαθμός Dodgson των d και e είναι τουλάχιστον $9k+4$. Επίσης, ο c έχει καταταχθεί από κάθε ψηφοφόρο είτε χαμηλότερα από τον a ή δύο θέσεις ψηλότερα από τον a. Αυτό συνεπάγεται ότι ο a πρέπει να τοποθετηθεί ψηλότερα κατά δύο θέσεις σε $k+1$ ψηφοφόρους προκειμένου να μετατραπεί σε νικητή κατά Condorcet. Αυτό είναι επαρκές αφού ο a γίνεται νικητής κατά Condorcet με την τοποθέτησή του κατά δύο θέσεις ψηλότερα σε $k+1$ ψηφοφόρους μεταξύ των εκείνων στην πρώτη και δεύτερη στήλη του προφίλ $\succ$. Έτσι, $\mathrm{sc}_D(a, \succ) = 2(k+1)$. Με ανάλογη επιχειρηματολογία καταλήγουμε στο ότι επίσης ισχύει

$$\mathrm{sc}_D(b, \succ) = \mathrm{sc}_D(c, \succ) = 2(k+1).$$

Θεωρούμε, τώρα, κάθε μονότονο προσεγγιστικό αλγόριθμο M' για την ψηφοφορία Dodgson. Δεδομένου του προφίλ $\succ$, αν επιστρέψει κάποιο από τους υποψηφίους d ή e ως νικητή τότε

$$\begin{aligned}
\mathrm{sc}_{M'}(a, \succ) &\geq \min\{\mathrm{sc}_{M'}(d, \succ), \mathrm{sc}_{M'}(e, \succ)\} \\
&\geq \min\{\mathrm{sc}_D(d, \succ), \mathrm{sc}_D(e, \succ)\} \\
&\geq 9k+4 > 4(k+1) = 2 \cdot \mathrm{sc}_D(a, \succ),
\end{aligned}$$

δηλαδή, ο λόγος προσέγγισης είναι μεγαλύτερος του 2.

Αν ο αλγόριθμος επιστρέψει τον υποψήφιο a ως νικητή, θεωρούμε το προφίλ $\succ^a$ στο οποίο ο a τοποθετείται ψηλότερα κατά μία θέση σε $2k$ ψηφοφόρους στην πέμπτη και έκτη στήλη του προφίλ $\succ$. Εξαιτίας της μονοτονίας, ο a θα έπρεπε να αποτελεί νικητή και στο προφίλ $\succ^a$. Επίσης, πλέον, ο c μπορεί να αποτελέσει νικητή κατά Condorcet αν τοποθετηθεί μία μόνο θέση ψηλότερα σε $k+1$ ψηφοφόρους μεταξύ των $2k$ ψηφοφόρων στην πέμπτη και έκτη στήλη του προφίλ $\succ^a$ και, επομένως, $\mathrm{sc}_D(c, \succ^a) = k+1$ ενώ ο βαθμός Dodgson του a στο $\succ^a$ είναι ίδιος με τον βαθμό στο $\succ$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{sc}_{M'}(c, \succ^a) &\geq \mathrm{sc}_{M'}(a, \succ^a) \geq \mathrm{sc}_D(a, \succ^a) \\
&= 2(k+1) = 2 \cdot \mathrm{sc}_D(c, \succ^a),
\end{aligned}$$

Δηλαδή, ο λόγος προσέγγισης είναι τουλάχιστον 2.

Αν ο αλγόριθμος επιστρέψει τον υποψήφιο b ως νικητή, θεωρούμε το προφίλ $\succ^b$ στο οποίο ο b τοποθετείται κατά μία θέση ψηλότερα σε $2k$ ψηφοφόρους στην πρώτη και δεύτερη στήλη του προφίλ

$\succ$. Εξαιτίας της μονοτονίας, ισχύει ότι ο b είναι νικητής και στο προφίλ $\succ^b$. Επίσης, πλέον, ο a μπορεί να αποτελέσει νικητή κατά Condorcet αν τοποθετηθεί ψηλότερα κατά μία μόνο θέση σε $k+1$ ψηφοφόρους μεταξύ των $2k$ ψηφοφόρων στην πρώτη και δεύτερη στήλη του προφίλ $\succ^b$ και, επομένως, $\mathrm{sc}_D(a, \succ^b) = k+1$. Με παραπλήσιες πράξεις, προκύπτει ότι ο λόγος προσέγγισης είναι τουλάχιστον 2.

Τέλος, αν ο αλγόριθμος επιστρέψει τον υποψήφιο c ως νικητή, θεωρούμε το προφίλ $\succ^c$ στο οποίο ο c τοποθετείται ψηλότερα κατά μία θέση σε $2k$ ψηφοφόρους στην τρίτη και τέταρτη στήλη του προφίλ $\succ$. Αυτή τη φορά ισχύει ότι $\mathrm{sc}_D(b, \succ^c) = k+1$, και επιτυγχάνουμε το κάτω φράγμα με τιμή 2 όπως πριν. Έτσι, έχουν καλυφθεί όλες οι πιθανές περιπτώσεις, και επαληθεύεται το θεώρημα. $\square$

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι στην προηγούμενη απόδειξη είναι δυνατόν να αντικατασταθεί κάθε στήλη με k ή $2k$ ψηφοφόρους μόνο με έναν ή δύο ψηφοφόρους, αντίστοιχα. Όμως, η απόδειξη αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι κάνει σαφές ότι ο λόγος προσέγγισης δε μπορεί να βελτιωθεί αν υποτεθεί μεγάλος ο αριθμός ψηφοφόρων. Προφανώς, είναι επίσης δυνατόν να αυξηθεί ο αριθμός των υποψηφίων με πρόσθεση περισσότερων υποψηφίων στο τέλος των προτιμήσεων των ψηφοφόρων.

3.3.2 Ένας μονότονος $\mathcal{O}(\log m)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια μονότονη προσέγγιση Dodgson πολυωνυμικού χρόνου που επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης των $\mathcal{O}(\log m)$. Δεδομένου του $\Omega(\log m)$ φράγματος μη-προσεγγισιμότητας για το βαθμό Dodgson [23], αυτός ο κανόνας είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος σε σχέση με αλγόριθμους πολυωνυμικού χρόνου. Για να είμαστε ακριβείς, είναι βέλτιστος σε έ-ναν παράγοντα 4, με την προϋπόθεση ότι τα προβλήματα στο $\mathcal{NP}$ δεν έχουν αλγόριθμους ψευδο-πολυωνυμικού χρόνου.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο βασικά εμπόδια που πρέπει να ξεπεραστούν προκειμένου να εφαρμόσουμε τη μονοτονοποίηση σε πολυωνυμικό χρόνο. Πρώτον, ο υπολογισμός του βαθμού Dodgson και το πρόβλημα απόφασης για την ανίχνευση του εάν ένας δεδομένος υποψήφιος είναι ο νικητής Dodgson σε ένα συγκεκριμένο προφίλ είναι υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα [6]. Έχουμε ξεπεράσει αυτό το εμπόδιο με τη χρήση ενός αλγόριθμου προσέγγισης Dodgson R πολυωνυμικού χρόνου από την [23] αντί για τον ίδιο το βαθμό Dodgson. Ακόμη και σε αυτή την περίπτωση, δεδομένου ενός προφίλ, θα πρέπει ακόμα να είμαστε σε θέση να ανιχνεύσουμε αν ένας υποψήφιος $y \in A$ είναι ο νικητής σύμφωνα με τον R σε κάποιο προφίλ του οποίου το τρέχον προφίλ είναι μια y-βελτίωση. Αν αυτή είναι η περίπτωση, τότε ο y θα πρέπει να περιλαμβάνεται στο νικητήριο σύνολο. Σημειώνουμε ότι, σε γενικές γραμμές, αυτό απαιτεί τον έλεγχο ενός εκθετικού αριθμού προφίλ προκειμένου να προσδιοριστεί το νικηφόρο σύνολο του τρέχοντος. Αντιμετωπίζουμε αυτό το δεύτερο εμπόδιο χρησιμοποιώντας την έννοια των *απαισιόδοξων εκτιμητών*. Πρόκειται για ποσότητες που ορίζονται από την άποψη του τρέχοντος προφίλ μόνο και χρησιμοποιούνται για να προσδιοριστούν οι νικηφόροι υποψήφιοι.

Προκειμένου να προσδιοριστεί ο αλγόριθμος R τον οποίο θα μονοτοποιήσουμε θεωρούμε έναν εναλλακτικό ορισμό του βαθμού Dodgson για έναν υποψήφιο $z^* \in A$ και ένα προφίλ $\succ \in \mathcal{L}^n$. Ορίζουμε το σύνολο $S_k^{\succ_i}(z^*)$ των υποψηφίων που ο z^* παρακάμπτει καθώς ωθείται k θέσεις πάνω στην προτίμηση του ψηφοφόρου i. Δηλώνουμε ως $\mathcal{S}^{\succ_i}(z^*)$ τη συλλογή όλων των πιθανών τέτοιων συνόλων για τον ψηφοφόρο i, δηλαδή,

$$\mathcal{S}^{\succ_i}(z^*) = \{S_k^{\succ_i}(z^*) : k = 1, ..., r_i(z^*, \succ) - 1\},$$

όπου το $r_i(z^*, \succ)$ υποδηλώνει την κατάταξη του υποψηφίου z^* στις προτιμήσεις του ψηφοφόρου $i \in N$ (π.χ., ο περισσότερο και ο λιγότερο προτιμώμενος υποψήφιος έχει θέση 1 και m, αντίστοιχα). Έστω $\mathcal{S}(z^*) = \bigcup_{i \in N} \mathcal{S}^{\succ_i}(z^*)$. Τότε, το πρόβλημα υπολογισμού του βαθμού Dodgson του υποψηφίου z^* στο προφίλ $\succ$ ισοδυναμεί με την επιλογή συνόλων από το $\mathcal{S}(z^*)$ με το ελάχιστο συνολικό μέγεθος, έτσι ώστε το πολύ ένα σύνολο επιλέγεται μεταξύ αυτών στο $\mathcal{S}^{\succ_i}(z^*)$ για κάθε παράγοντα $i \in N$ και κάθε υποψήφιο $z \in A \setminus \{z^*\}$ που εμφανίζεται σε τουλάχιστον $\mathrm{defc}(z^*, z, \succ)$ επιλεγμένα σύνολα. Αυτό μπορεί να εκφραστεί από το ακόλουθο ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i \in N} \sum_{k=1}^{r_i(z^*, \succ)-1} k \cdot \mathbf{x}\left(S_k^{\succ_i}(z^*)\right) \\
\text{subject to} \quad & \forall z \in A \setminus \{z^*\}, \\
& \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{S}^{\succ_i}(z^*) : z \in S} \mathbf{x}(S) \geq \mathrm{defc}(z^*, z, \succ) \\
& \forall i \in N, \sum_{S \in \mathcal{S}^{\succ_i}(z^*)} \mathbf{x}(S) \leq 1 \\
& \forall S \in \mathcal{S}(z^*), \ \mathbf{x}(S) \in \{0, 1\}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Η δυαδική μεταβλητή $\mathbf{x}(S)$ δείχνει εάν το σύνολο $S \in \mathcal{S}^{\succ_i}(z^*)$ επιλέγεται ($\mathbf{x}(S) = 1$) ή όχι ($\mathbf{x}(S) = 0$). Τώρα, ας εξετάσουμε τη χαλάρωση του ανωτέρω ακέραιου γραμμικού προγράμματος στην οποία ο τελευταίος περιορισμός χαλαρώνεται, και ετσι έχουμε $\mathbf{x}(S) \geq 0$. Ορίζουμε τον κανόνα ψηφοφορίας R που θέτει $\mathrm{sc}_R(z^*, \succ)$ ίσο με τη βέλτιστη τιμή του χαλαρωμένου γραμμικού προγράμματος πολλαπλασιαζόμενο με H_{m-1}, όπου H_k είναι ο k-οστός αρμονικός αριθμός. Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείχνουμε ότι

$$\mathrm{sc}_D(y, \succ) \leq \mathrm{sc}_R(y, \succ) \leq H_{m-1} \cdot \mathrm{sc}_D(y, \succ)$$

για κάθε υποψήφιο $y \in A$, δηλαδή ο R είναι μια προσέγγιση Dodgson με λόγο προσέγγισης H_{m-1}. Η ακόλουθη παρατήρηση είναι ανάλογη με την Παρατήρηση 3.3.1.

Παρατήρηση 3.3.5. Έστω $y \in A$ και έστω $\succ, \succ' \in \mathcal{L}^n$ προφίλ τέτοια ώστε το $\succ'$ να είναι μια y-βελτίωση του $\succ$. Τότε,

$$\mathrm{sc}_R(y, \succ') \leq \mathrm{sc}_R(y, \succ).$$

Παρουσιάζουμε τώρα ένα νέο κανόνα ψηφοφορίας Q μονοτονοποιώντας τον R. Ο κανόνας ψηφοφορίας Q ορίζει ένα σύνολο υποψηφίων $W(\succ)$ που είναι το σύνολο των νικητών σε ένα συγκεκριμένο προφίλ $\succ$. Στη συνέχεια, θέτει $\mathrm{sc}_Q(y, \succ) = 2 \cdot \mathrm{sc}_R(y^*, \succ)$ για κάθε υποψήφιο $y \in W(\succ)$, όπου y^* είναι ο νικητής σύμφωνα με τον κανόνα ψηφοφορίας R. Επιπλέον, θέτει $\mathrm{sc}_Q(y, \succ) = 2 \cdot \mathrm{sc}_R(y, \succ)$ για κάθε υποψήφιο $y \notin W(\succ)$.

Προκειμένου να καθοριστεί το σύνολο $W(\succ)$ θα χρησιμοποιήσουμε άλλο (ελαφρώς διαφορετικό) γραμμικό πρόγραμμα που καθορίζεται για τους δύο υποψήφιους $y, z^* \in A$ και ένα προφίλ $\succ \in \mathcal{L}^n$. Το νέο ΓΠ έχει το ίδιο σύνολο περιορισμών, όπως στη χαλάρωση του (3.5) που χρησιμοποιείται στον ορισμό του $\mathrm{sc}_R(z^*, \succ)$ και την ακόλουθη αντικειμενική συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{i \in N} \sum_{k=1}^{r_i(z^*,\succ)-1} k \cdot \mathbf{x}\left(S_k^{\succ_i}(z^*)\right) \\ & + \sum_{i \in N: y \succ_i z^*} \sum_{k=1}^{r_i(z^*,\succ)-r_i(y,\succ)-1} \mathbf{x}\left(S_k^{\succ_i}(z^*)\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ο *απαισιόδοξος εκτιμητής* $\mathrm{pe}(z^*, y, \succ)$ για τον υποψήφιο $z^* \in A$ σε σχέση με έναν άλλο υποψήφιο $y \in A \backslash \{z^*\}$ και ένα προφίλ $\succ \in \mathcal{L}^n$ ορίζεται ως η αντικειμενική αξία του ΓΠ (3.6) πολλαπλασιαζόμενο με H_{m-1}. Όπως θα φανεί σύντομα, ο απαισιόδοξος εκτιμητής $\mathrm{pe}(z^*, y, \succ')$ φράσσει εκ των άνω τον βαθμό των υποψηφίων z^* στο R για κάθε προφίλ $\succ$ έτσι ώστε το $\succ'$ είναι μια y-βελτίωση του $\succ$, εξ αυτού και η απαισιοδοξία όσον αφορά την εκτίμηση της βαθμολογίας του z^*. Οι απαισιόδοξοι εκτιμητές θα είναι το βασικό εργαλείο μας προκειμένου να μονοτοποιήσουμε τον R.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να ολοκληρώσουμε τον ορισμό του κανόνα ψηφοφορίας Q. Το σύνολο $W(\succ)$ ορίζεται ως εξής. Πρώτον, περιέχει όλους τους νικητές, σύμφωνα με τον κανόνα ψηφοφορίας R. Ένας υποψήφιος y που δεν είναι ένας νικητής υποψήφιος σύμφωνα με τον R περιλαμβάνεται στο σετ $W(\succ)$ αν $\mathrm{pe}(z, y, \succ) \geq \mathrm{sc}_R(y, \succ)$ για κάθε υποψήφιο $z \in A \setminus \{y\}$.

Σαφώς, ο Q είναι πολυωνυμικού χρόνου. Υπολογίζοντας τις βαθμολογίες όλων των υποψηφίων περιλαμβάνει την επίλυση m^2 γραμμικών προγραμμάτων πολυωνυμικού μεγέθους. Μετά επίσης αποδεικνύουμε ότι είναι και μονότονος. Αυτό γίνεται στο Λήμμα 3.3.8 με την χρήση μερικών ιδιοτήτων των απαισιόδοξων εκτιμητών. Η πρώτη ιδιότητα (που αναφέρεται στο Λήμμα 3.3.6) έχει μια μακριά και τεχνική απόδειξη που μπορεί να παραλειφθεί κατά την πρώτη ανάγνωση. Η δεύτερη (στο Λήμμα 3.3.7) προκύπτει εύκολα από τον ορισμό των απαισιόδοξων εκτιμητών.

Λήμμα 3.3.6. *Έστω $y, z^* \in A$ διαφορετικοί υποψήφιοι και έστω $\succ, \succ' \in \mathcal{L}^n$ δυο προφίλ τέτοια ώστε το $\succ'$ να είναι μια y-βελτίωση του $\succ$. Τότε, $pe(z^*, y, \succ') \geq pe(z^*, y, \succ)$.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το Λήμμα, αρκεί να εξετάσουμε μόνο την περίπτωση κατά την οποία το $\succ'$ λαμβάνεται από το $\succ$ μετακινώντας τον υποψήφιο y προς τα πάνω μια θέση στην προτίμηση ενός μόνο παράγοντα $j \in N$ (δηλαδή, $r_j(y, \succ) = r_j(y, \succ') + 1$).

Εξετάζουμε το ΓΠ (3.6) που χρησιμοποιείται στον ορισμό του $\text{pe}(z^*, y, \succ')$ και έστω $\mathbf{x}$ είναι μια βέλτιστη λύση. Θα δείξουμε πώς να μετατρέψουμε αυτή τη λύση σε μια εφικτή λύση $\bar{\mathbf{x}}$ για το ΓΠ (3.6) που χρησιμοποιείται στον ορισμό του $\text{pe}(z^*, y, \succ)$ με τέτοιο τρόπο ώστε η αντικειμενική τιμή της να μην είναι μεγαλύτερη από εκείνη του πρώην ΓΠ. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε ένα απλοποιημένο συμβολισμό που παραλείπει τον z^*, όταν είναι σαφές από τα συμφραζόμενα. Ειδικότερα, χρησιμοποιούμε $\mathcal{S}^{\succ_i}$ αντί για $\mathcal{S}^{\succ_i}(z^*)$ και $S_k^{\succ_i}$ αντί για $S_k^{\succ_i}(z^*)$.

Ορίζουμε τη λύση $\bar{\mathbf{x}}$ όπως παρακάτω. Πρώτα, ορίζουμε $\bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_i}) = \mathbf{x}(S_k^{\succ'_i})$ για κάθε ψηφοφόρο $i \in N \setminus \{j\}$ και $k = 1, 2, ..., r_j(z^*, \succ) - 1$. Τότε, ξεχωρίζουμε μεταξύ τριών περιπτώσεων ανάλογα με το τύπο του ψηφοφόρου j.

Λέμε οτί ο ψηφοφόρος j είναι τύπου BB αν ο y κατατάσσεται χαμηλότερα από τον z^* και στα δυο προφίλ $\succ$ και $\succ'$. Σε αυτή τη περίπτωση παρατηρούμε ότι $r_j(z^*, \succ) = r_j(z^*, \succ')$ και $S_k^{\succ_j} = S_k^{\succ'_j}$ για $k = 1, ..., r_j(z^*, \succ) - 1$. Θέτουμε $\bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_j}) = \mathbf{x}(S_k^{\succ'_j})$, για $k = 1, 2, ..., r_j(z^*, \succ) - 1$.

Λέμε ότι ο ψηφοφόρος j είναι τύπου AA αν ο y κατατάσσεται υψηλότερα από τον z^* και στα δυο προφίλ $\succ$ και $\succ'$. Επίσης, έχουμε $r_j(z^*, \succ) = r_j(z^*, \succ')$. Σε αυτή τη περίπτωση θέτουμε

- $\bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_j}) = \mathbf{x}(S_k^{\succ'_j})$ για $k = 1, ..., r_j(z^*, \succ) - r_j(y, \succ) - 1$·
- $\bar{\mathbf{x}}(S_{r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)}^{\succ_j}) = 0$·
- $\bar{\mathbf{x}}(S_{r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)+1}^{\succ_j}) = \mathbf{x}(S_{r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)}^{\succ'_j}) + \mathbf{x}(S_{r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)+1}^{\succ'_j})$·
- $\bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_j}) = \mathbf{x}(S_k^{\succ'_j})$ για $k = r_j(z^*, \succ) - r_j(y, \succ) + 2, ..., r_j(z^*, \succ) - 1$.

Λέμε ότι ο ψηφοφόρος j είναι τύπου AB αν ο y κατατάσσεται υψηλότερα από τον z^* στο $\succ'$ αλλά χαμηλότερα από τον z^* στο $\succ$. Έχουμε $r_j(z^*, \succ') = r_j(z^*, \succ) + 1$ σε αυτή τη περίπτωση. Θέτουμε $\bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_j}) = \mathbf{x}(S_{k+1}^{\succ'_j})$ για $k = 1, ..., r_j(z^*, \succ) - 1$.

Τώρα θεωρούμε το ΓΠ (3.6) που χρησιμοποιείται στον ορισμό του $\text{pe}(z^*, y, \succ)$. Σαφώς, δεδομένου ότι η λύση $\mathbf{x}$ είναι μη αρνητική, η λύση $\bar{\mathbf{x}}$ είναι μη αρνητική επίσης. Οι παραπάνω ορισμοί εγγυώνται ότι

$$\sum_{S \in \mathcal{S}^{\succ_i}} \bar{\mathbf{x}}(S) \leq \sum_{S \in \mathcal{S}^{\succ'_i}} \mathbf{x}(S)$$

για κάθε παράγοντα $i \in N$ (στην πραγματικότητα, τα δύο αθροίσματα είναι ίσα, όταν $i \in N \setminus \{j\}$ ή $i = j$ και ο j είναι τύπου BB ή AA). Ως εκ τούτου, το δεύτερο σύνολο των περιορισμών ικανοποιείται εφόσον ο $\mathbf{x}$ ικανοποιεί το δεύτερο σύνολο περιορισμών του ΓΠ (3.6) που χρησιμοποιείται στον ορισμό του $\text{pe}(z^*, y, \succ')$.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\text{defc}(z^*, z, \succ) = \text{defc}(z^*, z, \succ')$ για κάθε υποψήφιο $z \in A \setminus \{y, z^*\}$ εφόσον η σχετική κατάταξη των z και z^* στην προτίμηση του κάθε ψηφοφόρου είναι η ίδια και στα δύο προφίλ $\succ$ και $\succ'$. Επίσης, ο ορισμός της λύσης $\bar{\mathbf{x}}$ εγγυάται ότι

$$\sum_{S\in\mathcal{S}^{\succ_i}:z\in S}\bar{\mathbf{x}}(S)=\sum_{S\in\mathcal{S}^{\succ'_i}:z\in S}\mathbf{x}(S)$$

για κάθε παράγοντα $i\in N$ και κάθε υποψήφιο $z\in A\setminus\{y,z^*\}$. Ως εκ τούτου, το πρώτο σύνολο περιορισμών ικανοποιείται για κάθε υποψήφιο $z\in A\setminus\{y,z^*\}$ δεδομένου ότι η λύση $\mathbf{x}$ ικανοποιεί το πρώτο σύνολο περιορισμών του ΓΠ (3.6) στον ορισμό του $\mathrm{pe}(z^*,y,\succ')$.

Όσον αφορά τον υποψήφιο y, θα εξετάσουμε πρώτα τις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο ψηφοφόρος j είναι του τύπου BB ή AA. Και στις δύο περιπτώσεις, η σχετική κατάταξη των y και z^* σε κάθε παράγοντα είναι η ίδια και στα δύο προφίλ $\succ$ και $\succ'$. Ως εκ τούτου, $\mathrm{defc}(z^*,y,\succ)=\mathrm{defc}(z^*,y,\succ')$. Επιπλέον, σε αμφότερες τις περιπτώσεις, ο ορισμός της λύσης $\bar{\mathbf{x}}$ εγγυάται ότι

$$\sum_{S\in\mathcal{S}^{\succ_i}:y\in S}\bar{\mathbf{x}}(S)\geq\sum_{S\in\mathcal{S}^{\succ'_i}:y\in S}\mathbf{x}(S)$$

για κάθε παράγοντα $i\in N$ (στην πραγματικότητα, τα δύο αθροίσματα είναι ίσα, όταν $i\in N\setminus\{j\}$ ή $i=j$ και ο j είναι τύπου BB). Ως εκ τούτου, και στις δύο περιπτώσεις, ο πρώτος περιορισμός για τον υποψήφιο y ικανοποιείται εφόσον ο $\mathbf{x}$ ικανοποιεί τον αντίστοιχο περιορισμό του ΓΠ (3.6) στον ορισμό του $\mathrm{pe}(z^*,y,\succ')$.

Αν ο ψηφοφόρος j είναι τύπου AB, ξεχωρίζουμε επιπλέον μεταξύ των δυο περιπτώσεων. Αν $\mathrm{defc}(z^*,y,\succ')=0$ τότε,

$$\sum_{i\in N}\sum_{S\in\mathcal{S}^{\succ_i}:y\in S}\bar{\mathbf{x}}(S)\geq 0=\mathrm{defc}(z^*,y,\succ).$$

Ειδάλλως (αν $\mathrm{defc}(z^*,y,\succ')\geq 1$), παρατηρούμε ότι $\mathrm{defc}(z^*,y,\succ)=\mathrm{defc}(z^*,y,\succ')-1$. Εφόσον κανένα σύνολο στο $\mathcal{S}^{\succ_i}$ δεν περιέχει τον y, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N}\sum_{S\in\mathcal{S}^{\succ_i}:y\in S}\bar{\mathbf{x}}(S) &= \sum_{i\in N\setminus\{j\}}\sum_{S\in\mathcal{S}^{\succ_i}:y\in S}\bar{\mathbf{x}}(S)\\
&= \sum_{i\in N\setminus\{j\}}\sum_{S\in\mathcal{S}^{\succ'_i}:y\in S}\mathbf{x}(S)\\
&= \sum_{i\in N}\sum_{S\in\mathcal{S}^{\succ'_i}:y\in S}\mathbf{x}(S)-\sum_{S\in\mathcal{S}^{\succ'_j}:y\in S}\mathbf{x}(S)\\
&\geq \sum_{i\in N}\sum_{S\in\mathcal{S}^{\succ'_i}:y\in S}\mathbf{x}(S)-1\\
&\geq \mathrm{defc}(z^*,y,\succ')-1\\
&= \mathrm{defc}(z^*,y\succ),
\end{aligned}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι η λύση $\bar{\mathbf{x}}$ ικανοποιεί τον πρώτο περιορισμό του ΓΠ (3.6) που χρησιμοποιείται στον ορισμό του $\mathrm{pe}(z^*,y,\succ)$ για τον υποψήφιο y. Επισημαίνουμε ότι οι δύο τελευταίες ανισότητες ισχύουν, δεδομένου ότι η λύση $\mathbf{x}$ ικανοποιεί τους περιορισμούς στο ΓΠ (3.6) που χρησιμοποιείται στον ορισμό του $\mathrm{pe}(z^*, y, \succ')$.

Μέχρι στιγμής, έχουμε δείξει ότι η $\bar{\mathbf{x}}$ είναι μια εφικτή λύση για το ΓΠ (3.6) που χρησιμοποιείται στον ορισμό του $\mathrm{pe}(z^*, y, \succ)$. Απομένει να φράξουμε εκ των άνω την αντικειμενική τιμή (στόχο) του από τη βέλτιστη τιμή του στο ΓΠ (3.6) που χρησιμοποιείται στον ορισμό του $\mathrm{pe}(z^*, y, \succ')$. Προκειμένου να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί, για κάθε παράγοντα $i \in N$, ορίζουμε

$$\mathbf{O}_i = \sum_{k=1}^{r_i(z^*,\succ)-1} k \cdot \bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_i}) + \sum_{k=1}^{r_i(z^*,\succ)-r_i(y,\succ)-1} \bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_i})$$

αν $y \succ_i z^*$ και

$$\mathbf{O}_i = \sum_{k=1}^{r_i(z^*,\succ)-1} k \cdot \bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_i})$$

διαφορετικά. Η ποσότητα $\mathbf{O}'_i$ ορίζεται ανάλογα με την αντικατάσταση του $\succ$ από το $\succ'$ και της $\bar{\mathbf{x}}$ με $\mathbf{x}$. Παρατηρούμε ότι οι αντικειμενικές τιμές του ΓΠ (3.6) που χρησιμοποιούνται στον ορισμό του $\mathrm{pe}(z^*, y, \succ)$ και του $\mathrm{pe}(z^*, y, \succ')$ για τις λύσεις $\bar{\mathbf{x}}$ και$\mathbf{x}$ είναι $\sum_{i\in N} \mathbf{O}_i$ και $\sum_{i\in N} \mathbf{O}'_i$, αντίστοιχα. Επίσης, ο ορισμός της λύσης $\bar{\mathbf{x}}$ οδηγεί στο ότι $\mathbf{O}_i = \mathbf{O}'_i$ όταν $i \in N \setminus \{j\}$ ή $i = j$ και j είναι τύπου BB. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{O}_j \le \mathbf{O}'_j$ όταν ο j είναι τύπου AA ή AB.

Πρώτα, θεωρούμε την περίπτωση όπου ο ψηφοφόρος j είναι τύπου AA. Από τον ορισμό του $\mathbf{O}_j$ και από αναδιάταξη των αθροισμάτων, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}_j &= \sum_{k=1}^{r_j(z^*,\succ)-1} k \cdot \bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_j}) + \sum_{k=1}^{r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)-1} \bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_j}) \\
&= \sum_{k=1}^{r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)-1} (k+1) \cdot \bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_j}) + (r_j(z^*,\succ) - r_j(y,\succ)) \cdot \bar{\mathbf{x}}(S^{\succ_j}_{r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)}) \\
&\quad + (r_j(z^*,\succ) - r_j(y,\succ) + 1) \cdot \bar{\mathbf{x}}(S^{\succ_j}_{r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)+1}) + \sum_{k=r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)+2}^{r_j(z^*,\succ)-1} k \cdot \bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_j}).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ισότητα, τον ορισμό των μεταβλητών $\bar{\mathbf{x}}$ στα σύνολα του ψηφοφόρου j, τις ισότητες $r_j(z^*,\succ) = r_j(z^*,\succ')$ και $r_j(y,\succ) = r_j(y,\succ')+1$, και τον ορισμό του $\mathbf{O}'_j$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mathbf{O}_j &= \sum_{k=1}^{r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)-1} (k+1)\cdot \mathbf{x}(S_k^{\succ'_j}) + (r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ))\cdot 0 \\
&\quad +(r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)+1)\cdot\left(\mathbf{x}(S^{\succ'_j}_{r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)}) + \mathbf{x}(S^{\succ'_j}_{r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)+1})\right) \\
&\quad + \sum_{k=r_j(z^*,\succ)-r_j(y,\succ)+2}^{r_j(z^*,\succ)-1} k\cdot \mathbf{x}(S_k^{\succ'_j}) \\
&= \sum_{k=1}^{r_j(z^*,\succ')-r_j(y,\succ')-2} (k+1)\cdot \mathbf{x}(S_k^{\succ'_j}) \\
&\quad +(r_j(z^*,\succ')-r_j(y,\succ'))\cdot\left(\mathbf{x}(S^{\succ'_j}_{r_j(z^*,\succ')-r_j(y,\succ')-1}) + \mathbf{x}(S^{\succ'_j}_{r_j(z^*,\succ')-r_j(y,\succ')})\right) \\
&\quad + \sum_{k=r_j(z^*,\succ')-r_j(y,\succ')+1}^{r_j(z^*,\succ')-1} k\cdot \mathbf{x}(S_k^{\succ'_j}) \\
&= \sum_{k=1}^{r_j(z^*,\succ')-1} k\cdot \mathbf{x}(S_k^{\succ'_j}) + \sum_{k=1}^{r_j(z^*,\succ')-r_j(y,\succ')-1} \mathbf{x}(S_k^{\succ'_j}) \\
&= \mathbf{O}'_j.
\end{aligned}
$$

Τώρα, εξετάζουμε την περίπτωση όπου ο ψηφοφόρος j είναι τύπου AB και υπενθυμίζουμε ότι $z^* \succ_j y$ και $y \succ'_j z^*$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $\mathbf{O}_J$, τον ορισμό των μεταβλητών $\bar{\mathbf{x}}$ στα σύνολα του ψηφοφόρου j, την ισότητα $r_j(z^*,\succ) = r_j(z^*,\succ')-1$, και τον ορισμό του $\mathbf{O}'_j$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathbf{O}_j &= \sum_{k=1}^{r_j(z^*,\succ)-1} k\cdot \bar{\mathbf{x}}(S_k^{\succ_j}) \\
&= \sum_{k=1}^{r_j(z^*,\succ)-1} k\cdot \mathbf{x}(S_{k+1}^{\succ'_j}) \\
&= \sum_{k=2}^{r_j(z^*,\succ')-1} (k-1)\cdot \mathbf{x}(S_k^{\succ'_j}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{r_j(z^*,\succ')-1} k\cdot \mathbf{x}(S_k^{\succ'_j}) + \sum_{k=1}^{r_j(z^*,\succ')-r_j(y,\succ')-1} \mathbf{x}(S_k^{\succ'_j}) \\
&= \mathbf{O}'_j.
\end{aligned}
$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Λήμματος. □

Λήμμα 3.3.7. *Έστω $y, z^* \in A$ διαφορετικοί υποψήφιοι και έστω $\succ \in \mathcal{L}^n$ ένα προφίλ. Τότε, $sc_R(z^*,\succ) \leq pe(z^*,y,\succ) \leq 2\cdot sc_R(z^*,\succ)$.*

Απόδειξη. Το λήμμα ακολουθεί απευθείας από τις παρατηρήσεις ότι η αντικειμενική τιμή του γραμμικού προγράμματος (3.6) φράσσεται από κάτω από την αντικειμενική τιμή του χαλαρωμένου γραμμικού προγράμματος (3.5) και, επίσης, φράσσεται εκ των άνω από το τελευταίο πολλαπλασιαζόμενο επί 2. □

Λήμμα 3.3.8. *Ο κανόνας ψηφοφορίας Q είναι μονότονος.*

Απόδειξη. Έστω $y \in A$ και θεωρούμε ένα προφίλ $\succ \in \mathcal{L}^n$, έτσι ώστε $y \in W(\succ)$. Θα δείξουμε ότι $y \in W(\succ')$ για κάθε προφίλ $\succ'$ το οποίο είναι μια y-βελτίωση του $\succ$. Αυτό σαφώς ισχύει αν ο y είναι ένας νικητής υποψήφιος σύμφωνα με τον R στο $\succ'$. Εάν αυτό δεν συμβαίνει, γίνεται διάκριση μεταξύ δύο περιπτώσεων:

Περίπτωση 1. Ο y είναι ο νικητής σύμφωνα με το R στο $\succ$. Τότε για κάθε υποψήφιο $z \in A \setminus \{y\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{pe}(z, y, \succ') &\geq \mathrm{pe}(z, y, \succ) \geq \mathrm{sc}_R(z, \succ) \geq \mathrm{sc}_R(y, \succ) \\ &\geq \mathrm{sc}_R(y, \succ'), \end{aligned}$$

επομένως $y \in W(\succ')$. Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από το Λήμμα 3.3.6, η δεύτερη προκύπτει από το Λήμμα 3.3.7, η τρίτη είναι αληθής εφόσον ο y είναι ο νικητής στο R στο προφίλ $\succ$, και η τέταρτη προκύπτει από την Παρατήρηση 3.3.5.

Περίπτωση 2. Ο y δεν είναι νικητής σύμφωνα με το R στο $\succ$. Εφόσον $y \in W(\succ)$ πρέπει να ισχύει ότι $\mathrm{pe}(z, y, \succ) \geq \mathrm{sc}_R(y, \succ)$ για κάθε υποψήφιο $z \in A \setminus \{y\}$. Επομένως έχουμε ότι

$$\mathrm{pe}(z, y, \succ') \geq \mathrm{pe}(z, y, \succ) \geq \mathrm{sc}_R(y, \succ) \geq \mathrm{sc}_R(y, \succ')$$

για κάθε υποψήφιο $z \in A \setminus \{y\}$ και, έτσι, $y \in W(\succ')$. Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από το Λήμμα 3.3.6 και η τρίτη προκύπτει από την Παρατήρηση 3.3.5. □

Το παρακάτω Λήμμα παρέχει το επιθυμητό φράγμα στο λόγο προσέγγισης.

Λήμμα 3.3.9. *Ο Q είναι ένας Dodgson προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης $2H_{m-1}$.*

Απόδειξη. Έχουμε να δείξουμε ότι

$$\mathrm{sc}_D(y, \succ) \leq \mathrm{sc}_Q(y, \succ) \leq 2H_{m-1} \cdot \mathrm{sc}_D(y, \succ)$$

για κάθε υποψήφιο $y \in A$ και προφίλ $\succ \in \mathcal{L}^n$. Αυτή είναι ξεκάθαρα η περίπτωση αν ο y είναι ο νικητής σύμφωνα με τον R ή $y \notin W(\succ)$ εφόσον $\mathrm{sc}_Q(y, \succ) = 2 \cdot \mathrm{sc}_R(y, \succ)$ (από τον ορισμό του Q) και

$$\mathrm{sc}_D(y, \succ) \leq \mathrm{sc}_R(y, \succ) \leq H_{m-1} \cdot \mathrm{sc}_D(y, \succ)$$

εφόσον ο R είναι Dodgson προσεγγιστικός με λόγο H_{m-1}.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο y δεν είναι νικητής σύμφωνα με τον R, αλλά ανήκει στο $W(\succ)$. Έστω ότι ο z είναι ο νικητής, σύμφωνα με το R. Εφόσον $y \in W(\succ)$, θα πρέπει να είναι η υπόθεση ότι $\mathrm{pe}(z, y, \succ) \geq \mathrm{sc}_R(y, \succ)$. Έτσι, χρησιμοποιώντας επιπλέον τον ορισμό του Q του Λήμματος 3.3.7, και του γεγονότος ότι ο R είναι μια προσέγγιση Dodgson, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{sc}_Q(y, \succ) &= 2 \cdot \mathrm{sc}_R(z, \succ) \geq \mathrm{pe}(z, y, \succ) \geq \mathrm{sc}_R(y, \succ) \\ &\geq \mathrm{sc}_D(y, \succ). \end{aligned}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Q, το γεγονός ότι z είναι νικητής σύμφωνα με τον R, και τον λόγο προσέγγισης του R, έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathrm{sc}_Q(y, \succ) &= 2 \cdot \mathrm{sc}_R(z, \succ) \leq 2 \cdot \mathrm{sc}_R(y, \succ) \\ &\leq 2H_{m-1} \cdot \mathrm{sc}_D(y, \succ). \end{aligned}$$

□

Συνοψίζουμε την παραπάνω συζήτηση με το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.3.10. *Ο Q είναι ένας μονότονος Dodgson προσεγγιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου με λόγο προσέγγισης $2H_{m-1}$.*

3.4 Ομοιογένεια

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματά μας σε ομοιογενείς προσεγγίσεις Dodgson. Ένας κανόνας ψηφοφορίας είναι *ομοιογενής* αν η αντιγραφή του εκλογικού σώματος, δηλαδή, η αντιγραφή του προφίλ προτίμησης, δεν αλλάζει το αποτέλεσμα των εκλογών. Ένα παράδειγμα, που παρουσιάστηκε από τον Brandt [20], και αποδεικνύει ότι ο κανόνας Dodgson αποτυγχάνει στην ομοιογένεια μπορεί να βρεθεί στον Πίνακα 3.2. Η διαίσθηση είναι ότι αν οι υποψήφιοι x και y είναι ισόπαλοι σε μια ανά ζεύγος εκλογή, το έλλειμμα του x έναντι του y δεν αυξάνει με διπλασιασμό του προφίλ, ενώ αν ο x αυστηρά χάνει από τον y σε μια ανά ζεύγος εκλογή τότε το έλλειμμα είναι ανάλογο του αριθμού των αντιγράφων.

$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 1$	$\times 1$
d	b	c	d	a	a	d
c	c	a	b	b	d	a
a	a	b	c	c	b	b
b	d	d	a	d	c	c

Πίνακας 3.2: Ένα παράδειγμα που αποδεικνύει ότι ο κανόνας του Dodgson δεν πληροί την ομοιογένεια. Μια στήλη από $\times k$ αντιπροσωπεύει k πανομοιότυπους ψηφοφόρους. Στο παραπάνω προφίλ, ο a είναι ο νικητής Dodgson με βαθμό 3. Πολλαπλασιάζοντας το εκλογικό σώμα τρεις φορές παίρνουμε ένα προφίλ στο οποίο ο νικητής είναι ο d με βαθμό 6.

3.4.1 Ο απλοποιημένος κανόνας του Dodgson

Ο Tideman [121, σελίδες 199-201] καθορίζει τον ακόλουθο απλοποιημένο κανόνα Dodgson και αποδεικνύει ότι είναι μονότονος και ομοιογενής. Θεωρούμε ένα προφίλ $\succ \in \mathcal{L}^n$. Εάν ένας υποψήφιος είναι νικητής Condorcet, τότε αυτός ο υποψήφιος είναι ο μοναδικός νικητής. Σε αντίθετη περίπτωση, ο απλοποιημένος κανόνας Dodgson ορίζει μια βαθμολογία για κάθε υποψήφιο και ο υποψήφιος με τον ελάχιστο βαθμό κερδίζει. Σύμφωνα με τον απλοποιημένο κανόνα Dodgson, η βαθμολογία ενός υποψηφίου x είναι

$$\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x, \succ) \;=\; \sum_{y \in A \setminus \{x\}} \max\{0, n - 2 \cdot |\{i \in N : x \succ_i y\}|\}.$$

Παρατηρούμε ότι το $\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x, \succ)$ μπορεί να είναι μικρότερο από το βαθμό Dodgson του x και, ως εκ τούτου, ο ορισμός αυτός δεν αντιστοιχεί σε μια προσέγγιση Dodgson. Για παράδειγμα, σε προφίλ με ζυγό αριθμό ψηφοφόρων, το $\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x, \succ)$ είναι 0, όταν ο x είναι ισόπαλος με κάποιους υποψήφιους και νικά τους υπόλοιπους. Ως εκ τούτου, παρουσιάζουμε έναν εναλλακτικό ορισμό του απλοποιημένου κανόνα Dodgson ως προσέγγιση Dodgson με την κλιμάκωση του αρχικού ορισμού. Αν ένας υποψήφιος x είναι νικητής Condorcet, τότε έχει βαθμό $\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}'}(x, \succ) = 0$. Διαφορετικά:

$$\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}'}(x, \succ) \;=\; m \cdot \mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x, \succ) + m(\log m + 1).$$

Είναι σαφές ότι αυτός ο εναλλακτικός ορισμός είναι ισοδύναμος με το αρχικό του απλοποιημένου κανόνα Dodgson, με την έννοια ότι εκλέγει το ίδιο σύνολο υποψηφίων. Είναι επίσης σαφές ότι το $\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x, \succ)$ μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο, και, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ο Td είναι γνωστό ότι είναι μονότονος και ομοιογενής. Ως εκ τούτου, προκειμένου να αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα αρκεί να αποδείξουμε ότι ο Td$'$ είναι μια προσέγγιση Dodgson και να φράξουμε το λόγο προσέγγισης του.

Θεώρημα 3.4.1. *Ο Td$'$ είναι ένας μονότονος, ομοιογενής, Dodgson προσεγγιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου με λόγο προσέγγισης $\mathcal{O}(m \log m)$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι, δεδομένου οποιουδήποτε προφίλ $\succ \in \mathcal{L}^N$ και υποψηφίου $x \in A$, ισχύει ότι το $\mathrm{sc}_D(x, \succ) \leq \mathrm{sc}_{\mathrm{Td}'}(x, \succ) \leq m(\log m + 3) \cdot \mathrm{sc}_D(x, \succ)$. Θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία ο x δεν είναι νικητής Condorcet διότι άλλως οι ανισότητες σαφώς ισχύουν.

Για να αποδείξουμε ότι ο Td$'$ είναι μια προσέγγιση Dodgson γίνεται διάκριση μεταξύ δύο περιπτώσεων.

Εάν ο αριθμός των ψηφοφόρων είναι περιττός, τότε το $\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x, \succ)$ μπορεί να εκφραστεί από την άποψη των ελλειμμάτων των υποψηφίων x έναντι των άλλων υποψηφίων ως εξής:

$$\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x,\succ) \quad = \quad \sum_{y\in A\setminus\{x\}} \max\{0, 2\cdot \mathrm{defc}(x,y,\succ)-1\}.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος του παραπάνω αθροίσματος είναι μη μηδενικός μόνο όταν $\mathrm{defc}(x,y,\succ) > 0$. Εφόσον $2\cdot\mathrm{defc}(x,y,\succ)-1 \geq \mathrm{defc}(x,y,\succ)$ σε αυτή την περίπτωση, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}'}(x,\succ) &= m\cdot \mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x,\succ) + m(\log m+1)\\
&> m\cdot \mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x,\succ)\\
&\geq m\sum_{y\in A\setminus\{x\}} \mathrm{defc}(x,y,\succ)\\
&\geq \mathrm{sc}_D(x,\succ).
\end{aligned}$$

Εάν ο αριθμός των ψηφοφόρων είναι άρτιος, τότε το $\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x,\succ)$ μπορεί να εκφραστεί από την άποψη των ελλειμμάτων του υποψηφίων x έναντι των άλλων υποψηφίων ως εξής:

$$\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x,\succ) \quad = \quad \sum_{y\in A\setminus\{x\}} \max\{0, 2\cdot \mathrm{defc}(x,y,\succ)-2\}. \tag{3.7}$$

Έστω

$$S_x = \{y\in A\setminus\{x\} : \mathrm{defc}(x,y,\succ)\geq 2\}$$

και

$$T_x = \{y\in A\setminus\{x\} : \mathrm{defc}(x,y,\succ) = 1\}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι αρκεί να ωθήσουμε τον x στην πρώτη θέση των προτιμήσεων το πολύ $\log m+1$ ψηφοφόρων, προκειμένου να καλύψει τα ελλείμματα ενάντια των υποψηφίων στο T_x. Δεδομένου ότι ο αριθμός των ψηφοφόρων n είναι άρτιος, το γεγονός ότι $\mathrm{defc}(x,y,\succ)=1$ σημαίνει ότι ακριβώς $n/2$ ψηφοφόροι κατατάσσουν τον x πάνω από τον y. Για κάθε $i\in N$, έστω $A_i = \{y\in T_x : \ y\succ_i x\}$. Από την αρχή του περιστεριώνα υπάρχει ένας ψηφοφόρος i_1 τέτοιος ώστε $|A_{i_1}|\geq |T_x|/2$, προσθέτουμε i_1 στην επικάλυψη μας, και δηλώνουμε $X_1 = T_x\setminus A_{i_1}$. Στη συνέχεια, πρέπει να υπάρχει ένας ψηφοφόρος i_2 τέτοιος ώστε $|A_{i_2}\cap X_1|\geq \frac{|X_1|}{2}$. Προσθέτουμε τον i_2 στην επικάλυψή μας, και ορίζουμε το $X_2 = X_1\setminus A_{i_2}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά με τον τρόπο αυτό, έχουμε καλύψει όλους τους υποψήφιους στο T_x μετά από $\log|T_x|+1\leq \log m+1$ βήματα.

Επιπλέον, προκειμένου να κάνουμε τον x να νικήσει τους υποψήφιους στο S_x αρκεί να τον ωθήσουμε στην κορυφή των προτιμήσεων το πολύ $\sum_{y\in S_x}\mathrm{defc}(x,y,\succ)$ ψηφοφόρων. Ως εκ τούτου, ο βαθμός Dodgson του x είναι

$$\mathrm{sc}_D(x,\succ) \quad \leq \quad m\sum_{y\in S_x}\mathrm{defc}(x,y,\succ) + m(\log m+1).$$

0	1	2	...	2^{r-1}	$2^{r-1}+1$	...	2^r-1
b	b	a	...	a	$X_{2^{r-1}+1}$	...	X_{2^r-1}
a	a	X_2	...	$X_{2^{r-1}}$	Z	...	Z
Y	X_1	Y	...	Y	b	...	b
Z	Z	b	...	b	Y	...	Y
X	Y	Z	...	Z	$X\setminus X_{2^{r-1}+1}$	...	$X\setminus X_{2^r-1}$
	$X\setminus X_1$	$X\setminus X_2$	...	$X\setminus X_{2^{r-1}}$	a	...	a

Πίνακας 3.3: Το προφίλ προτίμησης $\succ$ που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.2.

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος του αθροίσματος στο αντίστοιχο ορισμό του $\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x,\succ)$ στην ισότητα (3.7) είναι μη μηδενικός μόνο όταν $\mathrm{defc}(x,y,\succ)\geq 2$ (δηλαδή, όταν $y\in S_x$). Εφόσον $2\cdot\mathrm{defc}(x,y,\succ)-2\geq\mathrm{defc}(x,y,\succ)$ σε αυτή την περίπτωση, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}'}(x,\succ) &= m\cdot\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x,\succ)+m(\log m+1)\\ &\geq m\sum_{y\in S_x}\mathrm{defc}(x,y,\succ)+m(\log m+1)\\ &\geq \mathrm{sc}_D(x,\succ).\end{aligned}$$

Έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη ότι ο Td' είναι μια προσέγγιση Dodgson. Για να αποδείξουμε το φράγμα για το λόγο προσέγγισης, και στις δύο περιπτώσεις έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}'}(x,\succ) &= m\cdot\mathrm{sc}_{\mathrm{Td}}(x,\succ)+m(\log m+1)\\ &\leq 2m\sum_{y\in A\setminus\{x\}}\mathrm{defc}(x,y,\succ)+m(\log m+1)\\ &\leq m(\log m+3)\cdot\mathrm{sc}_D(x,\succ).\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει εφόσον το $\mathrm{sc}_D(x,\succ)$ φράσσεται από κάτω και από το $\sum_{y\in A\setminus\{x\}}\mathrm{defc}(x,y,\succ)$ όσο και από το 1. □

3.4.2 Κάτω φράγμα

Ακολούθως δείχνουμε ότι ο Td' είναι η ασυμπτωτικά βέλτιστη ομοιογενής προσέγγιση Dodgson αποδεικνύοντας ένα αντίστοιχο κάτω φράγμα για το λόγο προσέγγισης των ομοιογενών προσεγγίσεων Dodgson. Το κάτω όριο δεν βασίζεται σε οποιεσδήποτε υποθέσεις πολυπλοκότητας και ισχύει επίσης για εκθετικού χρόνου προσεγγίσεις Dodgson. Αυτό είναι εντυπωσιακό, δεδομένου ότι, όπως αναφέρεται στο Θεώρημα 3.4.1, ο Td' είναι επίσης μονότονος και πολυωνυμικού χρόνου.

Θεώρημα 3.4.2. *Οποιοσδήποτε ομοιογενής Dodgson προσεγγιστικός αλγόριθμος έχει λόγο προσέγγισης τουλάχιστον $\Omega(m\log m)$.*

Η απόδειξη αυτή βασίζεται στην κατασκευή ενός προφίλ προτίμησης με έναν υποψήφιο $b \in A$ που νικά ορισμένους από τους υποψήφιους σε ανά ζεύγη εκλογές, και είναι ισόπαλος έναντι πολλών άλλων. Ως εκ τούτου, έχει μεγάλο βαθμό Dodgson. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει ένας δεύτερος υποψήφιος που έχει βαθμό κατά Dodgson δύο, απλά επειδή έχει έλλειμμα δύο εναντίον κάποιου άλλου υποψηφίου. Για να αποκτήσουμε ένα καλό λόγο προσέγγισης, ο αλγόριθμος δεν πρέπει να επιλέξει τον b σε αυτό το προφίλ. Ωστόσο, όταν το προφίλ αντιγράφεται, ο βαθμός Dodgson του b δεν αυξάνεται: είναι ακόμα ισόπαλος εναντίον των ίδιων υποψηφίων. Σε αντίθεση, ο βαθμός κατά Dodgson των άλλων υποψηφίων κλιμακώνεται με τον αριθμό των αντιγράφων. Βάσει της ομοιογένειας, δεν μπορούμε να επιλέξουμε τον b στο αντιγραφόμενο προφίλ, το οποίο μας οδηγεί στο κάτω φράγμα.

Μπορούμε να σκεφτούμε έναν ψηφοφόρο ως το υποσύνολο των υποψηφίων που κατατάσσονται πάνω από τον b. Αν ο b είναι ισόπαλος με κάποιον υποψήφιο, τότε ο υποψήφιος είναι μέλος ακριβώς στα μισά υποσύνολα. Το επιχείρημα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1 σημαίνει ότι υπάρχει πάντα μια επικάλυψη λογαριθμικού μεγέθους. Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1 δείχνει ότι το φράγμα αυτό είναι βέλτιστο. Πράγματι, η συνδυαστική βάση της απόδειξης του θεωρήματος είναι η κατασκευή ενός στιγμιότυπου επικάλυψης συνόλων με τις ακόλουθες ιδιότητες: κάθε στοιχείο του συνόλου εδάφους εμφανίζεται σε περίπου μισά υποσύνολα, αλλά κάθε επικάλυψη απαιτεί ένα λογαριθμικό αριθμό υποσυνόλων (Πρόταση 3.4.3). Η κατασκευή βασίζεται σε ένα κάτω όριο για τη χειρότερη περίπτωση του διαστήματος ακεραιότητας ενός φυσικού χαλαρωμένου γραμμικού προγράμματος για το πρόβλημα επικάλυψης συνόλων. (π.χ., [122, σελίδες 111-112]).

Απόδειξη. (*του Θεωρήματος 3.4.2*) Δεδομένου ενός ακεραίου $r \geq 3$, κατασκευάζουμε το προφίλ προτίμησης $\succ$ με $n = 2^r$ ψηφοφόρους και $m = 2^{r+1} + 1$ υποψηφίους. Υπάρχει ένα σύνολο $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2^r-1}\}$ με $2^r - 1$ υποψήφιους, δύο σύνολα Y και Z με 2^{r-1} υποψήφιους το καθένα, καθώς και δύο επιπλέον υποψήφιους a και b.

Για $i = 1, ..., 2^r - 1$, συμβολίζουμε με X_i το σύνολο των υποψηφίων x_j τέτοιοι ώστε το εσωτερικό γινόμενο των δυαδικών διανυσμάτων που αντιστοιχεί στις δυαδικές αναπαραστάσεις των i και j να ισούται με 1 υπόλοιπο 2. Δηλώνουμε ως $\mathcal{X}$ τη συλλογή όλων των συνόλων X_i για $i = 1, ..., 2^r - 1$.

Πρόταση 3.4.3. *Τα σύνολα του $\mathcal{X}$ έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Κάθε υποψήφιος $x \in X$ ανήκει σε 2^{r-1} διαφορετικά σύνολα του $\mathcal{X}$.*

2. *Κάθε σύνολο του $\mathcal{X}$ περιέχει ακριβώς 2^{r-1} υποψηφίους.*

3. *Υπάρχουν r διαφορετικά σύνολα στο $\mathcal{X}$ των οποίων η ένωση περιέχει όλους τους υποψηφίους στο X.*

4. *Για κάθε υποσυλλογή από το πολύ $r - 1$ σύνολα στο $\mathcal{X}$, υπάρχει ένας υποψήφιος του X που δεν ανήκει στην ένωσή τους.*

Απόδειξη. Οι ιδιότητες 1 και 2 προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό των συνόλων στα $\mathcal{X}$.

Προκειμένου να καθοριστεί η ιδιότητα 3, αρκεί να εξετάσουμε τα r σύνολα X_{2^i} για $i = 0, ..., r-1$, δηλαδή, αυτά των οποίων η δυαδική αναπαράσταση έχει μόνο ένα 1 στην $(i+1)$-οστή θέση δυαδικού ψηφίου.

Όσον αφορά την ιδιότητα 4, θεωρούμε ένα δυαδικό r-διάνυσμα $\mathbf{z} = \langle z_1, z_2, ..., z_r \rangle \in \{0,1\}^r$. Τώρα, θεωρούμε το σύνολο X_k και έστω $\langle b_1(k), b_2(k), ..., b_r(k) \rangle$ είναι το r-διάνυσμα που αντιστοιχεί στο δυαδική αναπαράσταση του k. Ισχύει ότι η εξίσωση $\sum_{j=1}^{r} b_j(k) \cdot z_j = 0 \bmod 2$ είναι αληθής αν και μόνο αν ο υποψήφιος, του οποίου το $\mathbf{z}$ είναι η δυαδική αναπαράσταση του δείκτη του δεν περιέχεται στο σύνολο X_k. Εφόσον κάθε ομοιογενές σύστημα με λιγότερο από r γραμμικές εξισώσεις υπόλοιπο 2 με r αγνώστους έχει μια μη τετριμμένη (δηλαδή, μη μηδενική) λύση, προκύπτει ότι για κάθε υποσυλλογή με λιγότερο από r σύνολα στο $\mathcal{X}$, υπάρχει ένας υποψήφιος στο X που δεν περιέχεται στην ένωσή τους. □

Κατασκευάζουμε το προφίλ προτιμήσεων $\succ$ ως εξής (Πίνακας 3.3):

- Ο ψηφοφόρος 0 κατατάσσει τον b πρώτο, μετά τον a, μετά τους υποψηφίους του Y (σε αυθαίρετη σειρά), μετά τους υποψηφίους του Z (επίσης σε αυθαίρετη σειρά), και στη συνέχεια τους υποψηφίους του X (σε αυθαίρετη σειρά).

- Ο ψηφοφόρος 1 κατατάσσει τον b πρώτο, μετά τον a, μετά τους υποψηφίους του X_1 (σε αυθαίρετη σειρά), μετά τους υποψηφίους του Z, μετά τους υποψηφίους του Y, και στη συνέχεια τους υποψηφίους του $X \setminus X_1$ (σε αυθαίρετη σειρά).

- Για $i = 2, ..., 2^{r-1}$, ο ψηφοφόρος i κατατάσσει τον a πρώτο, μετά τους υποψηφίους του X_i (σε αυθαίρετη σειρά), μετά τους υποψηφίους του Y, μετά τον b, μετά τους υποψηφίους του Z, και στη συνέχεια τους υποψηφίους του $X \setminus X_i$ (σε αυθαίρετη σειρά).

- Για $i = 2^{r-1}+1, ..., 2^r-1$, ο ψηφοφόρος i κατατάσσει τους υποψηφίους του X_i (σε αυθαίρετη σειρά) πρώτους, μετά τους υποψηφίους του Z, μετά τον b, μετά τους υποψηφίους του Y, και στη συνέχεια τους υποψηφίους του $X \setminus X_i$ (σε αυθαίρετη σειρά), και τέλος τον a.

Οι επόμενες τέσσερις προτάσεις δηλώνουν σημαντικές ιδιότητες του προφίλ $\succ$.

Πρόταση 3.4.4. *Ο βαθμός Dodgson του a είναι το πολύ 2.*

Απόδειξη. Μετά την εναλλαγή του a και του b στην κατάταξη των ψηφοφόρων 0 και 1 ο υποψήφιος a κατέχει την πρώτη θέση στην πλειοψηφία των ψηφοφόρων, και ως εκ τούτου, καθίσταται σαφώς ο νικητής Condorcet. □

Πρόταση 3.4.5. *Ο υποψήφιος b έχει έλλειμμα το πολύ 1 έναντι σε οποιονδήποτε άλλο υποψήφιο.*

Απόδειξη. Από την ιδιότητα 1 της Πρότασης 3.4.3 και την κατασκευή του προφίλ, έχουμε ότι ο b κατατάσσεται κάτω από οποιονδήποτε υποψήφιο x_i του $X \setminus X_1$ από 2^{r-1} ψηφοφόρους, δηλαδή, ο b είναι ισόπαλος με αυτούς τους υποψήφιους σε ανά ζεύγη εκλογές. Επομένως, $\text{defc}(b, x_i, \succ) = 1$. Επιπλέον, ο b κατατάσσεται πάνω από οποιονδήποτε υποψήφιο στο $X_1 \cup Y \cup Z \cup \{a\}$ από $2^{r-1} + 1$ ψηφοφόρους, δηλαδή, $\text{defc}(b, x, \succ) = 0$ για κάθε υποψήφιο $x \in X_1 \cup Y \cup Z \cup \{a\}$. $\square$

Πρόταση 3.4.6. $r2^{r-2} \leq sc_D(b, \succ) \leq (r-1)2^r$.

Απόδειξη. Από την ιδιότητα 4 της Πρότασης 3.4.3, ο υποψήφιος b πρέπει να μετακινηθεί προς τα πάνω στις κατατάξεις τουλάχιστον $r-1$ ανάμεσα στους ψηφοφόρους $2, ..., 2^r - 1$ έτσι ώστε να εξαλείψει το έλλειμμά του έναντι των $2^{r-1} - 1$ υποψηφίων του $X \setminus X_1$. Αυτό απαιτεί τουλάχιστον $(r-1)2^{r-1}$ εναλλαγές, προκειμένου να πάει πιο πάνω από τους υποψήφιους του Y (στην περίπτωση των ψηφοφόρων $2, \ldots, 2^{r-1}$) ή του Z (στην περίπτωση των ψηφοφόρων $2^{r-1}+1, \ldots, 2^r - 1$) στις κατατάξεις των $r-1$ ψηφοφόρων, συν τουλάχιστον $2^{r-1} - 1$ επιπλέον εναλλαγές προκειμένου να νικήσει κάθε υποψήφιο στο $X \setminus X_1$. Συνολικά έχουμε $r2^{r-1} - 1 \geq r2^{r-2}$ εναλλαγές.

Το άνω όριο προκύπτει από τις ιδιότητες 2 και 3 της Πρότασης 3.4.3, δεδομένου ότι ο b γίνεται νικητής Condorcet μετακινώντας τον πάνω από τους υποψήφιους του X στην κατάταξη το πολύ $r-1$ επιπλέον ψηφοφόρων, και χρησιμοποιώντας το πολύ $|X_i| + |Y| = 2^r$ ή $|X_i| + |Z| = 2^r$ εναλλαγές ανά ψηφοφόρο. $\square$

Πρόταση 3.4.7. *Οποιοσδήποτε υποψήφιος εκτός του b έχει έλλειμμα τουλάχιστον 2 έναντι κάποιου άλλου υποψηφίου.*

Απόδειξη. Ο υποψήφιος a κατατάσσεται ψηλότερα από τον b από $2^{r-1} - 1$ ψηφοφόρους. Έτσι, ισχύει ότι $\text{defc}(a, b, \succ) = 2$. Επιπλέον, ο υποψήφιος a κατατάσσεται υψηλότερα από τους υποψήφιους του X, Y και Z από $2^{r-1}+1$ ψηφοφόρους. Έτσι, $\text{defc}(x, a, \succ) = 2$ για κάθε υποψήφιο $x \in X \cup Y \cup Z$. $\square$

Τώρα, θεωρούμε μια ομοιογενή προσέγγιση Dodgson H. Αν επιλέγει τον b, ως νικητή του προφίλ $\succ$ τότε, χρησιμοποιώντας τις προτάσεις 3.4.4 και 3.4.6, και εφόσον ο H είναι μια προσέγγιση Dodgson, έχουμε ότι

$$\text{sc}_H(a, \succ) \geq \text{sc}_H(b, \succ) \geq \text{sc}_D(b, \succ) \geq r2^{r-2} \geq r2^{r-3}\text{sc}_D(a, \succ).$$

Ως εκ τούτου, ο H έχει λόγο προσέγγισης τουλάχιστον

$$r2^{r-3} = \frac{m-1}{16} \cdot \log \frac{m-1}{2} = \Omega(m \log m) \quad .$$

Ας υποθέσουμε ότι διαφορετικά ο νικητής σύμφωνα με τον H είναι κάποιος υποψήφιος $x \in A \setminus \{b\}$. Θεωρούμε το προφίλ προτιμήσεων $\succ'$ που λαμβάνεται φτιάχνοντας $r(r-1)2^{2r-3}$ αντίγραφα του προφίλ $\succ$. Από την Πρόταση 3.4.5, έχουμε ότι ο b έχει έλλειμμα επίσης το πολύ 1 ενάντια σε κάθε άλλο υποψήφιο στο νέο προφίλ. Ο βαθμός Dodgson αυτού στο νέο προφίλ είναι στο εύρος που ορίζεται στην Πρόταση 3.4.6, δηλαδή, $\mathrm{sc}_D(b, \succ') \leq (r-1)2^r$. Από τον ορισμό του ελλείμματος και την Πρόταση 3.4.7, έχουμε ότι ο υποψήφιος x έχει έλλειμμα τουλάχιστον $r(r-1)2^{2r-3}$ ενάντια σε κάποιον άλλο υποψήφιο και, κατά συνέπεια, ο βαθμός Dodgson αυτού στο νέο προφίλ είναι $\mathrm{sc}_H(x, \succ') \geq r(r-1)2^{2r-3}$.

Από την ιδιότητα της μονοτονίας, ο x πρέπει να είναι ο νικητής σύμφωνα με τον H στο προφίλ $\succ'$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mathrm{sc}_H(b, \succ') &\geq \mathrm{sc}_H(x, \succ') \geq \mathrm{sc}_D(x, \succ') \\ &\geq r(r-1)2^{2r-3} \geq r2^{r-3}\mathrm{sc}_D(b, \succ'). \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, ο H έχει λόγο προσέγγισης $r2^{r-3} = \Omega(m \log m)$ και σε αυτήν την περίπτωση επίσης. □

3.5 Επιπλέον ιδιότητες

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματά μας σε σχέση με πολλές πρόσθετες ιδιότητες κοινωνικής επιλογής που δεν ικανοποιούνται από τον κανόνα του Dodgson. Σε γενικές γραμμές, τα κάτω όρια μας σε σχέση με αυτές τις ιδιότητες είναι τουλάχιστον γραμμικά στο n, που είναι ο αριθμός των ψηφοφόρων. Εφόσον το n είναι σχεδόν πάντα μεγάλο, τα αποτελέσματα αυτά θα πρέπει αυστηρά να ερμηνευθούν ως αποτέλεσμα αδυναμίας, δηλαδή, συνήθως ένα άνω φράγμα του $\mathcal{O}(n)$ δεν είναι χρήσιμο. Τώρα (ανεπίσημα) διατυπώνουμε τις πέντε ιδιότητες που θα ασχοληθούμε. Για πιο επίσημους ορισμούς ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία του Tideman [121].

Λέμε ότι ένας κανόνας ψηφοφορίας ικανοποιεί την *συνδυαστικότητα* αν, δεδομένων δύο προφίλ προτίμησης όπου ο κανόνας εκλέγει το ίδιο σύνολο νικητών, τότε ο κανόνας θα εκλέγει επίσης το ίδιο νικητήριο σύνολο στο προφίλ που λαμβάνεται προσαρτώντας ένα από τα αρχικά προφίλ στο άλλο. Σημειώνουμε ότι η συνδυαστικότητα συνεπάγεται την ομοιογένεια.

Ένα *κυρίαρχο σύνολο* είναι ένα μη κενό σύνολο υποψηφίων έτσι ώστε κάθε υποψήφιος στο σύνολο νικά κάθε υποψήφιο έξω από το σύνολο σε ανά ζεύγη εκλογές. Το *σύνολο Smith* είναι το μοναδικό ελάχιστης ένταξης κυρίαρχο σύνολο. Ένας κανόνας ψηφοφορίας ικανοποιεί την *συνέπεια κατά Smith* αν είναι οι νικητές σύμφωνα με τον κανόνα πάντα περιέχονται στο σύνολο Smith.

Λέμε ότι ένας κανόνας ψηφοφορίας ικανοποιεί την *συνέπεια αμοιβαίας πλειοψηφίας* αν, δεδομένου ενός προφίλ προτίμησης όπου περισσότεροι από τους μισούς ψηφοφόρους κατατάσσουν ένα υποσύνολο των υποψηφίων $X \subseteq A$ πάνω από το $A \setminus X$, μόνο υποψήφιοι από το X μπορούν να εκλεγούν. Ένας κανόνας ψηφοφορίας ικανοποιεί την *συνέπεια αμετάβλητης απώλειας* (ή *συνέπειας του χαμένου κατά Condorcet*), εάν ένας υποψήφιος που χάνει από κάθε άλλο υποψήφιο σε ανά ζεύγη εκλογές, δεν μπορεί να εκλεγεί.

Η ανεξαρτησία των κλώνων εισήχθη από τον Tideman [120], και επίσης μελετάται στην εργασία του Schulze [114]. Για ευκολία χρησιμοποιούμε ένα ελαφρώς ασθενέστερο ορισμό που εισήχθη από τον Brandt [20] και αφού αποδεικνύουμε κάτω όριο, ένας ασθενέστερος ορισμός ενισχύει το φράγμα μας. Λαμβάνοντας υπόψη ένα προφίλ προτίμησης, δύο υποψήφιοι $x, y \in A$ θεωρούνται *κλώνοι* αν είναι γειτονικοί στην κατάταξη όλων των ψηφοφόρων, δηλαδή, η σειρά τους σε σχέση με κάθε υποψήφιο στο $A \setminus \{x, y\}$ είναι η ίδια παντού. Ένας κανόνας ψηφοφορίας είναι *ανεξάρτητος από κλώνους* αν ένας υποψήφιος που χάνει δεν μπορεί να γίνει νικητής με την εισαγωγή κλώνων.

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω V ένας Dodgson προσεγγιστικός αλγόριθμος. Εάν ο V ικανοποιεί τη συνδυαστικότητα ή τη συνέπεια κατά Smith, τότε ο λόγος προσέγγισης του είναι τουλάχιστον $\Omega(nm)$. Αν ο V ικανοποιεί τη συνέπεια αμοιβαίας πλειοψηφίας, τη συνέπεια αμετάβλητης απώλειας, ή την ανεξαρτησία των κλώνων, τότε ο λόγος προσέγγισής του είναι τουλάχιστον $\Omega(n)$.*

Κάθε μία από τις ακόλουθες υποενότητες ασχολείται με μια ιδιότητα (ή δύο). Ο κύριος σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.5.1, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις περιπλέκουμε σχετικά όσο αφορά (απλά) άνω φράγματα.

3.5.1 Συνδυαστικότητα

Ένα άνω όριο $\mathcal{O}(nm)$ που ικανοποιεί τη συνδυαστικότητα μπορεί να επιτευχθεί με την επιλογή ενός νικητή Condorcet αν υπάρχει, και ειδάλλως αν επιλέξουμε κάποιον σταθερό υποψήφιο (θέτοντας τον βαθμό του ίσο με $nm - 1$ και θέτοντας τους βαθμούς όλων των άλλων υποψηφίων ίσα με nm).

Θεώρημα 3.5.2. *Έστω V ένας Dodgson προσεγγιστικός αλγόριθμος. Αν ο V ικανοποιεί την ιδιότητα της συνδυαστικότητας, τότε ο λόγος προσέγγισης του είναι τουλάχιστον $\Omega(nm)$.*

Απόδειξη. Έστω k, λ είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε ο k είναι άρτιος και διαιρεί το $4\lambda - 2$. Ας εξετάσουμε το ακόλουθο προφίλ προτίμησης $\succ$ με $n = 4\lambda - 2$ ψηφοφόρους και $m = k + 2$ υποψήφιους. Υπάρχει ένα σύνολο Ψ με k υποψήφιους $\psi_0, ..., \psi_{k-1}$, καθώς και δύο επιπλέον υποψήφιους a και b. Για $i = 0, ..., k-1$, συμβολίζουμε με Ψ_i το διατεταγμένο σύνολο που περιέχει τους υποψήφιους στο Ψ διατεταγμένους ως $\psi_i, \psi_{i+1 \bmod k}, ..., \psi_{i+k-1 \bmod k}$.

Το προφίλ προτίμησης $\succ$ είναι το εξής (Πίνακα 3.4):

- Για $i = 0, ..., \lambda - 3$, ο ψηφοφόρος i κατατάσσει τον a πρώτο, μετά τους υποψηφίους του $\Psi_{i \bmod k}$, και μετά τον b.
- Για $i = \lambda - 2, ..., 2\lambda - 3$, ο ψηφοφόρος i κατατάσσει τον b πρώτο, μετά τον a, και μετά τους υποψηφίους του $\Psi_{i \bmod k}$.
- Για $i = 2\lambda - 2, ..., 3\lambda - 3$, ο ψηφοφόρος i κατατάσσει τους υποψηφίους του $\Psi_{i \bmod k}$ πρώτους, μετά τον b, και μετά τον a.

0	...	$\lambda-3$	$\lambda-2$	...	$2\lambda-3$	$2\lambda-2$	...	$3\lambda-3$	$3\lambda-2$	...	$4\lambda-3$
a	...	a	b	...	b	$\Psi_{2\lambda-2}$	...	$\Psi_{3\lambda-3}$	a	...	a
Ψ_0	...	$\Psi_{\lambda-3}$	a	...	a	b	...	b	$\Psi_{3\lambda-2}$	...	$\Psi_{4\lambda-3}$
b	...	b	$\Psi_{\lambda-2}$	...	$\Psi_{2\lambda-3}$	a	...	a	b	...	b

0	1	2	...	$\lambda-1$	λ	...	$2\lambda-2$
a	a	a	...	a	b	...	b
b	b	b	...	b	Ψ_λ	...	$\Psi_{2\lambda-2}$
Ψ_0	Ψ_1	Ψ_2	...	$\Psi_{\lambda-1}$	a	...	a

Πίνακας 3.4: Τα προφίλ προτίμησης $\succ$ και $\succ'$ που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.2. Οι δείκτες των συνόλων Ψ_i είναι υπόλοιπο k.

- Για $i = 3\lambda-2, ..., 4\lambda-3$, ο ψηφοφόρος i κατατάσσει τον a πρώτο, μετά τους υποψηφίους του $\Psi_{i \bmod k}$, και μετά τον b.

Έχουμε τα εξής ελλείμματα σε σχέση με το $\succ$: $\text{defc}(a, b, \succ) = 2$, $\text{defc}(b, \psi_i, \succ) = \lambda$ για κάθε $\psi_i \in \Psi$, και $\text{defc}(\psi_i, a, \succ) = \lambda$ για κάθε $\psi_i \in \Psi$. Ο υποψήφιος a έχει βαθμό Dodgson 2 δεδομένου ότι αρκεί να τον ωθήσουμε προς τα πάνω μια θέση στην κατάταξη δύο ψηφοφόρων, προκειμένου να νικήσει τον b δύο φορές περισσότερο. Ο υποψήφιος b πρέπει να νικήσει όλους τους k υποψήφιους στο Ψ, λ επιπλέον φορές, και ως εκ τούτου έχει βαθμό Dodgson τουλάχιστον $k\lambda$. Κάθε υποψήφιος ψ_i του Ψ πρέπει να κερδίσει τον a λ φορές. Από τον ορισμό των συνόλων Ψ_i, ο υποψήφιος ψ_i κατατάσσεται ψηλότερα από τον υποψήφιο $\psi_{i+j \bmod k}$ σε $(k-j)\frac{4\lambda-2}{k}$ ψηφοφόρους, για $j = 1, 2, ..., k-1$, ενώ θα πρέπει να νικήσει τον $\psi_{i+j \bmod k}$ 2λ φορές συνολικά, προκειμένου να τον νικήσει στις ανά ζεύγη εκλογές τους. Ως εκ τούτου, για $j = k/2, ..., k-1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \text{defc}(\psi_i, \psi_{i+j \bmod k}, \succ) &= 2\lambda - (k-j)\frac{4\lambda-2}{k} \\ &= j\frac{4\lambda-2}{k} - 2\lambda + 2 \end{aligned}$$

και ο βαθμός Dodgson του ψ_i είναι

$$\begin{aligned} \text{sc}_D(\psi_i, \succ) &\geq \text{defc}(\psi_i, a, \succ) + \sum_{j=k/2}^{k-1} \text{defc}(\psi_i, \psi_{i+j \bmod k}, \succ) \\ &= \lambda + \sum_{j=k/2}^{k-1} \left(j\frac{4\lambda-2}{k} - 2\lambda + 2 \right) \\ &= \lambda + \frac{4\lambda-2}{k} \sum_{j=k/2}^{k-1} j - k(\lambda-1) \\ &= \frac{k\lambda}{2} + \frac{k}{4} + \frac{1}{2} > \frac{k\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Τώρα θεωρούμε το εξής προφίλ προτιμήσεων $\succ'$ με $n' = 2\lambda - 1$ ψηφοφόρους και τους ίδιους m υποψήφιους (Πίνακας 3.4).

- Για $i = 0, ..., \lambda - 1$, ο ψηφοφόρος i κατατάσσει τον a πρώτο, μετά τον b, και μετά τους υποψηφίους του $\Psi_{i \bmod k}$.
- Για $i = \lambda, ..., 2\lambda - 2$, ο ψηφοφόρος i κατατάσσει τον b πρώτο, μετά τους υποψηφίους του $\Psi_{i \bmod k}$, και μετά τον a.

Σε αυτό το προφίλ προτίμησης, έχουμε ότι ο υποψήφιος a είναι ο νικητής Condorcet. Αν συνδυάσουμε τα δύο προφίλ προτίμησης έχουμε ένα νέο $\succ''$ στον οποίο ο υποψήφιος b είναι ο νικητής Condorcet. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο V είναι συνεπής κατά Condorcet, διότι διαφορετικά θα είχε άπειρο λόγο προσέγγισης. Ως εκ τούτου, ο a πρέπει να είναι ο νικητής σύμφωνα με τον V στο $\succ'$ και ο b ο νικητής σύμφωνα με τον V στο $\succ''$. Εφόσον ο V έχει την ιδιότητα της συνδυαστικότητας, ο a δεν είναι ο νικητής σύμφωνα με τον V στο $\succ$, δηλαδή, η βαθμολογία του $\mathrm{sc}_V(a, \succ)$ ή δεν είναι μικρότερη από $\mathrm{sc}_V(b, \succ)$ είτε δεν είναι μικρότερη από $\mathrm{sc}_V(\psi_i, \succ)$ για κάποιον υποψήφιο $\psi_i \in \Psi$. Η ελάχιστη βαθμολογία Dodgson μεταξύ αυτών των υποψηφίων είναι τουλάχιστον $k\lambda/2$, ενώ ο a έχει βαθμό Dodgson 2. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, το γεγονός ότι ο V είναι μια προσέγγιση Dodgson, και τον ορισμό των n και m, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{sc}_V(a, \succ) &\geq \min_{y \in \Psi \cup \{b\}} \mathrm{sc}_V(y, \succ) \geq \min_{y \in \Psi \cup \{b\}} \mathrm{sc}_D(y, \succ) \geq \frac{k\lambda}{2} \\ &= \frac{k\lambda}{4} \mathrm{sc}_D(a, \succ) = \frac{(n+2)(m-2)}{16} \cdot \mathrm{sc}_D(a, \succ),\end{aligned}$$

δηλαδή, ο V έχει λόγο προσέγγισης $\Omega(nm)$. □

3.5.2 Συνέπεια κατά Smith

Δεν είναι δύσκολο να καθοριστεί ένας μη τετριμμένος $\mathcal{O}(nm)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το βαθμό Dodgson που ικανοποιεί τη συνέπεια κατά Smith. Ο αλγόριθμος επιλέγει, αν υπάρχει, έναν νικητή Condorcet,. Διαφορετικά, για κάθε υποψήφιο στο σύνολο Smith, θέτουμε τον βαθμό του ίσο με το $nm - 1$, και θέτουμε τον βαθμό οποιουδήποτε άλλου υποψηφίου ίσο με το nm. Σημειώνουμε ότι το σύνολο Smith μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο [21]. Η ακόλουθη δήλωση δείχνει ότι δεν είναι δυνατή κάποια ασυμπτωτική βελτίωση.

Θεώρημα 3.5.3. *Έστω V Dodgson ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος. Αν ο V ικανοποιεί την ιδιότητα της συνέπειας κατά Smith, τότε έχει λόγο προσέγγισης τουλάχιστον $\Omega(nm)$.*

Απόδειξη. Έστω $k, t \geq 1$ ακέραιοι. Κατασκευάζουμε ένα προφίλ προτίμησης $\succ$ με τρεις υποψήφιους a, b, και c που ανήκουν στο σύνολο Smith, έναν υποψήφιο d, και ένα σύνολο από υποψήφιους

$X = \{x_1, ..., x_{3t}\}$ που δεν ανήκουν στο σύνολο Smith, με τέτοιο τρόπο ώστε ο βαθμός Dodgson του d είναι το πολύ 3 και ο βαθμός Dodgson των a, b, και c είναι τουλάχιστον $\Omega(nm)$.

Τα σύνολο X είναι χωρισμένο σε τρία σύνολα $X_1 = \{x_1, ..., x_t\}$, $X_2 = \{x_{t+1}, ..., x_{2t}\}$, και $X_3 = \{x_{2t+1}, ..., x_3 t\}$. Έχουμε $n = 6k + 1$ ψηφοφόρους, $m = 3t + 4$ υποψήφιους, και το προφίλ προτίμησης $\succ$ του πίνακα 3.5. Σημειώνουμε ότι η σειρά των υποψηφίων στα σύνολα X_1, X_2, και X_3 είναι αυθαίρετη.

$\times k$	$\times k$	$\times k$	$\times k$	$\times k$	$\times k$	$\times 1$
d	a	d	b	d	c	a
a	X_1	b	X_3	c	X_3	b
X_1	b	X_1	c	X_3	a	c
b	X_2	c	X_2	a	X_2	d
X_2	c	X_2	a	X_2	b	X_1
c	X_3	a	X_1	b	X_1	X_2
X_3	d	X_3	d	X_1	d	X_3

Πίνακας 3.5: Το προφίλ προτίμησης $\succ$ που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.3.

Ο υποψήφιος a νικά όλους τους υποψηφίους εκτός από τον c σε ανά ζεύγος εκλογή και, επιπλέον, $\text{defc}(a, c, \succ) = k$. Ο υποψήφιος b νικά όλους τους υποψηφίους εκτός από τον a σε ανά ζεύγος εκλογή και, επιπλέον, $\text{defc}(b, a, \succ) = k + 1$. Ο υποψήφιος c νικά όλους τους υποψηφίους εκτός από τον b σε ανά ζεύγος εκλογή και, επιπλέον, $\text{defc}(c, b, \succ) = k + 1$. Είναι φανερό ότι το σύνολο Smith είναι $\{a, b, c\}$.

Ο υποψήφιος d νικά όλους τους υποψήφιους στο X και έχει $\text{defc}(d, a, \succ) = \text{defc}(d, b, \succ) = \text{defc}(d, c, \succ) = 1$. Σαφώς, ο βαθμός Dodgson του d είναι (το πολύ) 3, δεδομένου ότι μπορεί να γίνει νικητής Condorcet μετακινώντας τον τρεις θέσεις προς τα πάνω στην κατάταξη του τελευταίου παράγοντα.

Τώρα, παρατηρούμε ότι, προκειμένου να νικήσει τον c στην προτίμηση οποιουδήποτε παράγοντα, όπου κατατάσσεται χαμηλότερα, ο a πρέπει να μετακινηθεί τουλάχιστον $t + 1$ θέσεις προς τα πάνω. Αυτό σημαίνει ότι ο βαθμός Dodgson αυτού είναι τουλάχιστον $k(t + 1)$. Ομοίως, ο b (αντίστοιχα, c) μπορεί να νικήσει τον a (αντίστοιχα, b) στην κατάταξη του τελευταίου παράγοντα με την άνοδο προς τα πάνω μιας θέσης, αλλά χρειάζεται τουλάχιστον $t + 1$ ωθήσεις στην προτίμηση οποιουδήποτε άλλου παράγοντα όπου κατατάσσεται κάτω από τον a (αντίστοιχα, b). Έτσι, έχουμε ότι ο βαθμός Dodgson του a είναι τουλάχιστον $k(t + 1)$ και ο βαθμός Dodgson των b και c είναι τουλάχιστον $1 + k(t + 1)$.

Εφόσον ο V έχει την ιδιότητα της συνέπειας κατά Smith, κάποιος υποψήφιος μεταξύ a, b, και c πρέπει να είναι ο νικητής. Χρησιμοποιώντας τα όρια για το βαθμό Dodgson και τον ορισμό των k και t, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sc}_V(d,\succ) &\geq \min\{\mathrm{sc}_V(a,\succ),\mathrm{sc}_V(b,\succ),\mathrm{sc}_V(c,\succ)\}\\
&\geq \min\{\mathrm{sc}_D(a,\succ),\mathrm{sc}_D(b,\succ),\mathrm{sc}_D(c,\succ)\}\\
&\geq \frac{k(t+1)}{3}\mathrm{sc}_D(d,\succ)\\
&= \frac{(n-1)(m-1)}{54}\mathrm{sc}_D(d,\succ),
\end{aligned}
$$

δηλαδή, ο V έχει λόγο προσέγγισης $\Omega(nm)$. □

3.5.3 Συνέπεια Αμοιβαίας Πλειοψηφίας και Συνέπεια Αμετάβλητης Απώλειας

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ο ακόλουθος τετριμμένος αλγόριθμος (υπερ-πολυωνυμικού χρόνου) ικανοποιεί τη συνέπεια αμετάβλητης απώλειας και έχει λόγο προσέγγισης $\mathcal{O}(n)$ για το βαθμό Dodgson. Για κάθε υποψήφιο, θέτουμε τον βαθμό ίσο με το nm αν χάνει από κάθε άλλο υποψήφιο και ίσο με το βαθμό Dodgson αυτού σε κάθε άλλη περίπτωση. Η ακόλουθη δήλωση δείχνει ότι δεν είναι δυνατή καμία ασυμπτωτική βελτίωση.

Θεώρημα 3.5.4. *Έστω V ένας Dodgson προσεγγιστικός αλγόριθμος. Αν ο V ικανοποιεί την ιδιότητα της συνέπειας αμοιβαίας πλειοψηφίας ή τη συνέπεια αμετάβλητης απώλειας, τότε έχει λόγο προσέγγισης τουλάχιστον $\Omega(n)$.*

Απόδειξη. Ας εξετάσουμε το ακόλουθο προφίλ προτίμησης $\succ$ με $m \geq 4$ υποψήφιους και $n = \lambda(m-1)$ ψηφοφόρους, όπου ο λ είναι περιττός και ο m είναι άρτιος (και άρα ο n είναι περιττός). Υπάρχει ένα σύνολο Ψ από $m-1$ υποψήφιους $\psi_0, ..., \psi_{m-2}$ και έναν επιπλέον υποψήφιος a. Για $i = 0, ..., m-2$, συμβολίζουμε με Ψ_i το διατεταγμένο σύνολο που περιέχει τους υποψήφιους στο Ψ διέτεταγμένους ως $\psi_i, \psi_{i+1 \bmod (m-1)}, ..., \psi_{i+m-2 \bmod (m-1)}$.

Το προφίλ προτιμήσεων είναι το εξής (Πίνακας 3.6):

- Για $i = 0, ..., \lfloor\frac{\lambda(m-1)}{2}\rfloor - 1$, ο ψηφοφόρος i κατατάσσει τον a πρώτο, και μετά τους υποψηφίους του $\Psi_{i \bmod (m-1)}$.
- Για $i = \lfloor\frac{\lambda(m-1)}{2}\rfloor, ..., \lambda(m-1)-1$, ο ψηφοφόρος i κατατάσσει τους υποψηφίους του $\Psi_{i \bmod (m-1)}$ πρώτους, και μετά τον a.

Ο βαθμός Dodgson του a είναι $sc_D(a,\succ) \leq m-1$, δεδομένου ότι αρκεί να μετακινήσουμε τον a προς τα πάνω για $m-1$ θέσεις στην κατάταξη ενός από τους τελευταίους $\lfloor n/2 \rfloor$ ψηφοφόρους, προκειμένου να καταστεί νικητής κατά Condorcet.

Πρόταση 3.5.5. *Για κάθε $\psi_i \in \Psi$, ισχύει ότι $sc_D(\psi_i,\succ) > \frac{\lambda(m-1)^2}{18}$.*

0	...	$\lfloor\frac{\lambda(m-1)}{2}\rfloor - 1$	$\lfloor\frac{\lambda(m-1)}{2}\rfloor$	...	$\lambda(m-1)-1$
a	...	a	Ψ_0	...	Ψ_{m-2}
Ψ_0	...	Ψ_{m-2}	a	...	a

Πίνακας 3.6: Το προφίλ προτίμησης $\succ$ που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.4.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ο ψ_i κατατάσσεται ψηλότερα από τον $\psi_{i+j \bmod (m-1)}$ από $\lambda(m-1-j)$ ψηφοφόρους. Ως εκ τούτου, προκειμένου να κερδίσει τον $\psi_{i+j \bmod (m-1)}$ στις προτιμήσεις των $\lceil n/2 \rceil = \frac{\lambda(m-1)+1}{2}$ ψηφοφόρων, ο αριθμός των πρόσθετων ψηφοφόρων στον οποίων τις προτιμήσεις ο ψ_i πρέπει να νικήσει τον $\psi_{i+j \bmod (m-1)}$ είναι

$$\begin{aligned}\mathrm{defc}(\psi_i, \psi_{i+j \bmod (m-1)}, \succ) &= \frac{\lambda(m-1)+1}{2} - \lambda(m-1-j)\\ &> \lambda\left(j - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathrm{sc}_D(\psi_i, \succ) &\geq \sum_{j=m/2}^{m-2} \mathrm{defc}(\psi_i, \psi_{i+j \bmod (m-1)}, \succ)\\ &> \lambda \sum_{j=m/2}^{m-2} \left(j - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)\\ &= \lambda \sum_{j=1}^{m/2-1} \left(j - \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{m}{2} - 1\right)^2 \geq \frac{\lambda(m-1)^2}{18} \quad .\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει εφόσον $m \geq 4$. □

Σαφώς, κάθε υποψήφιος στο Ψ νικά τον a στην ανά ζεύγος εκλογή τους και, ιδίως, οι υποψήφιοι στο Ψ κατατάσσονται υψηλότερα από τον a από περισσότερους από τους μισούς ψηφοφόρους. Εφόσον ο V ικανοποιεί την ιδιότητα της συνέπειας αμοιβαίας πλειοψηφίας ή τη συνέπεια αμετάβλητης απώλειας, ο a δεν είναι ο νικητής σύμφωνα με τον V στο $\succ$, δηλαδή, $\mathrm{sc}_V(a, \succ) \geq \min_{\psi_i \in \Psi} \mathrm{sc}_V(\psi_i, \succ)$. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ισχυρισμό, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{sc}_V(a, \succ) &\geq \min_{\psi_i \in \Psi} \mathrm{sc}_V(\psi_i, \succ) \geq \min_{\psi_i \in \Psi} \mathrm{sc}_D(\psi_i, \succ)\\ &> \frac{\lambda(m-1)^2}{18} \geq \frac{\lambda(m-1)}{18}\mathrm{sc}_D(a, \succ)\\ &= \frac{n}{18}\mathrm{sc}_D(a, \succ)\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι ο V έχει λόγο προσέγγισης $\Omega(n)$. □

3.5.4 Ανεξαρτησία των κλώνων

Θεώρημα 3.5.6. *Έστω V ένας Dodgson προσεγγιστικός αλγόριθμος. Αν ο V ικανοποιεί την ιδιότητα της ανεξαρτησίας των κλώνων, τότε έχει λόγο προσέγγισης τουλάχιστον $\Omega(n)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το προφίλ προτιμήσεων $\succ$ με δύο υποψήφιους a και b και n ψηφοφόρους (το n είναι πολλαπλάσιο του 4). Οι προτιμήσεις είναι τέτοιες ώστε $\mathrm{defc}(a, b, \succ) = 0$ (δηλαδή, ο a είναι νικητής Condorcet) και $\mathrm{defc}(b, a, \succ) = 2$. Τώρα, θεωρούμε μια προσέγγιση Dodgson V. Αν επιλέγει τον b ως νικητή τότε, προφανώς, έχει λόγο προσέγγισης άπειρο. Έτσι, ο b θα πρέπει να είναι ένας υποψήφιος που χάνει.

Στη συνέχεια, θεωρούμε το προφίλ $\succ'$ που λαμβάνεται με κλωνοποίηση του υποψηφίου a τέσσερις φορές, έτσι ώστε ο βαθμός Dodgson των κλώνων a_0, a_1, a_2, και a_3 του a να είναι τουλάχιστον $n/4$. Για να γίνει αυτό, αρκεί να αντικαταστήσουμε τον a με την κατάταξη των κλώνων του $a_i \succ'_i a_{i+1 \bmod 4} \succ'_i a_{i+2 \bmod 4} \succ'_i a_{i+3 \bmod 4}$ στην κατάταξη του ψηφοφόρου i. Ο βαθμός Dodgson του b είναι το πολύ 8, δεδομένου ότι μπορεί να γίνει νικητής Condorcet μετακινώντας τον στην κορυφή της κατάταξης δύο ψηφοφόρων. Σύμφωνα την ιδιότητα της ανεξαρτησίας των κλώνων, ο b θα πρέπει να είναι ένας υποψήφιος που χάνει σε αυτό το νέο προφίλ, δηλαδή, θα πρέπει να έχει $\mathrm{sc}_V(b, \succ') \geq \mathrm{sc}_V(a', \succ')$ για κάποιο κλώνο a' του a. Παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{sc}_V(b, \succ') &\geq \mathrm{sc}_V(a', \succ') \geq \mathrm{sc}_D(a', \succ') \\ &\geq n/4 \geq n \cdot \mathrm{sc}_D(b, \succ')/32, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι ο V έχει λόγο προσέγγισης $\Omega(n)$. □

Κεφάλαιο 4

Μερικοί απλοί κανόνες ψηφοφορίας βαθμολόγησης που δεν είναι ευάλωτοι σε δωροδοκία

4.1 Εισαγωγή

Στην ιστορία της θεωρίας της κοινωνικής επιλογής έχουν προταθεί πολλοί κανόνες ψηφοφορίας, κάθε ένας από τους οποίους προσπαθεί να ανταναклά την πιο κοινωνικά δίκαιη έκβαση των εκλογών. Μια ευρεία κατηγορία κανόνων ψηφοφορίας που προτάθηκαν είναι η τάξη των κανόνων βαθμολόγησης. Σε έναν κανόνα βαθμολόγησης κάθε υποψήφιος έχει βαθμό για κάθε θέση που μπορεί να πάρει στη σειρά κατάταξης του κάθε ψηφοφόρου. Η συνολική βαθμολογία κάθε υποψηφίου είναι το άθροισμα όλων των βαθμών που δίνει κάθε ψηφοφόρος και ο υποψήφιος(οι) με την υψηλότερη βαθμολογία κερδίζει(ουν). Οι πιο σημαντικοί κανόνες βαθμολόγησης είναι οι ακόλουθοι. Πρώτον, η αρίθμηση Borda, όπου ο πρώτος υποψήφιος στην κατάταξη ενός ψηφοφόρου παίρνει $m-1$ βαθμούς, ο δεύτερος υποψήφιος παίρνει $m-2$ βαθμούς και ούτω καθεξής. Επίσης, ο κανόνας της έγκρισης που εισήχθη για πρώτη φορά από τους Brams και Fishburn πριν από 35 χρόνια [16] είναι ένας από τους πιο ευρέως χρησιμοποιούμενους κανόνες βαθμολόγησης. Στον κανόνα k-έγκρισης, οι πρώτοι k υποψήφιοι σε κάθε ψηφοφόρο βαθμολογούνται με ένα βαθμό και οι υπόλοιποι με μηδέν βαθμούς. Σε αυτόν τον κανόνα οι ψηφοφόροι εκφράζουν τις προτιμήσεις τους, εγκρίνοντας k υποψηφίους και αποδοκιμάζουν τους υπόλοιπους. Δύο ειδικές σχετικές περιπτώσεις με τον κανόνα k-έγκρισης είναι ο κανόνας πλειοψηφίας όπου προτιμάται μόνο ένας υποψήφιος για κάθε ψηφοφόρο λαμβάνοντας ένα βαθμό ενώ οι υπόλοιποι υποψήφιοι 0, και ο κανόνας του βέτο, όπου συμβαίνει το αντίθετο και όλοι οι υποψήφιοι προτιμώνται πλην ενός. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετούμε μια τάξη κανόνων που αποτελεί ειδική περίπτωση των κανόνων έγκρισης. Ο υποψήφιος που βρίσκεται στην πρώτη θέση προτίμησης κάθε ψηφοφόρου παίρνει κ βαθμούς, ο δεύτερος στη σειρά υποψήφιος κάθε ψηφοφόρου παίρνει λ βαθμούς και όλοι οι άλλοι υποψήφιοι 0 βαθμούς. Οι κανόνες βαθμολόγησης είναι σημαντικοί καθώς χρησιμοποιούνται ευρέως σε σενάρια της καθημερινής ζωής, όπως είναι οι πολιτικές εκλογές, οι αθλητικές εκδηλώσεις, οι διαγωνισμοί μουσικής και οι πολιτικές εκλογές σε τουλάχιστον τρεις χώρες, δηλαδή, τη Σλοβενία, και τα έθνη της Μικρονησίας του Κιριμπάτι και του Ναούρου βασίζονται στο κανόνα του Borda ή και σε παρόμοιούς του για την ανάδειξη των μελών του Κοινοβουλίου ή μέλη τοπικών συμβουλίων.

Μέχρι στιγμής έχουμε δει ότι οι εκλογές είναι μια από τις πιο σημαντικές πτυχές των ανθρώπινων κοινωνιών. Ένα σημαντικό θεωρητικό ζήτημα που έχει κυριαρχήσει τα τελευταία έτη αφορά στην ευαισθησία των κανόνων ψηφοφορίας στην εξαπάτηση. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για την εξαπάτηση και την αλλαγή της έκβασης των εκλογών. Ο πρώτος τρόπος είναι ο *ελέγχος εκλογών* που γίνεται με την προσθήκη/διαγραφή/διαμέριση υποψηφίων ή ψηφοφόρων. Στον ελέγχο εκλογών υπάρχει ένας εξωτερικός παράγοντας που είναι υπεύθυνος για την αλλαγή του προφίλ προτίμησης των εκλογών σύμφωνα με το θέλημά του. Ένας άλλος σημαντικός τρόπος στρατηγικής συμπεριφοράς ώστε να αλλάξει το αποτέλεσμα των εκλογών είναι η *χειραγώγηση*. Οι χειραγωγημένοι ψηφοφόροι δεν ψηφίζουν σύμφωνα με τις αληθινές προτιμήσεις τους, αλλά αλλάζουν την ψήφο τους για να έχει το συνολικό αποτέλεσμα μια καλύτερη έκβαση για αυτούς. Στην εργασία [59] περιλαμβάνεται ένα παράδειγμα χειραγώγησης. Μια παρόμοια προσέγγιση είναι η *δωροδοκία*, όπου ένας εξωτερικός παράγοντας δωροδοκεί κάποιους ψηφοφόρους ώστε να αλλάξουν τις προτιμήσεις τους, προκειμένου να γίνει νικητής ένας επιλεγμένος υποψήφιος. Το προφίλ προτίμησης με 3 υποψηφίους και 3 ψηφοφόρους που απεικονίζεται στο πίνακα 4.1 είναι ένα πολύ απλό παράδειγμα δωροδοκίας σε εκλογές. Σε αυτό το προφίλ προτίμησης ο a είναι ο νικητής σύμφωνα με τον κανόνα του Borda με 5 βαθμούς ενώ ο b έχει 3 βαθμούς. Δεδομένου ενός προϋπολογισμού, αν ένας εξωτερικός παρατηρητής θέλει να κάνει τον b νικητή των εκλογών, τότε πρέπει να *δωροδοκήσει* τον ψηφοφόρο 3 ώστε να αλλάξει τις προτιμήσεις του και να επιλέξει τον υποψήφιο b στην πρώτη θέση. Όπως προαναφέρθηκε, η δωροδοκία και η χειραγώγηση είναι διαισθητικά παρόμοια προβλήματα και η διαφορά τους έγκειται στο τεχνικό ορισμό. Στη χειραγώγηση το σύνολο των ψηφοφόρων που μπορεί να αλλάξει την κατάταξή τους προσδιορίζεται στην είσοδο του προβλήματος, όπου έχουμε ένα σύνολο μη χειραγωγημένων ψηφοφόρων και ένα σύνολο χειραγωγημένων ψηφοφόρων και ρωτάμε αν υπάρχει τρόπος να αλλάξουμε τις ψήφους των χειραγωγημένων ψηφοφόρων ώστε να έχουν ένα καθορισμένο υποψήφιο ως νικητή.

ψηφοφόρος 1	ψηφοφόρος 2	ψηφοφόρος 3
a	b	a
b	a	c
c	c	b

Πίνακας 4.1: Ένα παράδειγμα της δωροδοκίας. Για αυτό το προφίλ, σύμφωνα με το κανόνα του Borda ισχύει ότι $\mathrm{sc}_{\mathrm{Borda}}(b) = 3$, $\mathrm{sc}(a)_{\mathrm{Borda}} = 5$.

Σχετική Έρευνα. Ο έλεγχος, η χειραγώγηση και η δωροδοκία δυσχεραίνουν τη θεωρία της ψηφοφορίας. Οι Gibbard [65] και Satterthwaite [113] απέδειξαν ότι κάθε κανόνας ψηφοφορίας που δεν είναι δικτατορικός, για τρεις υποψηφίους ή περισσότερους είναι επιρρεπής σε στρατηγική ψήφοφορία. Ωστόσο, μια νέα προοπτική για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος δόθηκε από τους θεωρητικούς της υπολογιστικής κοινωνικής επιλογής όταν οι Bartholdi, Tovey, και Trick έδειξαν ότι η χειραγώγηση μπορεί να αποτραπεί στην πράξη, αποδεικνύοντας ότι η χειραγώγηση σε εκλογές είναι υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα [5]. Ειδικότερα έδειξαν ότι για έναν συγκεκριμένο κανόνα ψηφοφορίας, τον Copeland δεύτερης τάξης, το πρόβλημα της χειραγώγησης είναι πλήρες για την κλάση $\mathcal{NP}$. Με αυτό το αποτέλεσμα παρατήρησαν ότι ακόμα και αν κάποιος θέλει να παρέμβει στρατηγικά και να αλλάξει την έκβαση των εκλογών σύμφωνα με έναν κανόνα ψηφοφορίας, θα είναι αδύνατο να το κάνει σε πολυωνυμικό χρόνο. Αυτό αποδείχθηκε ότι είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο και οδήγησε στην επινόηση κανόνων ψηφοφορίας που είναι υπολογιστικά δύσκολοι έτσι ώστε στην πράξη οι κανόνες αυτοί να μην είναι ευαίσθητοι στη στρατηγική ψηφοφορία.

Επιπλέον, οι Conitzer, Sandholm, και Lang [34] παρουσιάζουν τη βαθμολογημένη χειραγώγηση που αντικατοπτρίζει το σενάριο πραγματικών εκλογών που ο κάθε ψηφοφόρος v έχει διαφορετικό βάρος w_v. Αυτό σημαίνει ότι η ψήφος του μετράει για w_v ψήφους, ενώ αντίστοιχα του ψηφοφόρου u η ψήφος μετράει για w_u ψήφους. Για παράδειγμα, στις εκλογές των ΗΠΑ ο πρόεδρος εκλέγεται έμμεσα από το λαό, μέσα από το εκλεκτορικό σώμα, όπου οι εκλέκτορες έχουν διαφορετικό βάρος ανάλογα με την πολιτεία στην οποία ανήκουν. Αποδεικνύουν ότι ακόμη και με τρεις υποψηφίους κάθε κανόνας βαθμολόγησης (συμπεριλαμβανομένων και των veto και Borda), εκτός του κανόνα της πλειοψηφίας είναι υπολογιστικά δύσκολο να χειραγωγηθεί. Δίνουν επίσης ανάλογα αποτελέσματα για τους κανόνες των Copeland, maximin και STV για την περίπτωση στην οποία αρκούν τουλάχιστον 3 ή 4 υποψήφιοι για το πρόβλημα της χειραγώγησης να είναι πλήρες για την κλάση $\mathcal{NP}$. Διαφορετικές παραλλαγές του προβλήματος δωροδοκίας, για τους κανόνες της πλειοψηφίας και της έγκρισης, μελετώνται στην εργασία [55], όπου οι συγγραφείς αποδεικνύουν ποια από αυτά τα προβλήματα είναι υπολογιστικά δύσκολο να πληγούν από δωροδοκία. Μια άλλη σημαντική εργασία στον τομέα αυτό είναι αυτή των Faliszewski κ.ά.[58], οι οποίοι διερευνούν την υπολογιστική αντοχή των κανόνων των Llull και Copeland στη δωροδοκία. Οι Baumeister κ.ά. [8] πηγαίνουν ένα βήμα παραπέρα και μελετούν την παραμετροποιημένη πολυπλοκότητα της δωροδοκίας και της χειραγώγησης υπό το πλαίσιο της συνάθροισης κρίσεων. Όταν θεωρούνται φυσικές παράμετροι, δείχνουν ότι τρεις παραλλαγές του προβλήματος δωροδοκίας είναι W[2]-δύσκολες.

Τα αποτελέσματά μας. Η γοητεία του να μπορεί κανείς να αποτρέψει την εξαπάτηση των εκλογών με την εύρεση κανόνων που είναι υπολογιστικά δύσκολο να δωροδοκηθούν, οδήγησαν στο να βρούμε ποιος είναι ο πιο απλός κανόνας βαθμολόγησης που μπορεί να μας φαίνεται ότι μπορεί να δωροδοκηθεί, αλλά στην πραγματικότητα η δωροδοκία του είναι ένα υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα. Επειδή γνωρίζουμε ότι η δωροδοκία του κανόνα της πλειοψηφίας και του κανόνα της 2 - έγκρισης γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο, μελετούμε την κατηγορία των κανόνων βαθμολόγησης, όπου ο κορυφαίος υποψήφιος στην προτίμηση του κάθε ψηφοφόρου λαμβάνει κ βαθμούς, ο δεύτερος υποψήφιος λαμβάνει λ βαθμούς, και όλοι οι υπόλοιποι υποψήφιοι δεν λαμβάνουν κανένα βαθμό. Αποδεικνύουμε για το εν λόγω πρωτόκολλο ότι το πρόβλημα της δωροδοκίας, όταν B ψηφοφόροι αλλάζουν τις προτιμήσεις τους για να κάνουν έναν ειδικό υποψήφιο νικητή, είναι υπολογιστικά δύσκολο.

4.2 Προκαταρκτικές έννοιες - Ορισμοί.

Στο πρόβλημα της ψηφοφορίας έχουμε ένα σύνολο από *ψηφοφόρους*, V, και μια ένα σύνολο από *υποψηφίους*, C. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε ψηφοφόρος έχει μια λίστα με γραμμική σειρά προτιμήσεων των υποψηφίων και η συλλογή όλων των προτιμήσεων για όλους τους ψηφοφόρους ονομάζεται *προφίλ προτίμησης*. Ο *κανόνας ψηφοφορίας* είναι μια συνάρτηση από τα προφίλ προτίμησης στην κατάταξη των υποψηφίων. Οι *κανόνες βαθμολόγησης* είναι μια ειδική κατηγορία των κανόνων ψηφοφορίας. Κάθε κανόνας βαθμολόγησης ορίζεται από το *διάνυσμα βαθμολόγησης* $s = (s_1, s_2, ..., s_m)$ με τους ακέραιους $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_m$, να λέγονται *βαθμολογικές τιμές*. Σε αυτή την διατριβή μελετούμε τον κανόνα βαθμολόγησης με το διάνυσμα που ορίζεται ως $(\kappa, \lambda, 0, ..., 0)$. Για μια ψήφο $\succ_v \in V$ και έναν υποψήφιο $c \in C$, λέμε ότι ο *βαθμός* $sc(c, \succ_v)$ ορίζεται ως $sc(c, \succ_v) := s_j$ όπου το j είναι η θέση του υποψηφίου c στον ψηφοφόρο $\succ_v$. Για κάθε προφίλ $\succ = \langle \succ_0, \ldots, \succ_{|V|-1} \rangle$, η συνολική βαθμολογία του υποψηφίου c είναι το άθροισμα των βαθμών του σε όλους τους ψηφοφόρους, δηλαδή, $sc(c, \succ) = \sum_{v=0}^{|V|-1} sc(c, \succ_v)$. Ένας κανόνας βαθμολόγησης επιλέγει ως νικητή(ες), τους υποψήφιους με τον μέγιστο βαθμό $(sc(c, \succ))$.

Πιο επίσημα, το πρόβλημα ορίζεται ως εξής.

Πρόβλημα: $(\kappa, \lambda, 0, ..., 0)$-ΔΩΡΟΔΟΚΙΑ

Στιγμιότυπο: Δεδομένου ενός *προφίλ προτίμησης*, ενός αριθμού B, του κανόνα ψηφοφορίας με διάνυσμα βαθμολόγησης $(\kappa, \lambda, 0, ..., 0)$, και ενός ξεχωριστού υποψηφίου C_0

Ερώτημα: Μπορούμε να κάνουμε τον C_0 νικητή αλλάζοντας τις λίστες των γραμμικών προτιμήσεων το πολύ B ψηφοφόρων;

Τώρα είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε και να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα σχετικά με το πρόβλημα της δωροδοκίας που αναφέραμε παραπάνω.

Θεώρημα 4.2.1. *Για κάθε ζευγάρι ακεραίων κ, λ τέτοιων ώστε τα κ, λ σχετικά πρώτοι μεταξύ τους και $\kappa > \lambda \geq 1$, τότε το $(\kappa, \lambda, 0, ..., 0)$-ΔΩΡΟΔΟΚΙΑ είναι υπολογιστικά δύσκολο.*

4.3 Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1

Θα αποδείξουμε ότι το $(\kappa, \lambda, 0, ..., 0)$-ΔΩΡΟΔΟΚΙΑ είναι υπολογιστικά δύσκολο χρησιμοποιώντας μια αναγωγή από το $(\kappa+1)$-DIMENSIONAL MATCHING που είναι ένα γνωστό υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα για $\kappa \geq 2$ [63].

Πρόβλημα: $(\kappa+1)$-DIMENSIONAL MATCHING

Στιγμιότυπο: $\kappa+1$ σύνολα των n στοιχείων X, Y_1, Y_2, ..., Y_κ που δεν έχουν κοινά στοιχεία μεταξύ τους και ένα σύνολο $T \subseteq X \times Y_1 \times ... \times Y_\kappa$ με $(\kappa+1)$-άδες.

Ερώτημα: Υπάρχει ένα υποσύνολο $T' \subseteq T$ με $|T'| = n$ τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του $X \cup Y_1 \cup ... \cup Y_\kappa$ να περιλαμβάνεται σε ακριβώς μια $(\kappa+1)$-άδα στο T';

4.3.1 Η αναγωγή

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τις συντομογραφίες $(\kappa+1)$-DM για το $(\kappa+1)$-DIMENSIONAL MATCHING και πλειάδα για την $(\kappa+1)$-άδα. Θεωρούμε ένα στιγμιότυπο $\mathcal{I}$ του $(\kappa+1)$-DM. Για κάθε στοιχείο $e \in X \cup Y_1 \cup ... \cup Y_\kappa$, συμβολίζουμε με $T_e \subseteq T$ το υποσύνολο των πλειάδων που περιέχουν τον e. Σημειώνουμε ότι $\sum_{x \in X} |T_x| = |T|$ και $\sum_{y \in Y_i} |T_y| = |T|$ για $i = 1, ..., \kappa$

Δεδομένου ενός στιγμιότυπου $\mathcal{I}$, θα κατασκευάσουμε το ακόλουθο στιγμιότυπο του $(\kappa, \lambda, 0, ..., 0)$-ΔΩΡΟΔΟΚΙΑ. Έστω $B = \lambda|T| + (\kappa - \lambda)n$. Το σύνολο των υποψηφίων είναι το ακόλουθο:

- Υπάρχει ένας ειδικός υποψήφιος C_0 και ένας ειδικός «πλεονάζων» υποψήφιος D_0.
- Για κάθε στοιχείο $x \in X$, υπάρχει ένα αντίστοιχο στοιχείο υποψήφιου $C(x)$.
- Για κάθε στοιχείο $y \in Y_1 \cup ... \cup Y_\kappa$, υπάρχει ένα αντίστοιχο στοιχείο υποψήφιου $C(y)$.
- Για κάθε πλειάδα $t \in T$, υπάρχει μια αντίστοιχη πλειάδα υποψήφιου $C(t)$.
- Για κάθε στοιχείο $x \in X$, υπάρχει ένα σύνολο από $\kappa|T| + (\kappa - \lambda)n - \lambda$ «πλεονάζοντες» υποψηφίους που αντιστοιχούν στο x.
- Για κάθε στοιχείο $y \in Y_1 \cup ... \cup Y_\kappa$, υπάρχει ένα σύνολο από $B - |T_y| + 1$ «πλεονάζοντες» υποψηφίους που αντιστοιχούν στο y.
- Για κάθε πλειάδα $t \in T$, υπάρχει ένα σύνολο από $B - \lambda$ «πλεονάζοντες» υποψηφίους που αντιστοιχούν στο t.

Το σύνολο των ψηφοφόρων και οι ψήφοι τους, ορίζονται ως εξής:

- Για κάθε στοιχείο $x \in X$ και για κάθε πλειάδα $t \in T_x$, υπάρχουν λ αντίστοιχοι κρίσιμοι ψηφοφόροι $V(x,t,1), V(x,t,2), ..., V(x,t,\lambda)$. Αυτοί οι ψηφοφόροι δίνουν κ βαθμούς στον $C(t)$ και λ βαθμούς στον $C(x)$ (και κανέναν βαθμό στους άλλους υποψηφίους).
- Για κάθε στοιχείο $y \in Y_1 \cup ... \cup Y_\kappa$ και για κάθε πλειάδα $t \in T_y$, υπάρχει ένας αντίστοιχος κρίσιμος ψηφοφόρος $V(y,t)$. Αυτός ο ψηφοφόρος δίνει κ βαθμούς στον $C(y)$ και λ βαθμούς στον $C(t)$.

- Για κάθε στοιχείο $x \in X$, υπάρχουν $\kappa|T| + (\kappa - \lambda)n - \lambda$ «πλεονάζοντες» ψηφοφόροι. Ανάμεσά τους, $(\kappa - \lambda)n$ «πλεονάζοντες» ψηφοφόροι δίνουν κ βαθμούς στον υποψήφιο $C(x)$ και λ βαθμούς σε έναν διακριτό «πλεονάζοντα» υποψήφιο που αντιστοιχεί στον x και οι υπόλοιποι $\kappa|T| - \lambda$ «πλεονάζοντες» ψηφοφόροι δίνουν κ βαθμούς σε έναν διαφορετικό διακριτό «πλεονάζοντα» υποψήφιο που αντιστοιχεί στον x και λ βαθμούς στον $C(x)$.

- Για κάθε στοιχείο $y \in Y_1 \cup ... \cup Y_\kappa$, υπάρχουν $B - |T_y| + 1$ «πλεονάζοντες» ψηφοφόροι. Καθένας από αυτούς δίνει τους κ βαθμούς στον $C(y)$ και τους λ βαθμούς σε έναν διακριτό «πλεονάζοντα» υποψήφιο που αντιστοιχεί στον y.

- Τέλος, για κάθε πλειάδα $t \in T$, υπάρχουν $B - \lambda$ «πλεονάζοντες» ψηφοφόροι. Καθένας από αυτούς δίνει τους κ βαθμούς στον $C(t)$ και τους λ βαθμούς σε έναν διακριτό «πλεονάζοντα» υποψήφιο που αντιστοιχεί στον t.

Η παραπάνω κατασκευή ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Ο ειδικός υποψήφιος C_0 έχει βαθμό 0.

- Για κάθε στοιχείο $x \in X$, ο υποψήφιος $C(x)$ παίρνει

  - λ βαθμούς από τους λ ψηφοφόρους $V(x, t, 1)$, ..., $V(x, t, \lambda)$ για κάθε πλειάδα t που περιέχει τον x και επίσης από $\kappa|T| - \lambda$ «πλεονάζοντες» ψηφοφόρους, και
  - κ βαθμούς από τους $(\kappa - \lambda)n$ «πλεονάζοντες» ψηφοφόρους.

  Έτσι, ο $C(x)$ έχει βαθμό $\kappa B + \lambda^2(|T_x| - 1)$.

- Για κάθε στοιχείο $y \in Y_1 \cup ... \cup Y_\kappa$, ο υποψήφιος $C(y)$ παίρνει κ βαθμούς από τον ψηφοφόρο $V(y, t)$ για κάθε πλειάδα t που περιέχει τον y και από $B - |T_y| + 1$ «πλεονάζοντες» ψηφοφόρους. Έτσι, ο $C(y)$ έχει βαθμό $\kappa B + \kappa$.

- Για κάθε πλειάδα $t = (x, y_1, ..., y_\kappa) \in T$, ο υποψήφιος $C(t)$ παίρνει

  - κ βαθμούς από τους λ ψηφοφόρους $V(x, t, 1)$, ..., $V(x, t, \lambda)$ καθώς επίσης και από $B - \lambda$ «πλεονάζοντες» ψηφοφόρους, και
  - λ βαθμούς από τους κ ψηφοφόρους $V(y_1, t)$, ..., $V(y_\kappa, t)$.

  Έτσι, ο $C(t)$ έχει βαθμό $\kappa B + \kappa\lambda$.

- Κάθε «πλεονάζων» υποψήφιος εκτός του D_0 παίρνει βαθμούς από έναν μόνο ψηφοφόρο. Έτσι, ο βαθμός του είναι το πολύ κ. Ο ειδικός «πλεονάζων» υποψήφιος D_0 έχει βαθμό 0.

4.3.2 Ορθότητα της απόδειξης

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι το στιγμιότυπο $\mathcal{I}$ απαντά ΝΑΙ, αν και μόνο αν ο ειδικός υποψήφιος C_0 μπορεί να γίνει νικητής με τη δωροδοκία το πολύ B ψηφοφόρων στο κατασκευασμένο στιγμιότυπο του $(\kappa, \lambda, 0, ..., 0)$-ΔΩΡΟΔΟΚΙΑΣ.

($\Rightarrow$) Καταρχάς, ας υποθέσουμε ότι το $\mathcal{I}$ είναι ένα στιγμιότυπο που απαντά ΝΑΙ, το οποίο πιστοποιείται από ένα σύνολο $T' \subseteq T$ των n πλειάδων. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μια δωροδοκία με B κρίσιμους ψηφοφόρους. Αυτό το κάνουμε σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα:

- Για κάθε πλειάδα $t \in T'$ με $t = (x, y_1, y_2, ..., y_k)$, δωροδοκούμε τους κ κρίσιμους ψηφοφόρους $V(y_1, t)$, $V(y_2, t)$, ..., $V(y_\kappa, t)$.
- Για κάθε πλειάδα $t \in T \setminus T'$ με $t = (x, y_1, y_2, ..., y_k)$, δωροδοκούμε τους λ κρίσιμους ψηφοφόρους $V(x, t, 1), V(x, t, 2), ..., V(x, t, \lambda)$.

Δεδομένου ότι κάθε στοιχείο y του $Y_1 \cup ... \cup Y_\kappa$ ανήκει σε ακριβώς μία πλειάδα t του T', ο βαθμός του υποψηφίου $C(y)$ μειώνεται κατά κ σε κB (λόγω της δωροδοκίας του κρίσιμου ψηφοφόρου $V(y, t)$). Για κάθε πλειάδα $t = (x, y_1, ..., y_\kappa)$ του T', ο βαθμός του υποψηφίου $C(t)$ μειώνεται κατά $\kappa\lambda$ σε κB (λόγω της δωροδοκίας των κρίσιμων ψηφοφόρων $V(y_1, t)$, ..., $V(y_\kappa, t)$). Επίσης, κάθε στοιχείο $x \in X$ ανήκει σε ακριβώς μια πλειάδα t του T' και, ως εκ τούτου, ο x ανήκει σε $|T_x| - 1$ πλειάδες του $T \setminus T'$. Ως εκ τούτου, ο βαθμός του μειώνεται κατά $\lambda^2(|T_x| - 1)$ ως κB εφόσον οι λ κρίσιμοι ψηφοφόροι $V(x, t, 1)$, ..., $V(x, t, \lambda)$ δωροδοκούνται για καθεμιά από τις $|T_x| - 1$ πλειάδες t του $T \setminus T'$ που περιέχει το στοιχείο x. Έτσι, μετά το πρώτο βήμα, η βαθμολογία του κάθε υποψηφίου είναι το πολύ κB, ενώ οι υποψήφιοι C_0 και D_0 εξακολουθούν να έχουν μηδενικό βαθμό.

Στο δεύτερο βήμα, κάθε δωροδοκημένος ψηφοφόρος δίνει τους κ βαθμούς του στον υποψήφιο C_0 και τους λ βαθμούς του στον υποψήφιο D_0. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των ψηφοφόρων που δωροδοκούνται στο πρώτο βήμα είναι ακριβώς $\kappa|T'| + \lambda(|T| - |T'|) = \lambda|T| + (\kappa - \lambda)n = B$. Έτσι, μετά το δεύτερο βήμα, ο υποψήφιος C_0 έχει βαθμολογία κB και κάθε άλλος υποψήφιος έχει βαθμό το πολύ κB. Ως εκ τούτου, ο υποψήφιος C_0 γίνεται νικητής.

($\Leftarrow$) Τώρα, ας υποθέσουμε ότι ο υποψήφιος C_0 γίνεται νικητής δωροδοκώντας ένα σύνολο $\mathcal{B}$ από B ψηφοφόρους. Θα δείξουμε ότι αυτό σημαίνει ότι το $\mathcal{I}$ είναι ένα στιγμιότυπο που απαντά ΝΑΙ στο $(\kappa + 1)$-DM.

Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι η αρχική βαθμολογία του κάθε στοιχείου και πλειάδας υποψηφίου είναι πάνω από κB. Καλούμε τη διαφορά του βαθμού ενός τέτοιου υποψηφίου με κB, το *πλεόνασμα* αυτού του υποψηφίου. Για κάθε στοιχείο $x \in X$, ο υποψήφιος $C(x)$ έχει πλεόνασμα $\lambda^2(|T_x| - 1)$. Έτσι, το συνολικό πλεόνασμα όλων αυτών των υποψηφίων είναι

$$\sum_{x \in X} \lambda^2(|T_x| - 1) = \lambda^2(|T| - n).$$

Για κάθε στοιχείο $y \in Y_1 \cup ... \cup Y_\kappa$, ο υποψήφιος $C(y)$ έχει πλεόνασμα κ. Για κάθε πλειάδα $t \in T$, ο υποψήφιος $C(t)$ έχει πλεόνασμα $\kappa\lambda$. Ως εκ τούτου, το συνολικό πλεόνασμα των στοιχείων και πλειάδων υποψηφίων είναι

$$\kappa^2 n + \kappa\lambda|T| + \lambda^2(|T| - n) = (\kappa + \lambda)B.$$

Δεδομένου ότι η βαθμολογία του υποψηφίου C_0 δεν μπορεί να υπερβαίνει το κB μετά από τη δωροδοκία, ο αριθμός των βαθμών που κάθε στοιχείο και πλειάδα υποψηφίου παίρνει από τους ψηφοφόρους του $\mathcal{B}$ δεν μπορεί να είναι μικρότερος από το πλεόνασμά του. Δεδομένου ότι το συνολικό πλεόνασμα των υποψηφίων αυτών είναι ακριβώς $(\kappa + \lambda)B$ και μόνο κρίσιμοι ψηφοφόροι δίνουν τους $\kappa + \lambda$ βαθμούς τους για τους εν λόγω υποψήφιους, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

- ο καθένας από αυτούς λαμβάνει αριθμό βαθμών από τους ψηφοφόρους του $\mathcal{B}$ που ισούται με το πλεόνασμά του και
- Το $\mathcal{B}$ περιέχει μόνο κρίσιμους ψηφοφόρους.

Επιπλέον ισχυριζόμαστε ότι κάθε πλειάδα $t = (x, y_1, y_2, ..., y_k) \in T$, $\mathcal{B}$ είτε περιέχει τους λ ψηφοφόρους $V(x, t, 1), V(x, t, 2), ..., V(x, t, \lambda)$ είτε (αποκλειστικά) τους κ ψηφοφόρους $V(y_1, t), V(y_2, t), ..., V(y_\kappa, t)$. Για να το δούμε αυτό, έστω χ ο αριθμός των ψηφοφόρων ανάμεσα στους $V(x, t, 1)$, ..., $V(x, t, \lambda)$ που ανήκουν στο $\mathcal{B}$, και έστω ψ ο αριθμός των ψηφοφόρων ανάμεσα στους $V(y_1, t)$, ..., $V(y_\kappa, t)$ που ανήκουν στο $\mathcal{B}$. Εφόσον οι ψηφοφόροι στο $\mathcal{B}$ δίνουν ακριβώς $\kappa\lambda$ βαθμούς στον υποψήφιο $C(t)$ (δηλαδή, το πλεόνασμα του), τότε πρέπει να ισχύει ότι $\kappa\lambda = \chi\kappa + \psi\lambda$. Εφόσον κ και λ είναι πρώτοι μεταξύ τους, οι μόνες μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης για τα (χ, ψ) είναι τα ζευγάρια $(\kappa, 0)$ και $(0, \lambda)$.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης, θεωρούμε το σύνολο $T' \subset T$ που περιέχει μια πλειάδα $t = (x, y_1, y_2, ..., y_k)$ του T αν και μόνο αν οι κ ψηφοφόροι $V(y_1, t), V(y_2, t), ..., V(y_\kappa, t)$ ανήκουν στο $\mathcal{B}$ (από την παρατήρησή μας ανωτέρω, αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν οι λ ψηφοφόροι $V(x, t, 1)$, ..., $V(x, t, \lambda)$ δεν δωροδοκούνται). Θα δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του $X \cup Y_1 \cup ... \cup Y_\kappa$ εμφανίζεται σε κάποια πλειάδα του T'. Πρώτα, παρατηρούμε ότι για κάθε στοιχείο $x \in X$, υπάρχει μια πλειάδα $t \in T_x$ έτσι ώστε οι κρίσιμοι ψηφοφόροι $V(x, t, 1)$, ..., $V(x, t, \lambda)$ δεν δωροδοκούνται. Πράγματι, αν δεν ισχύει αυτό, ο αριθμός των βαθμών που ο υποψήφιος $C(x)$ παίρνει από τους ψηφοφόρους στο $\mathcal{B}$ θα είναι τουλάχιστον $\lambda^2|T_x|$, που υπερβαίνει το πλεόνασμα του $C(x)$. Ως εκ τούτου, το στοιχείο x εμφανίζεται σε κάποια πλειάδα του T'. Επιπλέον, εφόσον οι μόνοι κρίσιμοι ψηφοφόροι που δίνουν κάποιους βαθμούς στον υποψήφιο $C(y)$ είναι οι ψηφοφόροι $V(y, t)$ με $t \in T_y$, υπάρχει μια πλειάδα $t \in T_y$ τέτοια ώστε να δωροδοκείται ο ψηφοφόρος $V(y, t)$ (καθώς και κάθε άλλος ψηφοφόρος $V(y', t)$ με $y' \in t$). Κατά συνέπεια, το στοιχείο y εμφανίζεται επίσης σε κάποια πλειάδα του T'.

Κεφάλαιο 5

Επίλογος - Μελλοντική Έρευνα

Στο πλαίσιο αυτής της διατριβής ασχοληθήκαμε με υπολογιστικά προβλήματα που ανακύπτουν στη θεωρία της κοινωνικής επιλογής. Πιο συγκεκριμένα ασχοληθήκαμε με προβλήματα που πηγάζουν από τη θεωρία ψηφοφοριών. Το πρώτο από αυτά τα προβλήματα που μελετήσαμε αφορά στους κανόνες ψηφοφορίας των Dodgson και Young, όπου και λάβαμε την ακόλουθη προσέγγιση: την ανάδειξη των νικητών σύμφωνα με αυτούς τους κανόνες ψηφοφορίας αν και ο υπολογισμός τους είναι υπολογιστικά δύσκολος. Ο στόχος μας είναι η προσέγγιση του βαθμού Dodgson ενός υποψηφίου όπως επίσης αντίστοιχα και η προσέγγιση του βαθμού ενός υποψηφίου σύμφωνα με τον κανόνα του Young. Αφιερώσαμε ένα σημαντικό κομμάτι της διατριβής στη μελέτη του κανόνα του Dodgson, διότι είναι ένας καλά μελετημένος κανόνας με αρκετούς υποστηρικτές από τη θεωρία της Κοινωνικής Επιλογής. Η συλλογιστική του Dodgson στο σχεδιασμό του κανόνα ψηφοφορίας του είναι μια ειδική περίπτωση ενός γενικότερου πλαισίου που ονομάζεται *απόσταση εξορθολογισμού*, η οποία προτάθηκε από τους Meskanen και Nurmi [93], και πρόσφατα έλαβε προσοχή στη βιβλιογραφία της τεχνητής νοημοσύνης [48, 50, 49]. Ο συλλογισμός πίσω από αυτό το πλαίσιο είναι ότι ένας κανόνας ψηφοφορίας θα πρέπει να εκλέξει ένα υποψήφιο που είναι πιο κοντά στο να είναι ένας συναινετικός νικητής, σύμφωνα με μια φυσική έννοια συναίνεσης και μια φυσική έννοια απόστασης. Ο κανόνας του Dodgson αφορά μια πολύ φυσική έννοια της συναίνεσης (νικητής Condorcet) και, αναμφισβήτητα, μια φυσική έννοια της απόστασης (αριθμός των ανταλλαγών μεταξύ γειτονικών υποψηφίων). Η εργασία των Parkes και Procaccia [101] δείχνει ότι, στο πλαίσιο της απόστασης εξορθολογισμού η συνάρτηση απόστασης μπορεί να είναι ανάλογη με την άμεση ποσοτική μέτρηση της ποιότητας ενός υποψηφίου. Ως εκ τούτου, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι ένας υποψήφιος είναι περισσότερο κοινωνικά επιθυμητός όσο μικρότερος είναι ο βαθμός κατά Dodgson, δηλαδή, ο βαθμός από μόνος του έχει νόημα και όχι μόνο η κατάταξη Dodgson, και ως εκ τούτου μια καλή προσέγγιση του βαθμού Dodgson μπορεί επίσης να ξεχωρίζει τους κοινωνικά επιθυμητούς νικητές. Στο πλαίσιο αυτό παρουσιάσαμε δύο προσεγγιστικούς αλγορίθμους με αρμονικό λόγο προσέγγισης (στον αριθμό των υποψηφίων) του βαθμού Dodgson. Συμπληρώσαμε αυτούς τους αλγορίθμους αποδεικνύοντας ότι ο λόγος προσέγγισης τους είναι βέλτιστος κατά ένα συντελεστή 2. Στη συνέχεια μελετήσαμε τις κατατάξεις που παράγονται σύμφωνα με το κανόνα του Dodgson και εξηγήσαμε γιατί αυτές μπορεί να είναι πολύ διαφορετικές σε σχέση με κατατάξεις που παράγονται για το ίδιο προφίλ προτίμησης από άλλους κανόνες. Αυτό συμβαίνει όπως δείξαμε διότι το πρόβλημα της διάκρισης του εάν ένας υποψήφιος είναι ο νικητής ή στις τελευταίες $\sqrt{m}$ θέσεις της κατάταξης σύμφωνα με τον κανόνα του Dodgson είναι υπολογιστικά δύσκολο. Ολοκληρώσαμε με τον κανόνα του Young όπου παρουσιάσαμε ανάλογα αποτελέσματα δυσκολίας υπολογισμού του βαθμού, όπως επίσης και μη προσεγγισιμότητας της κατάταξης.

Στο πλαίσιο αυτής της διδακτορικής διατριβής συνεχίσαμε την έρευνα μας πάνω στο αντικείμενο με την αναζήτηση επιθυμητών ιδιοτήτων από τη πλευρά της θεωρίας της κοινωνικής επιλογής που θα ισχυροποιούσε την πεποίθησή μας ότι οι αλγόριθμοι προσέγγισης του Dodgson μπορούν να θεωρηθούν ως νέοι ισχυροί κανόνες ψηφοφορίας. Για να συμβεί αυτό μελετήσαμε προσεγγιστικούς αλγόριθμους του κανόνα του Dodgson που πληρούν ένα πολύ βασικό κριτήριο, αυτό της μονοτονίας. Τα αποτελέσματά μας που αφορούν τη μονοτονία είναι θετικά σε όλους τους τομείς. Αποδίδουμε ιδιαίτερη σημασία στο ότι η έλλειψη μονοτονίας στον Dodgson μπορεί να παρακαμφθεί με ελαφρά τροποποίηση του ορισμού του βαθμού Dodgson (Θεώρημα 3.3.2). Κατά μία έννοια το γεγονός αυτό δείχνει ότι ο κανόνας του Dodgson δεν είναι ουσιαστικά πολύ μακριά από το να είναι μονότονος. Πράγματι, αν κάποιος ενδιαφέρεται για υπολογιστικά εύκολα υπολογίσιμους αλγόριθμους τότε ο λόγος προσέγγισης $\mathcal{O}(\log m)$ είναι βέλτιστος (Θεώρημα 3.3.10). Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ικανοποιήσουμε επιπλέον τη μονοτονία χωρίς να αυξήσουμε (ασυμπτωτικά) το λόγο προσέγγισης. Οι τεχνικές που χρησιμοποιήσαμε για μονοτονοποίηση έχουν ανεξάρτητα εξαιρετικό ενδιαφέρον.

Τα αποτελέσματά μας όσον αφορά την ομοιογένεια (Θεώρημα 3.4.1 και Θεώρημα 3.4.2) μπορούν να ερμηνευτούν τόσο θετικά όσο και αρνητικά. Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση όπου ο αριθμός των υποψηφίων m είναι μικρός (π.χ., στις πολιτικές εκλογές). Ο απλοποιημένος Dodgson κανόνας του Tideman, ο οποίος έχει ήδη αναγνωριστεί ως ένας επιθυμητός κανόνας ψηφοφορίας, καθώς είναι ομοιογενής, μονότονος, Condorcet-συνεπής, και επιλύσιμος σε πολυωνυμικό χρόνο δείξαμε ότι έχει το πλεονέκτημα ότι επιλέγει πάντα ένα υποψήφιο που είναι σχετικά κοντά (σύμφωνα με την έννοια της απόστασης κατά Dodgson) στο να είναι νικητής κατά Condorcet (Θεώρημα 3.4.1). Δηλαδή, η βασική ιδέα του κανόνα του Dodgson πράγματι διατηρείται από την «απλούστευση» και (λόγω του Θεωρήματος 3.4.2), αυτό επιτυγχάνεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Αν το δούμε αρνητικά, όταν ο αριθμός των υποψηφίων είναι μεγάλος (μια ακραία περίπτωση είναι ένα σύστημα πολλαπλών ψηφοφόρων όπου οι ψηφοφόροι ψηφίζουν πάνω στα κοινά σχέδια), ενισχύουμε την κριτική κατά του κανόνα Dodgson: όχι μόνο ο ίδιος ο κανόνας δεν είναι ομοιογενής, αλλά οποιαδήποτε (ακόμα και υπολογίσιμη σε εκθετικό χρόνο) παραλλαγή που προσπαθεί να διατηρήσει κατά προσέγγιση την έννοια της εγγύτητας του Dodgson ως προς τον Condorcet είναι επίσης ανομοιογενής (Θεώρημα 3.4.2). Πιστεύουμε ότι και οι δύο ερμηνείες των αποτελεσμάτων της ομοιογένειας ενδιαφέρουν τους θεωρητικούς της κοινωνικής επιλογής, καθώς και τους επιστήμονες της πληροφορικής.

Το τελευταίο υπολογιστικό πρόβλημα με το οποίο ασχοληθήκαμε στο πλαίσιο αυτής της διατριβής αφορά στην τακτική ψηφοφορία και πιο συγκεκριμένα στη δωροδοκία των εκλογών. Η επισκόπηση της πρόσφατης βιβλιογραφίας σχετικά με τη δωροδοκία στη θεωρία της κοινωνικής επιλογής, δεδομένου ότι ο κανόνας της πλειοψηφίας και της 2-έγκρισης ανήκουν στο P, θέτει το ερώτημα: ποιος είναι ο απλούστερος κανόνας ψηφοφορίας που βασίζεται σε βαθμολόγηση και είναι υπολογιστικά δύσκολος να δωροδοκηθεί; Έτσι οδηγηθήκαμε στο να μελετήσουμε μια τάξη κανόνων ψηφοφορίας όπου σε κάθε ψηφοφόρο ο πρώτος υποψήφιος παίρνει κ βαθμούς, ο δεύτερος λ βαθμούς και όλοι οι υπόλοιποι 0 βαθμούς. Έτσι σχετικά με το προηγούμενο ερώτημα, δηλώνουμε ότι η απάντηση είναι θετική, καθώς αποδείξαμε ότι το πρόβλημα δωροδοκίας αυτής της τάξης κανόνων είναι υπολογιστικά δύσκολο, και ουσιαστικά αυτό κάνει τον συγκεκριμένο κανόνα ανθεκτικό σε δωροδοκία.

Η έρευνά μας έχει θέσει πολλά ζητήματα που χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης. Στο μέλλον, οραματιζόμαστε την επέκταση της έρευνας των κοινωνικά επιθυμητών αλγορίθμων προσέγγισης σε άλλους σημαντικούς κανόνες ψηφοφορίας. Τα θετικά μας αποτελέσματα προς την κατεύθυνση αυτή θα δώσουν τα εργαλεία για να παρακάμψουμε ελλείψεις γνωστών κανόνων ψηφοφορίας χωρίς να θυσιάζουμε τις βασικές τους αρχές, ενώ τα αρνητικά αποτελέσματα θα ενισχύσουν περαιτέρω την κατανόηση των εν λόγω ελλείψεων. Οι ερωτήσεις που θέσαμε στη διατριβή είναι σχετικές, ακόμη και για υπολογίσιμους κανόνες ψηφοφορίας που δεν πληρούν ορισμένες ιδιότητες. Επίσης, παραμένει ανοιχτό πρόβλημα η συσχέτιση γνωστών κανόνων και ο υπολογισμός των προσεγγίσεων που μπορεί να έχουν οι διαφορετικές κατατάξεις που παράγουν. Η εργασία σε αυτή την κατεύθυνση μπορεί να περιλαμβάνει γνωστούς υπολογίσιμους, συνεπείς κατά Condorcet, μονότονους, και ομοιογενείς κανόνες, όπως ο κανόνας του Copeland και ο Maximin (π.χ., [121]) με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιούμε τον απλοποιημένο κανόνα Dodgson του Tideman. Θα μπορούσαν επίσης να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές έννοιες της προσέγγισης (όπως οι πρόσθετες ή οι διαφορικές προσεγγίσεις), εκτός από τον τυπικό ορισμό του λόγου προσέγγισης ως πολλαπλασιαστικού παράγοντα που χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή. Επίσης, περαιτέρω έρευνα πρέπει να γίνει σχετικά με την εύρεση απλών κανόνων ψηφοφορίας που είναι υπολογιστικά δύσκολοι να υποστούν δωροδοκία ή και άλλες μορφές της τακτικής ψηφοφορίας όπως η χειραγώγηση και ο έλεγχος.

Βιβλιογραφία

[1] N. Ailon, M. Charikar, and A. Newman. Aggregating inconsistent information: ranking and clustering. *Journal of the ACM*, 55(5), pages 23, 2008.

[2] A. Altman and M. Tennenholtz. Ranking systems: The PageRank axioms. In *Proceedings of the 6th ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*, pages 1–8, 2005.

[3] A. Archer and É. Tardos. Truthful mechanisms for one-parameter agents. In *Proceedings of the 42nd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 482–491, 2001.

[4] J. Bartholdi and J. Orlin. Single transferable vote resists strategic voting. *Social Choice and Welfare*, 8(4), pages 341–354, 1991.

[5] J. Bartholdi, C. A. Tovey, and M. A. Trick. The computational difficulty of manipulating an election. *Social Choice and Welfare*, 6(3), pages 227–241, 1989.

[6] J. Bartholdi, C. A. Tovey, and M. A. Trick. Voting schemes for which it can be difficult to tell who won the election. *Social Choice and Welfare*, 6, pages 157–165, 1989.

[7] J. Bartholdi, C. A. Tovey, and M. A. Trick. How hard is it to control an election?. *Mathematical and Computer Modeling*, 16(8/9), pages 27–40, 1992.

[8] D. Baumeister, G. Erdélyi, J. Rothe How Hard Is it to Bribe the Judges? A Study of the Complexity of Bribery in Judgment Aggregation In *Proceedings of the 2nd International Conference Algorithmic Decision Theory (ADT)*, pages 1–15, 2011.

[9] P. Berman and M. Karpinski. On some tighter inapproximability results. In *Proceedings of the 26th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP)*, pages 200–209, 1999.

[10] N. Betzler, J. Guo, and R. Niedermeier. Parameterized computational complexity of Dodgson and Young elections. *Information and Computation*, 208(2), pages 165–177, 2010.

[11] D. Black. *Theory of Committees and Elections*. Cambridge University Press, 1958.

[12] J. C. Borda. Mémoire sur les élections au scrutin. *Histoire de l' Académie Royale des Sciences*, 1781.

[13] S. Bouveret, H. Fargier, J. Lang, and M. Lemaître. Allocation of indivisible goods: A general model and some complexity results. In *Proceedings of the fourth international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems (AAMAS)*, pages 1309–1310, 2005.

[14] S. Bouveret and J. Lang. Efficiency and envy-freeness in fair division of indivisible goods: logical representation and complexity. In *Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 935–940, 2005.

[15] S. Brams, P. Edelman, and P. Fishburn. Fair division of indivisible items. Technical Report RR 2000–15, C.V. Starr Center for Applied Economics, New York University, 2000.

[16] S. Brams and P. Fishburn. Approval voting. *American Political Science Review*, 72(3), pages 831–847, 1978.

[17] S. Brams and P. Fishburn. Voting procedures. *Handbook of Social Choice and Welfare*, chapter 4, Elsevier, 2004.

[18] S. Brams, D. M. Kilgour, and W. Zwicker. The paradox of multiple elections. *Social Choice and Welfare*, 15, pages 211–236, 1998.

[19] F. Brandt. Social choice and preference protection: Towards fully private mechanism design. In *Proceedings of the 4th ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*, pages 220-221, 2003.

[20] F. Brandt. Some remarks on Dodgson's voting rule. *Mathematical Logic Quarterly*, 55(4), pages 460–463, 2009.

[21] F. Brandt, F. Fischer, and P. Harrenstein. The computational complexity of choice sets. *Mathematical Logic Quarterly*, 55(4), pages 444–459, 2009.

[22] F. Brandt and T. Sandholm. Unconditional privacy in social choice. In *Proceedings of the 10th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK)*, pages 207–218, 2005.

[23] I. Caragiannis, J. A. Covey, M. Feldman, C. M. Homan, C. Kaklamanis, N. Karanikolas, A. D. Procaccia, and J. S. Rosenschein. On the approximability of Dodgson and Young elections. *Artificial Intelligence*, 187–188, pages 31–51, 2012. A preliminary version of this paper appeared in the *Proceedings of the 20th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 1058–1067, 2009.

[24] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, N. Karanikolas, and A. D. Procaccia. Socially desirable approximations for Dodgson's voting rule. *ACM Transactions on Algorithms*, Volume 10, Issue 2, February 2014. A preliminary version of this paper appeared in the *Proceedings of the 11th ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*, pages 253–262, 2010.

[25] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, N. Karanikolas, G. J. Woeginger. Which are the simplest scoring voting rules that are hard to bribe? Work in progress.

[26] Y. Chevaleyre, P. E. Dunne, U. Endriss, J. Lang, M. Lemaître, N. Maudet, J. Padget, S. Phelps, J. A. Rodríguez-Aguilar, and P. Sousa. Issues in multiagent resource allocation. *Informatica*, 30, pages 3–31, 2006.

[27] Y. Chevaleyre, U. Endriss, S. Estivie, and N. Maudet. Reaching envy-free states in distributed negotiation settings. In *Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 1239-1244, 2007.

[28] S. Chopra, A. Ghose, and T. Meyer. Social choice theory, belief merging, and strategy-proofness. *International Journal on Information Fusion*, 7(1), pages 61–79, 2006.

[29] V. Conitzer. Computing Slater rankings using similarities among candidates. In *Proceedings of the 21st AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pages 613–619, 2006.

[30] V. Conitzer, A. Davenport, and J. Kalagnanam. Improved bounds for computing Kemeny rankings. In *Proceedings of the 21st AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pages 620–626, 2006.

[31] V. Conitzer and T. Sandholm. Vote elicitation: Complexity and strategy-proofness. In *18th AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pages 392–397, 2002.

[32] V. Conitzer and T. Sandholm. Communication complexity of common voting rules. In *Proceedings of the 6th ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*, pages 78-87, 2005

[33] V. Conitzer and T. Sandholm Common voting rules as maximum likelihood estimators. In *Proceedings of the 21st Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI)*, pages 145–152, 2005.

[34] V. Conitzer, T. Sandholm and J. Lang. When are elections with few candidates hard to manipulate? *Journal of the ACM*, 54(3), Article 14, 2007.

[35] C. A. Copeland. A reasonable social choice function. Mimeo, University of Michigan, 1951.

[36] D. Coppersmith, L. Fleischer, and A. Rudra. Ordering by weighted number of wins gives a good ranking for weighted tournaments. In *Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 776–782, 2006.

[37] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. *Introduction to Algorithms*, second edition. MIT Press, 2001.

[38] P. Cramton, Y. Shoham, and R. Steinberg, editors. *Combinatorial Auctions*. MIT Press, 2006.

[39] Marquis de Condorcet. Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité de décisions rendues à la pluralité de voix. Imprimerie Royal, 1785. Facsimile published in 1972 by Chelsea Publishing Company, New York.

[40] S. Demko and T. P. Hill. Equitable distribution of indivisible items. *Mathematical Social Sciences*, 16, pages 145–158, 1998.

[41] F. Dietrich and C. List. Judgment aggregation by quota rules. *Journal of Theoretical Politics*, 2006.

[42] C. Dodgson. A method of taking votes on more than two issues, 1876. Reprint in [11].

[43] P. E. Dunne. Extremal behaviour in multiagent contract negotiation. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 23, pages 41–78, 2005.

[44] P. E. Dunne and Y. Chevaleyre. Negotiation can be as hard as planning: Deciding reachability properties of distributed negotiation schemes. Technical Report ULCS- 05–009, Department of Computer Science, University of Liverpool, 2005.

[45] P. E. Dunne, M. Wooldridge, and M. Laurence. The complexity of contract negotiation. *Artificial Intelligence*, 164(1–2), pages 23–46, 2005.

[46] C. Dwork, R. Kumar, M. Naor, and D. Sivakumar Rank aggregation methods for the web. In *Proceedings of the 10th International Conference on World Wide Web (WWW)*, pages 613–622, 2001.

[47] D. Eckert and G. Pigozzi. Belief merging, judgment aggregation, and some links with social choice theory. In *Belief Change in Rational Agents: Perspectives from Artificial Intelligence, Philosophy, and Economics*, Dagstuhl Seminar Proceedings 05321, 2005.

[48] E. Elkind, P. Faliszewski, and A. Slinko. On distance rationalizability of some voting rules. In *Proceedings of the 12th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK)*, pages 108–117, 2009.

[49] E. Elkind, P. Faliszewski, and A. Slinko. Good rationalizations of voting rules. In *Proceedings of the 24th AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pages 774–779, 2010.

[50] E. Elkind, P. Faliszewski, and A. Slinko. On the role of distances in defining voting rules. In *Proceedings of the 9th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS)*, pages 375–382, 2010.

[51] U. Endriss and N. Maudet. On the communication complexity of multilateral trading: Extended report. *Journal of Autonomous Agents and Multiagent Systems*, 11(1), pages 91–107, 2005.

[52] U. Endriss, N. Maudet, F. Sadri, and F. Toni. Negotiating socially optimal allocations of resources. J*ournal of Artificial Intelligence Research*, 25, pages 315–348, 2006.

[53] E. Ephrati and J. S. Rosenschein. A heuristic technique for multiagent planning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 20, pages 13–67, 1997.

[54] P. Faliszewski, E. Hemaspaandra, and L. Hemaspaandra. The complexity of bribery in elections. In *Proceedings of the 21st AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pages 641–646, 2006.

[55] P. Faliszewski, E. Hemaspaandra and L. A. Hemaspaandra. How Hard Is Bribery in Elections? *Journal of Artificial Intelligence Research*, 35, pages 485–532, 2009.

[56] P. Faliszewski, E. Hemaspaandra, and L. A. Hemaspaandra. Multimode control attacks on elections. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 40, pages 305–351, 2011.

[57] P. Faliszewski, E. Hemaspaandra, L. A. Hemaspaandra, and J. Rothe. Llull and Copeland voting broadly resist bribery and control. In *Proceedings of the 22nd AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pages 724–730, 2007.

[58] P. Faliszewski, E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra, and J. Rothe. Llull and Copeland voting computationally resist bribery and constructive control. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 35, pages 275–341, 2009.

[59] P. Faliszewski and A. Procaccia. AI's War on Manipulation: Are We Winning? AI Magazine, Vol. 31(4), pages 53–64, December 2010.

[60] U. Feige. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. *Journal of the ACM*, 45(4), pages 643–652, 1998.

[61] P. C. Fishburn. Condorcet social choice functions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 33(3), pages 469–487, 1977.

[62] P. C. Fishburn. Monotonicity paradoxes in the theory of elections. *Discrete Applied Mathematics*, 4(2), pages 119–134, 1982.

[63] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman and Company, 1979.

[64] S. Ghosh, M. Mundhe, K. Hernandez, S. Sen Voting for movies: The anatomy of recommender systems. In *Proceedings of the 3rd Annual Conference on Autonomous Agents (Agents)*, pages 434–435, 1999.

[65] A. Gibbard. Manipulation of voting schemes. *Econometrica*, 41, pages 587–602, 1973.

[66] E. Hemaspaandra and L. A. Hemaspaandra. Dichotomy for voting systems. *Journal of Computer and System Sciences*, 73(1), pages 73–83, 2007.

[67] E. Hemaspaandra, L. A. Hemaspaandra, and J. Rothe. Exact analysis of Dodgson elections: Lewis Carroll's 1876 voting system is complete for parallel access to NP. *Journal of the ACM*, 44(6), pages 806–825, 1997.

[68] E. Hemaspaandra, L. A. Hemaspaandra, and J. Rothe. Anyone but him: The complexity of precluding an alternative. *Artificial Intelligence*, 171(5–6), pages 255–285, 2007.

[69] E. Hemaspaandra, H. Spakowski, and J. Vogel. The complexity of Kemeny elections. *Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik*, 2003.

[70] D. Herreiner and C. Puppe. A simple procedure for finding equitable allocations of indivisible goods. *Social Choice and Welfare*, 19, pages 415–430, 2002.

[71] C. Homan and L. A. Hemaspaandra. Guarantees for the success frequency of an algorithm for finding Dodgson-election winners. *Journal of Heuristics*, 15(4), pages 403–423, 2009.

[72] O. Hudry. A note on Banks winners in tournaments are difficult to recognize by G. J. Woeginger. *Social Choice and Welfare*, 23(1), pages 113–114, 2004.

[73] M. Karpinski. Approximating bounded degree instances of NP-hard problems. In *Proceedings of the 13th International Symposium on Fundamentals of Computation Theory (FCT)*, pages 24–34. Springer, 2001.

[74] J. Kemeny. Mathematics without numbers. *Daedalus*, 88, pages 577–591, 1959.

[75] C. Kenyon-Mathieu and W. Schudy. How to rank with few errors. In *Proceedings of the 39th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 95–103, 2007.

[76] C. Klamler. A comparison of the Dodgson method and the Copeland rule. *Economics Bulletin*, 4(8), pages 1–7, 2003.

[77] C. Klamler. The Dodgson ranking and its relation to Kemeny's method and Slater's rule. *Social Choice and Welfare*, 23(1), pages 91–102, 2004.

[78] C. Klamler. The Dodgson ranking and the Borda count: a binary comparison. *Mathematical Social Sciences*, 48(1), pages 103–108, 2004.

[79] K. Konczak and J. Lang. Voting procedures with incomplete preferences. In *Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence. Multidisplinary Workshop on Advances in Preference Handling*, 2005.

[80] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. DA^2 merging operators. *Artificial Intelligence*, 157(1–2), pages 49–79, 2004.

[81] S. Konieczny and R. P. Pérez. Propositional belief base merging or how to merge beliefs/goals coming from several sources and some links with social choice theory. *European Journal of Operational Research*, 160(3), pages 785–802, 2005.

[82] E. Kushilevitz and N. Nisan. *Communication Complexity.* Cambridge University Press, 1997.

[83] J. Lang. Logical preference representation and combinatorial vote. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 42(1), pages 37–71, 2004.

[84] J. Lang. Vote and aggregation in combinatorial domains with structured preferences. In *Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 1366–1371, 2007.

[85] J. Lang, M. Pini, F. Rossi, K. Venable, and T. Walsh. Winner determination in sequential majority voting with incomplete preferences. In *Proceedings of the European Conference on Artificial Intelligence (ECAI). Multidisciplinary Workshop on Advances in Preference Handling*, 2006.

[86] Andrew Lin. The Complexity of Manipulating k-Approval Elections. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Agents and Artificial Intelligence, (ICAART)* (2), pages 212–218, 2011.

[87] R. Lipton, E. Markakis, E. Mossel, and A. Saberi. On approximately fair allocations of indivisible goods. In *Proceedings of the 5th ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*, pages 125–131, 2004.

[88] P. Maynard-Zhang and D. Lehmann. Representing and aggregating conflicting beliefs. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 19, pages 155–203, 2003.

[89] J. C. McCabe-Dansted. Approximability and computational feasibility of Dodgson's rule. Master's thesis, University of Auckland, 2006.

[90] J. C. McCabe-Dansted. Dodgson's rule: Approximations and absurdity. In *Proceedings of the 2nd International Workshop on Computational Social Choice (COMSOC)*, pages 371–382, 2008.

[91] J. C. McCabe-Dansted, G. Pritchard, and A. M. Slinko. Approximability of Dodgson's rule. *Social Choice and Welfare*, 31(2), pages 311–330, 2008

[92] R.Meir, A. D. Procaccia, J. S. Rosenschein and A. Zohar. The complexity of strategic behavior in multi-winner elections. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 33, pages 149–178, 2008.

[93] T. Meskanen and H. Nurmi. Closeness counts in social choice. In M. Braham and F. Steffen, editors, *Power, Freedom, and Voting*. Springer-Verlag, 2008.

[94] T. Meyer, A. Ghose, and S. Chopra. Social choice, merging, and elections. In *Proceedings of European Conferences on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU)*, 2001.

[95] H. Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge University Press, 1988.

[96] K. Nehring and C. Puppe. Consistent judgement aggregation: A characterization. Technical report, Univ. Karlsruhe, 2005.

[97] N. Nisan. Introduction to mechanism design (for computer scientists). In N. Nisan, T. Roughgarden, É. Tardos, and V. Vazirani, editors, *Algorithmic Game Theory*, chapter 9. Cambridge University Press, 2007.

[98] N. Nisan and A. Ronen. Algorithmic mechanism design. *Games and Economic Behavior*, 35(1–2), pages 166–196, 2001.

[99] N. Nisan and I. Segal. The communication requirements of efficient allocations and supporting prices. *Journal of Economic Theory*, (129), pages 192–224, 2006.

[100] M. J. Osborne and A. Rubinstein. *A Course in Game Theory*. MIT Press, 1994.

[101] D. C. Parkes and A. D. Procaccia. Dynamic social choice: Foundations and algorithms. Manuscript, 2010.

[102] G. Pigozzi. Belief merging and the discursive dilemma: an argument-based account to paradoxes of judgment aggregation. *Synthese*, 152(2), pages 285–298, 2006.

[103] M. Pini, F. Rossi, K. Venable, and T. Walsh. Winner determination in sequential majority voting with incomplete preferences. In *Proceedings of the European Conference on Artificial Intelligence (ECAI). Multidisciplinary Workshop on Advances in Preference Handling*, pages 1372–1377, 2006.

[104] A. Procaccia and J. S. Rosenschein. The communication complexity of coalition formation among autonomous agents. In *Proceedings of International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, pages 505 - 512, 2006.

[105] A. D. Procaccia, A. Zohar, Y. Peleg, and J. S. Rosenschein. The learnability of voting rules. *Artificial Intelligence*, 173(12–13), pages 1133–1149, 2009.

[106] S. Rajagopalan and V. V. Vazirani. Primal-dual RNC approximation algorithms for set cover and covering integer programs. *SIAM Journal on Computing*, 28, pages 526–541, 1999.

[107] T. C. Ratliff. A comparison of Dodgson's method and Kemeny's rule. *Social Choice and Welfare*, 18(1), pages 79–89, 2001.

[108] T. C. Ratliff. A comparison of Dodgson's method and the Borda count. *Economic Theory*, 20(2), pages 357–372, 2002.

[109] R. Raz and S. Safra. A sub-constant error-probability low-degree test, and sub-constant error-probability PCP characterization of NP. In *Proceedings of the 29th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 475–484, 1997.

[110] J. Rothe, H. Spakowski, and J. Vogel. Exact complexity of the winner problem for Young elections. *Theory of Computing Systems*, 36(4), pages 375–386, 2003.

[111] M. Rothkopf, A. Pekec, and R. Harstad. Computationally manageable combinational auctions. *Management Science*, 44(8), pages 1131–1147, 1998.

[112] T. Sandholm. Contract types for satisficing task allocation: I Theoretical results. In *Proceedings of AAAI Spring Symposium: Satisficing Models*, 1998.

[113] M. Satterthwaite. Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, 10, pages 187–217, 1975.

[114] M. Schulze. A new monotonic and clone-independent single-winner election method. *Voting Matters*, 17, pages 9–19, 2003.

[115] I. Segal. *The Communication Requirements of Combinatorial Allocation Problems*. In Cramton et al, 35, 2006.

[116] I. Segal. The communication requirements of social choice rules and supporting budget sets. *Journal of Economic Theory*, 136(1), pages 341-378, 2007.

[117] O. Shehory and S. Kraus. Coalition formation among autonomous agents. *From Reaction to Cognition*. Springer-Verlag, 1995.

[118] P. Slater, Inconsistencies in a schedule of paired comparisons. *Biometrika*, 48, pages 303–312, 1961.

[119] M. Tennenholtz. Transitive voting. In *Proceedings of the 5th ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*, pages 230–231, 2004.

[120] N. Tideman. Independence of clones as a criterion for voting rules. *Social Choice and Welfare*, 4(3), pages 185–206, 1987.

[121] N. Tideman. *Collective Decisions and Voting: The Potential for Public Choice*. Ashgate, 2006.

[122] V. V. Vazirani. *Approximation Algorithms*. Springer, 2001.

[123] J. M. Wing. Computational thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), pages 33–35, 2006.

[124] G. J. Woeginger. Banks winners in tournaments are difficult to recognize. *Social Choice and Welfare*, 20(3), pages 523–528, 2003.

[125] M. Wooldridge. *An Introduction to Multiagent Systems*. Wiley, 2002.

[126] H. P. Young. Extending Condorcet's rule. *Journal of Economic Theory*, 16, pages 335–353, 1977.

[127] H. P. Young and A. Levenglick A consistent extenision of Condorcet's election principle. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 35(2), pages 285–300.