ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Αλγοριθμικές Θεμελιώσεις Ελέγχου Ροής δια Προσαρμογής του Ρυθμού Μετάδοσης

Παναγιώτα Φατούρου

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Παύλος Σπυράκης

Πάτρα, Ιούνιος 1999

στην οικογένειά μου

Περίληψη

Ο *έλεγχος ροής* είναι η κυρίαρχος τεχνική που χρησιμοποιείται στα δίκτυα επικοινωνιών, προκειμένου να προλαμβάνονται καταστάσεις συμφόρησης του δικτύου λόγω υψηλής κυκλοφορίας. Οι αλγόριθμοι ελέγχου ροής *δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης* ελέγχουν το ρυθμό μετάδοσης των συνόδων καθ' όλο το μήκος τους, εκτελώντας μια σειρά από *πράξεις προσαρμογής*, οι οποίες σέβονται τη *συνθήκη χωρητικότητας* σε κάθε σύνδεσμο. Δύο σημαντικοί παράμετροι απόδοσης των αλγορίθμων αυτών είναι η *τοπικότητα* και η *πολυπλοκότητα σύγκλισής* τους. Η τοπικότητα εκφράζει το ποσοστό πληροφορίας για τις συνόδους και το δίκτυο που διατίθεται στο μηχανισμό δρομολόγησης, ενώ η πολυπλοκότητα σύγκλισης ορίζεται ως ο αριθμός των πράξεων στους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων μέχρι να επιτευχθεί *δικαιοσύνη μεγίστου-ελαχίστου.*

Σε αυτή τη διατριβή παρουσιάζουμε μια συλλογή από κάτω και άνω όρια στην πολυπλοκότητα σύγκλισης των αλγορίθμων ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης κάτω από διαφορετικά επίπεδα τοπικότητας. Παρουσιάζουμε και μελετάμε αλγορίθμους *χωρίς γνώση*, οι οποίοι δεν έχουν καμία πληροφορία ούτε για την τοπολογία του δικτύου, ούτε για τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων, αλγορίθμους με *μερική γνώση*, οι οποίοι γνωρίζουν τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων αλλά δεν έχουν πληροφορία για την τοπολογία του δικτύου, και αλγορίθμους με *πλήρη γνώση*, οι οποίοι έχουν στη διάθεση τους κάθε πληροφορία σχετική με τις συνόδους ή με το δίκτυο. Αποδεικνύουμε ότι οι κλάσεις των αλγορίθμων χωρίς γνώση και εκείνων με μερική γνώση έχουν τις ίδιες ιδιότητες όσον αφορά την πολυπλοκότητα σύγκλισης. Ωστόσο, τα αποτέλεσματά μας οριοθετούν ένα διαχωρισμό ως προς την πολυπλοκότητα σύγκλισης μεταξύ των κλάσεων των αλγορίθμων με μερική ή χωρίς γνώση και εκείνων με πλήρη γνώση. Συνεπώς, η γνώση μόνο των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων δε συντελεί στη βελτίωση της απόδοσης των αλγορίθμων χωρίς γνώση. Αντίθετα, οι αλγόριθμοι με πλήρη γνώση παρουσιάζουν καλύτερη απόδοση.

Παρότι η πολυπλοκότητα σύγκλισης, που ορίζεται ως ο αριθμός των πράξεων στους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων αποτελεί εύστοχο μετρικό των επιμέρους κύκλων επικοινωνίας που πραγματοποιούνται μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση, δεν είναι από μόνη της επαρκής για την καθολική αξιολόγηση της αποδοτικότητας αλγορίθμων ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθ-

μού μετάδοσης. Ο λόγος είναι ότι οι πράξεις αυτές συνήθως υποκρύπτουν χαμηλού επιπέδου λεπτομέρειες υλοποίησης, ενώ παράλληλα απαιτούν μη προφανείς τοπικούς υπολογισμούς στους δικτυακούς διακόπτες. Στην διατριβή αυτή, επιδιώκουμε να αναλύσουμε ακριβέστερα την πολυπλοκότητα τέτοιων αλγορίθμων γεφυρώνοντας έτσι το χάσμα μεταξύ της θεωρητικής αξιολόγησής τους, και της πιο ρεαλιστικής προσέγγισής τους που προκύπτει μέσα από την κατανεμημένη και ασύγχρονη υλοποίησή τους. Παρουσιάζουμε απλούς, αλλά κομψούς και αποτελεσματικούς, συνδιαστικούς αλγόριθμους για την εκτέλεση απαιτούμενων τοπικών υπολογισμών στους διακόπτες, διερευνώντας έτσι, την ακριβή επήρεια των υπολογισμών αυτών στην καθολική απόδοση τέτοιων αλγορίθμων. Περιγράφουμε επίσης, ένα νέο σχήμα που παρέχει έναν κατανεμημένο και ασύγχρονο μηχανισμό για την υλοποίηση κάθε αλγόριθμου ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης που λειτουργεί χωρίς γνώση.

Τέλος, επεκτείνουμε τη θεωρία ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης με επίτευξη δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου, έτσι ώστε να διαπραγματεύεται *προτεραιότητες* μεταξύ διαφορετικών συνόδων στην περίπτωση δικτύων που εγγυώνται ποιότητα εξυπηρέτησης. Η θεωρία μας εισάγει ένα κομψό σχήμα που επιτρέπει τον καταμερισμό του εύρους ζώνης μεταξύ ανταγωνιστικών κατανεμημένων εφαρμογών με βάση προτεραιότητες. Το σχήμα αυτό παρέχει τη δυνατότητα της μοντελοποίησης των προτεραιοτήτων διαφορετικών συνόδων μέσω της χρήσης ειδικών *συναρτήσεων προτεραιοτήτων*, του ορισμού ενός νέου κριτηρίου διακιοσύνης που σέβεται αυτές τις προτεραιότητες και τον αποτελεσματικό υπολογισμό των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων με βάση το κριτήριο αυτό.

Μάρτιαι ειδοί

Τα μεγαλεία να φοβάσαι, ω ψυχή.
Και τες φιλοδοξίες σου να υπερνικήσεις
αν δεν μπορείς, με δισταγμό και προφυλάξεις
να τες ακολουθείς. Κι όσο εμπροστά προβαίνεις,
τόσο εξεταστική, προσεκτική να είσαι

Κι όταν θα φθάσεις στην ακμή σου, Καίσαρ πια,
έτσι περιωνύμου ανθρώπου σχήμα όταν λάβεις,
τότε κυρίως πρόσεξε σα βγεις στον δρόμον έξω,
εξουσιαστής περίβλεπτος με συνοδεία,
αν τύχει και πλησιάσει από τον όχλο
κανένας Αρτεμίδωρος, που φέρνει γράμμα,
και λέγει βιαστικά "Διάβασε αμέσως τούτα,
είναι μεγάλα πράγματα που σ'ενδιαφέρουν",
μη λείψεις να σταθείς, μη λείψεις ν' αναβάλλεις
κάθε ομιλίαν ή δουλειά, μη λείψεις τους διαφόρους
που χαιρετούν και προσκυνούν να τους παραμερίσεις
(τους βλέπεις πιο αργά), ας περιμένει ακόμη
κ' η Σύγκλητος αυτή, κ' ευθύς να τα γνωρίσεις
τα σοβαρά γραφόμενα του Αρτεμιδώρου

Κ. Καβάφης, 1905–1915

Πρόλογος

Ολοκληρώνοντας τη διδακτορική μου διατριβή[1] θα ήθελα να ευχαριστήσω πολλούς συνεργάτες, φίλους και γνωστούς για την ανεκτίμητη βοήθειά τους στην εκπλήρωση των στόχων μου.

Καταρχήν, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της διδακτορικής μου διατριβής κ. Παύλο Σπυράκη, για τη θαυμάσια και εποικοδομιτική μας συνεργασία αυτά τα τριάμιση χρόνια. Ο κ. Σπυράκης είναι φοβερά οξυδερκής και πολύ ευχάριστος χαρακτήρας. Η συζήτηση μαζί του, έστω και για μερικά λεπτά, μπορεί να ανοίξει ορίζοντες που μοιάζουν ανύπαρκτοι, ενώ ακόμη και το πιο άσχημο νέο θα το αντιμετωπίσει με χαμόγελο. Τον ευχαριστώ όχι μόνο γιατί αποτέλεσε για μένα έναν αξιοσέβαστο καθηγητή και επιβλέποντα, αλλά και γιατί πίστεψε στις δυνατότητες μου, με ενθάρρυνε και με στήριξε καθ' όλη την πορεία της διδακτορικής μου διατριβής, και μου συμπαραστάθηκε με τον καλύτερο δυνατό τρόπο σε όλες τις δύσκολες στιγμές. Η στάση του με βοήθησε να δω, πως θα πρέπει να αντιμετωπίζω ότι έρχεται στην επαγγελματική μου ζωή απλά, χαρούμενα και αισιόδοξα. Ο κ. Σπυράκης φρόντισε επίσης να μου παρέχεται γεναιόδωρα οικονομική στήριξη όλα αυτά τα χρόνια. Του οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ για την πολύπλευρη υποστήριξή του.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη διατριβή αυτή είναι αποτέλεσμα συνεργασίας όχι μόνο με τον κ. Σπυράκη, αλλά με έναν ακόμη εξαίρετο καθηγητή και φίλο, το Μάριο Μαυρονικόλα. Ο Μάριος με ενθάρρυνε σημαντικά σε όλες τις επαγγελματικές μου δραστηριότητες, στήριξε τις αποφάσεις μου και ποτέ δε μου στέρησε χρήσιμες συζητήσεις που με βοήθησαν να διαλευκάνω το δρόμο που θέλω να ακολουθήσω στην επαγγελματική μου ζωή. Θα πρέπει να τον ευχαριστήσω ειδικά για την ανεξάντλητη υπομονή του να με μάθει να παρουσιάζω σωστά τα ερευνητικά μου αποτελέσματα και να με πείσει ότι αυτό είναι μέρος της ερευνητικής δουλειάς. Παρότι είμαι σίγουρη πως δεν τον βοήθησα πάντα όσο έπρεπε στην προσπάθειά του αυτή, τελικά πιστεύω ή ελπίζω πως, ευτυχώς για μένα, τα κατάφερε. Οποιαδήποτε ικανότητά μου να γράφω ικανοποιητικά τις ερευνητικές μου εργασίες, την οφείλω σίγουρα στη δική του προσπάθεια. Νιώθω τυχερή που είχα δίπλα μου δύο τόσο σημαντικούς επιστήμονες να με βοηθούν και

[1] Η έρευνα που διεξήχθει στη διατριβή αυτή έχει υποστηριχτεί από το Ευρωπαϊκό Ερευνητικό ESPRIT Πρόγραμμα ALCOM-IT (συμβόλαιο # 20244).

να με κατευθύνουν.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής κ. Π. Σπυράκη, κ. Λ. Κυρούση και κ. Χ. Νικολάου για τη βοήθεια την οποία μου προσέφεραν και για την εποικοδομητική συνεργασία που είχα μαζί τους, καθώς επίσης και τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς κριτικής επιτροπής κ. Ι. Γαροφαλάκη, κ. Χ. Κακλαμάνη, κ. Μ. Μαυρονικόλα και κ. Θ. Παπαθεοδώρου για τις πολύ χρήσιμες συμβουλές και τα σχόλια τους.

Σίγουρα δεν θα είχα καταφέρει να αντεπεξέλθω στην εκπόνηση της διδακτορικής αυτής διατριβής, αν δεν είχα αποκτήσει το απαραίτητο υπόβαθρο κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών μου σπουδών στο Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κ. Χρήστο Νικολάου, που ήταν καθηγητής στα εισαγωγικά μου μαθήματα σε κατανεμημένο και παράλληλο υπολογισμό, αλλά και υπεύθυνος της ομάδας *Πλειάδες* του Ινστιτούτου Τεχνολογίας και Έρευνας, στην οποία συμμετείχα για ενάμιση περίπου χρόνο. Θεωρώ ότι η εμπλοκή μου στην ομάδα Πλειάδες είναι μια από τις καλύτερες επαγγελματικές μου εμπειρίες και ευχαριστώ τον κ. Νικολάου για μια ειλικρινά εξαιρετική συνεργασία.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης το Σαράντο Καπιδάκη. Ο Σαράντος με στήριξε αρκετά στην απόφαση μου να συνεχίσω με τις μεταπτυχιακές μου σπουδές. Τον σκέφτομαι συχνά με σεβασμό και νιώθω την ανάγκη να τον ευχαριστήσω θερμά για τη συμπαράσταση, τη βοήθεια και τη φιλία του.

Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές κ. Ι. Γαροφαλλάκη, κ. Χ. Κακλαμάνη, κ. Θ. Τσακαλίδη, και κ. Ε. Μαρκάτο για πολλές εποικοδομητικές συζητήσεις κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών ή των προπτυχιακών μου σπουδών. Ιδαίτερα ευχαριστώ τον κ. Τσακαλίδη που με βοήθησε να βρω το γραφείο στο οποίο δουλεύω τα τελευταία δύο χρόνια. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών που μου παρείχε ισχυρή υποστήριξη σε ταξίδια και υπολογιστικούς πόρους καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Ανεκτίμητη είναι, σε όλη τη διαδρομή της ζωής μου, η συμβολή της οικογένειάς μου, στην οποία η διατριβή αυτή είναι αφιερωμένη. Η μαμά μου δεν θα πάψει ποτέ να είναι η πιο γλυκιά ύπαρξη της ζωής μου. Την αγαπώ και τη θαυμάζω γαιτί πάντοτε στη ζωή της ακολουθεί το δρόμο της καρδιάς της. Ο μπαμπάς μου, περισσότερο ορθολογιστής είναι αλήθεια, έχει ένα

θαυμαστό τρόπο να κρατάει ισορροπίες. Τον αγαπώ και τον σέβομαι γιατί πολλές φορές μου έχει ανοίξει δρόμους που έμοιαζαν κλειστοί και με έχει κάνει να δω τη ζωή πολυδιάστατα. Είναι και οι δύο τους υπέροχοι και τους ευχαριστώ βαθιά για την αναντικατάστατη συμβολή τους στη ζωή μου. Τα αδέρφια μου κατέχουν επίσης ξεχωριστή θέση στην καρδιά μου. Κοντά τους μπορώ να είμαι ο αληθινός μου εαυτός. Ο μεγάλος αδερφός μου είναι πλέον ένας σοβαρός λογιστής και έχουμε ξεχάσει ελαφρώς τα παλιά καλά Σαββατοκύριακά μας στην Καλαμάτα ή στην Πάτρα. Ο μικρός (πέντε χρόνια μικρότερός μου) είναι φοιτητής στην Αθήνα. Λατρεύω φυσικά να τον επισκέπτομαι και περνάω μαζί του πολύ όμορφα. Μου θυμίζει τα φοιτητικά μου χρόνια και με συγκινεί. Έχει ακόμη την ακαταμάχητη αγνότητα της ηλικίας του και σίγουρα ένα τριήμερο μαζί του είναι αρκετό για να θυμηθώ και να γυρίσω στην ηλικία των δεκαοχτώ μου χρόνων. Το σπίτι του είναι για μένα ένα φιλικό λιμανάκι για κάθε είδους κακοκαιριά. Τους ευχαριστώ άπειρα για την αγάπη τους, τη συμπαράσταση τους και τις υπέροχες στιγμές που μου χαρίζουν. Ο παππούς και η γιαγιά μου με κάνουν να νιώθω ότι ακόμη και στην ηλικία των ενενήντα οχτώ χρόνων, η ζωή μπορεί να έχει αξία όταν κάποιος ξέρει να συμπεριφέρεται με αξιοπρέπεια. Τους ευχαριστώ που μου χαρίζουν αυτό το υπέροχο συναίσθημα. Η αγάπη και η ζεστασιά της οικογένειάς μου, μου παρέχει τρομερή ασφάλεια και με γεμίζει αυτοπεποίθηση, χαρακτηριστικά που έχουν σταθεί υπερβολικά χρήσιμα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Δεν θα παραλείψω φυσικά να αναφέρω πολλούς φίλους και γνωστούς που έχουν μοιραστεί μαζί μου όμορφες στιγμές και έχουν δώσει νόημα στη ζωή μου. Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω τη Μαρία Κουτσουμπού για μια μεγάλη φιλία περισσότερων των οχτώ χρόνων. Η Μαρία θα είναι πάντα για μένα κάτι περισσότερο από φίλη, και παρότι δεν επικοινωνούμε συχνά τελευταία, δεν θα πάψει ποτέ να είναι μέσα μου και εύχομαι να είναι πάντα ευτυχισμένη. Η Κούλα Κωνσταντινίδου είναι συνάδελφος και φίλη. Είναι πάντα δίπλα μου, έχουμε μοιραστεί τα φοιτητικά μας χρόνια και είμαστε αρκετά δεμένες. Την ευχαριστώ για τη βοήθεια και τη συμπαράστασή της όλα αυτά τα χρόνια. Ο Γιάννης Κούρτης είναι ένας ακόμη φίλος από τα φοιτητικά χρόνια. Έχουμε περάσει αξέχαστες στιγμές μαζί και ατελείωτες ώρες συζητήσεων για βιβλία, κινηματογράφο και ανατολικές φιλοσοφίες. Η Ελένη και η Κωνσταντίνα είναι από τις πιο τρελές παρέες που έκανα στο Ηράκλειο. Σίγουρα είναι η καλύτερη επιλογή για διακοπές και για τρελά Σαββατοκύριακα στην Αθήνα και φυσικά μου χαρίζει πάρα πολύ μεγάλη χαρά να με επισκέπτονται. Η Εύη είναι μια από τις καλύτερες φίλες μου. Είναι σχεδόν η μοναδική μου παρέα όταν κατεβαίνω στην Καλαμάτα και σίγουρα περνάμε καλά όταν είμαστε μαζί. Η Σοφία είναι επίσης ένα κορίτσι που αγαπώ πολύ και την ευχαριστώ για την αγάπη και τη φιλία της. Η Γιώτα, αν και λείπει περισσότερο από τρία χρόνια στην Αγγλία, καταφέρνει να είναι πάντα κοντά μου όταν τη χρειάζομαι και πιστεύω πως η φιλία μας δεν θα πάψει ποτέ να είναι ζεστή.

Στα τριάμιση χρόνια που είμαι στην Πάτρα έχω γνωρίσει πολλούς ενδιαφέροντες ανθρώπους. Μεταξύ τους ο Βαγγέλης, ο Χρήστος, ο Βασίλης και η Κατερίνα, ο Δημήτρης και η Βίκυ. Ο Βαγγέλης Καπούλας είναι από τους πρώτους φίλους που έκανα εδώ. Η ύπαρξη του, έκανε σίγουρα τη διαμονή μου στην Πάτρα σαφώς πιο εύκολη και ευχάριστη. Τον ευχαριστώ πολύ για τη φιλία του. Ειδικά ευχαριστώ επίσης την Κατερίνα. Είναι από τις κοπέλες που αγαπώ πολύ και πάντα θα θεωρώ φίλη μου και λυπάμαι που τον τελευταίο καιρό έχουμε χαθεί. Η Κατερίνα έχει ένα φοβερό τρόπο να με κάνει να νιώθω κοντά της ζεστασιά. Εύχομαι να είναι πάντα ευτυχισμένη στη ζωή της.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τους ακόλουθους συνάδελφους/φίλους: Βασίλη Μάμαλη, Ντίνο Αντωνή, Παύλο Εφραιμίδη, Adrian Ghiaus, Thomas Romke, Ηλία Σταυρόπουλο, Μηνά Κουλησιάνη, Γιάννη Καραγιάννη, Γιώργο Πεντάρη, Μαρία Ανδρέου, Βίκυ Παπαδοπούλου, Κώστα Χατζή, Σπύρο Κοντογιάννη και Δημήτρη Φωτάκη, καθώς επίσης και τους Σωτήρη και Ειρήνη Νικολετσέα, Γιάννη και Τζένη Σταματίου, Βασίλη Ταμπακά και Τούλα Πάντζιου. Νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω ειδικά το Βασίλη Μάμαλη. Ο Βασίλης είναι ο καλύτερος μου φίλος στην Πάτρα και θεωρώ τον εαυτό μου τυχερό που είχα την ευκαιρία να τον γνωρίσω. Είναι ένα εξαιρετικό παιδί που πάντα θα αγαπώ, θα σέβομαι και θα έχω μέσα στην καρδιά μου. Η λέξη ευχαριστώ δεν είναι αρκετή για να εκφράσει τα συναισθήματα που νιώθω για την αμέριστη υποστήριξή του και τη φιλία του.

Ιδιαίτερη αγάπη νιώθω επίσης για τους "μικρούς" μου, όπως μου αρέσει να αποκαλώ τους πέντε φοιτητές με τους οποίους συνεργάστηκα είτε σε διάφορα έργα, είτε ερευνητικά τα τριάμιση αυτά χρόνια, τους οποίους και αναφέρω με αλφαβητική σειρά: Άννα Ευλογημένου, Παναγιώτης Ζαραφείδης, Άννα Ζούρα, Γιώργος Μουρκούσης και Βασίλης Τσιβουράκης. Ιδιαίτερα ευχαριστώ

τους Γιώργο και Βασίλη, με τους οποίους συνεργάστηκα πιο στενά στα πλαίσια επίβλεψης της διπλωματικής τους και τους οποίους θεωρώ όχι μόνο αντάξιους συναδέλφους αλλά και καλούς φίλους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τη Λίλη Παπαδημητρίου και τον Παύλο Λάττα. Είναι και οι δύο πολύ κοντινοί μου φίλοι και τους αγαπώ πολύ. Η Λίλη είναι ο πιο ζωντανός και ευχάριστος άνθρωπος που έχω γνωρίσει ποτέ. Με ξεσηκώνει πάντα και προσπαθεί να με πείσει πως η ζωή δεν είναι μόνο δουλειά. Την ευχαριστώ για την ατελείωτη υπομονή που έχει δείξει στη φιλία μας. Ο Παύλος είναι ο μεγαλύτερος ορθολογιστής της εποχής μας και μάλλον έχουμε μεγάλες διαφορές στο χαρακτήρα μας, αλλά τον αγαπώ πολύ και τον θεωρώ έναν από τους καλύτερούς μου φίλους. Μαζί του θα συζητήσω για πολιτική, ιστορία, τέχνες, λογοτεχνία και ποίηση. Τον ευχαριστώ που με βοήθησε να εντρυφήσω στην μαγεία της ποίησης και πιο συγκεκριμμένα να ανακαλύψω πόσο υπέροχος ποιητής είναι ο Καβάφης.

Παναγιώτα Φατούρου
Πάτρα, Ιούνιος 1999

Περιεχόμενα

Σχήματα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Πολλά μοντέρνα *δίκτυα επικοινωνιών,* όπως τα ATM [72] και το PARIS [16], χρησιμοποιούν *συνδέσεις*, που ονομάζονται *σύνοδοι*, για τη μετάδοση πληροφοριών (δείτε, π.χ., [72, Ενότητα 2.2.1 & Κεφάλαιο 5]). Τυπικά, σε κάθε σύνδεση μεταξύ ενός κόμβου *πηγής* και ενός *προορισμού* ανατίθεται, πριν από την εκκίνηση μετάδοσης των δεδομένων της, μια σταθερή διαδρομή στο δίκτυο και ένας ρυθμός μετάδοσης. Για τέτοια δίκτυα που υποστηρίζουν συνόδους, θέματα *ελέγχου ροής* εμφανίζονται όταν περισσότερες από μια σύνοδοι πρέπει να δρομολογηθούν ταυτόχρονα μέσα από τον ίδιο σύνδεσμο, ενώ παράλληλα μπορεί να υπάρχουν διαφόρων ειδών περιορισμοί στους ρυθμούς μετάδοσης μεταξύ οποιωνδήποτε γειτονικών συνόδων. Τέτοιοι περιορισμοί συνήθως προκύπτουν λόγω περιορισμένου εύρους ζώνης των φυσικών συνδέσμων, ή λόγω περιορισμών του υλικού των δικτυακών διακοπτών (δείτε, π.χ., [6, 8, 12, 57, 72]). Ο ρόλος των μηχανισμών ελέγχου ροής είναι να προλαμβάνουν την απώλεια πακέτων πληροφοριών και την υπερφόρτωση των χώρων ενδιάμεσης αποθήκευσης, που μπορεί να προκληθεί λόγω της υψηλής χρήσης των συνδέσμων ή του υλικού του δικτύου.

Πιο συγκεκριμμένα, οι αλγόριθμοι ελέγχου ροής *δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης* προσαρμόζουν τους ρυθμούς μετάδοσης των διαφόρων συνόδων καθόλο το μονοπάτι τους, με στόχο τη βελτιστοποίηση της χρήσης δικτυακών πόρων και την επίτευξη κάποιας μορφής δικαιοσύνης μεταξύ των συνόδων ([1, 6, 12, 29, 32, 33, 40]). Η προσέγγιση αυτή έχει αποδειχτεί εξαιρετικά ελκυστική λόγω της απλότητάς της και των μέτριων απαιτήσεων της σε υλικό ανά ιδεατή σύνδεση, σε αντίθεση με άλλες μορφές ελέγχου ροής, όπως αυτή *με πίστωση* [52] ή αυτή που βασίζεται σε *ιδεατά κανάλια επικοινωνίας* [21].

Δύο βασικές τεχνολογίες δικτύων που χρησιμοποιούν τεχνικές ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης είναι τα ATM για τον τύπο κυκλοφορίας ABR (Available Bit Rate, [8, 12, 23, 54, 57, 63, 66, 72]), και οι τεχνολογίες που προσανατολίζονται προς το TCP [10, 39]. Ωστόσο, τα περισσότερα δικτυακά πρωτόκολλα, συμπεριλαμβανομένων των πρωτοκόλλων που χρησιμοποιούνται από τα ATM καθώς και το TCP/IP [10, 18] προσφέρουν ένα πολύ απλό μοντέλο εξυπηρέτησης, που μπορεί να περιγραφεί από τη φράση "κάνουν το καλύτερο που μπορούν" (best effort). Παρόλα αυτά, για τις σύγχρονες εφαρμογές όπως η μετάδοση κινούμενης εικόνας, η τηλεδιάσκεψη με χρήση πολυμέσων, οι εφαρμογές εικονικής πραγματικότητας, κλπ., τα δίκτυα που κάνουν το καλύτερο που μπορούν είναι ανεπαρκή, αφού σχεδόν όλες αυτές οι εφαρμογές είναι απαιτητικές στην ποιότητα εξυπηρέτησής τους και συνήθως χρειάζονται εγγυήσεις για το ρυθμό μετάδοσης των δεδομένων τους. Συνεπώς, πρόσφατα έχει παρατηρηθεί μια αυξανόμενη τάση διερεύνησης νέων δικτυακών πρωτοκόλλων και μοντέλων παροχής υπηρεσιών, με στόχο να ικανοποιηθούν οι νέες απαιτήσεις που επιβάλλουν οι μοντέρνες αυτές εφαρμογές. Στις μέρες μας, η ανάγκη δικτυακών πρωτοκόλλων τα οποία να παρέχουν εγγυήσεις για την ποιότητα εξυπηρέτησης είναι ευρέως αναγνωρισμένη [48].

Πιο συγκεκριμμένα, τα δίκτυα ATM επιχειρούν να εξυπηρετούν αποδοτικά διαφορετικά είδη κυκλοφορίας στο δίκτυο, κατηγοριοποιώντας την κυκλοφορία των δεδομένων σε διάφορες κατηγορίες, όπως εκείνες σταθερού ρυθμού μετάδοσης (Constant Bit Rate ή CBR) και μεταβλητού ρυθμού μετάδοσης (Variable Bit Rate ή VBR).[1] Παράλληλα, αρκετή ερευνητική δουλειά έχει διεξαχθεί πρόσφατα στην εξίσου σημαντική περιοχή της ενσωμάτωσης τέτοιων μηχανισμών στο

[1] Μιλώντας άτυπα, τόσο η κατηγορία CBR όσο και η VBR επιτρέπουν στις εφαρμογές να διαπραγματεύονται κατά την εκκίνησή τους εγγυήσεις στην ποιότητα υπηρεσιών που το δίκτυο θα πρέπει να τους παρέχει, όπως όρια στην καθυστέρηση μετάδοσης, στο ποσοστό αλλοίωσης ή απώλειας πακέτων και στο εύρος ζώνης που θα χρησιμοποιούν κατά τη διάρκεια της μετάδοσης, μέσω κατάλληλων πρωτοκόλλων κατανομής εύρους ζώνης, ελέγχου ροής και ελέγχου αποδοχής των συνόδων κατά την εκκίνησή τους. Αντίθετα, η υπηρεσία ABR μπορεί να εγγυηθεί ανώτατα όρια στο ρυθμό απώλειας πακέτων μόνο αν ο κόμβος μεταδότη (πηγή) προσαρμόζει το ρυθμό μετάδοσής του με βάση κατάλληλες πληροφορίες για την κατάσταση του δικτύου που του αποστέλλονται [72].

Διαδίκτυο ([17, 43, 60, 70]), προκειμένου αυτό να μπορέσει να ανταπεξέλθει στις απαιτήσεις των νέων εφαρμογών [9].

Θεωρούμε σημαντικό να αναφέρουμε ένα πρόσφατο πρωτόκολλο δέσμευσης πόρων, το οποίο ονομάζεται *RSVP* [73], και έχει προταθεί για την υποστήριξη κατανεμημένων εφαρμογών που έχουν διαφορετικές απαιτήσεις στο Διαδίκτυο. Στο *RSVP*, οι εφαρμογές ενημερώνουν το δίκτυο για τις απαιτήσεις τους και το πρωτόκολλο δεσμεύει κατάλληλους πόρους μέσω των δικτυακών διακοπτών (δείτε, π.χ., [73] ή [72, Ενότητα 3.9.1] για μια εκτεταμένη συζήτηση πάνω στο θέμα.) Είναι ωστόσο αξιοσημείωτο ότι το *RSVP* δεν έχει βασιστεί στα γνωστά φορμαλιστικά μοντέλα εξυπηρέτησης των απαιτήσεων των εφαρμογών, αλλά έχει αντίθετα υιοθετήσει ένα ενδιαφέρον και διαισθητικό σχήμα που δεσμεύει δικτυακούς πόρους με βάση προτεραιότητες. Οι πρώτες πειραματικές έρευνες [73] αποκαλύπτουν ότι το *RSVP* είναι ευπροσάρμοστο σε αλλαγές στην δικτυακή κυκλοφορία και εύκολα επεκτάσιμο.

Ένας από τους κύριους στόχους των αλγορίθμων ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης είναι η επίτευξη κάποιας μορφής "δικαιοσύνης" μεταξύ των χρηστών, σε ότι αφορά την κυκλοφορία που το δίκτυο μπορεί να υποστηρίξει. Ένα γενικά αποδεκτό κριτήριο δικαιοσύνης για το πρόβλημα του ελέγχου ροής είναι η *δικαιοσύνη μεγίστου-ελαχίστου* [40]. Μιλώντας άτυπα, η δικαιοσύνη μεγίστου-ελαχίστου υποδηλώνει ότι καμιά εφαρμογή από αυτές που εκτελούνται στο δίκτυο δεν επιτρέπεται να αυξήσει έστω και ελάχιστα το ρυθμό μετάδοσής της, αν η αύξηση αυτή επιφέρει τη μείωση του ρυθμού μετάδοσης κάποιας άλλης συνόδου του δικτύου με μικρότερο ή ίσο ρυθμό μετάδοσης ([1, 6, 12, 13, 14, 32, 33, 34, 36, 40, 44]).

Η ανάθεση *προτεραιοτήτων* στις διαφορετικές δικτυακές εφαρμογές παρέχει ένα μηχανισμό μοντελοποίησης των απαιτήσεών τους σε δικτυακούς πόρους. Επιπρόσθετα, ζητήματα δικαιοσύνης εξακολουθούν να ανακύπτουν, εφόσον θα πρέπει να απαγορευθεί στις εφαρμογές υψηλής προτεραιότητας να χρησιμοποιούν όλο το εύρος ζώνης εις βάρος εφαρμογών χαμηλότερης προτεραιότητας. Συνεπώς, ένα θεμελιώδες πρόβλημα στη μοντέρνα θεωρία δικτύων είναι η ενσωμάτωση τόσο των προτεραιοτήτων όσο και κριτηρίων δικαιοσύνης σε ένα φορμαλιστικό, ολοκληρωμένο μοντέλο παροχής υπηρεσιών σε δίκτυα με ποικιλόμορφες εφαρμογές διαφορετικών απαιτήσεων.

Υπάρχουν δύο μεγάλες κλάσεις στις οποίες κάθε αλγόριθμος ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης μπορεί να κατηγοριοποιηθεί. Οι αλγόριθμοι που ανήκουν στην πρώτη κλάση ονομάζονται *συντηρητικοί*, ενώ η δεύτερη κλάση περιέχει τους *οπτιμιστικούς* αλγορίθμους. Η κατηγοριοποίηση αυτή γίνεται με βάση το μηχανισμό προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης των συνόδων που χρησιμοποιεί ο κάθε αλγόριθμος. Οι συντηρητικοί αλγόριθμοι δεν μειώνουν ποτέ το ρυθμό μετάδοσης που έχουν αποδώσει στις συνόδους. Συνεπώς, ο ρυθμός μετάδοσης μιας συνόδου δεν είναι ποτέ μεγαλύτερος από την τελική του τιμή. Αντίθετα, οι οπτιμιστικοί αλγόριθμοι επιτρέπουν μειώσεις έτσι ώστε κάποια σύνοδος μπορεί σε κάποιο ενδιάμεσο στάδιο να αποκτήσει ρυθμό μετάδοσης μεγαλύτερο από την τελική τιμή του. Πρόσφατα, οι Afek *et al.* [1] εισήγαγαν το οπτιμιστικό μοντέλο και επιχειρηματολόγησαν ότι ταιριάζει καλύτερα από το συντηρητικό [6, Κεφάλαιο 6] σε "ρεαλιστικά" δυναμικά δίκτυα, όπου συχνά εμφανίζονται περιπτώσεις στις οποίες οι ρυθμοί μετάδοσης κάποιων συνόδων θα πρέπει να μειωθούν. Για παράδειγμα, κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί σε περιπτώσεις που νέες σύνοδοι εισέρχονται στο δίκτυο. Επιπρόσθετα, η οπτιμιστική προσέγγιση φαίνεται να προσεγγίζει καλύτερα τις προδιαγραφές για έλεγχο ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης που έχουν προταθεί για τα δίκτυα ATM ([42, 68]).

Ένα σημαντικό εξάρτημα κάθε αλγορίθμου ελέγχου ροής, ανεξάρτητα του αν είναι συντηρητικός ή οπτιμιστικός, είναι ο *δρομολογητής*, δηλαδή ο μηχανισμός που χρησιμοποιεί για να αποφασίσει τη σύνοδο της οποίας το ρυθμό μετάδοσης θα προσαρμόσει στη συνέχεια. Προς χάριν αποτελεσματικών, κατανεμημένων υλοποιήσεων του δρομολογητή, είναι επιθυμητό αυτός να μην απαιτεί *καθολική* γνώση των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων ή του δικτύου (δείτε επίσης [41, Ενότητα IV], όπου περιγράφονται παρόμοια κίνητρα διατήρησης της "τοπικότητας" για αλγορίθμους ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης.) Προφανώς, τέτοιοι "αποκεντρικοποιημένοι" δρομολογητές αντιδρούν πιο γρήγορα και εύκολα σε αλλαγές στη δικτυακή τοπολογία. Επίσης, η υλοποίησή τους σε κατανεμημένα περιβάλλοντα γίνεται με τρόπο πιο αποτελεσματικό, τόσο ως προς την πολυπλοκότητα επικοινωνίας, όσο και προς το ποσοστό υπολογισμών που απαιτούν, αφού τέτοιοι δρομολογητές τείνουν να είναι "οικονομικοί" και στην επικοινωνία μεταξύ διαφορετικών συνόδων, αλλά και στην πληροφορία που πρέπει να συλλεχθεί από το δρομολογητή προκειμένου να αποφασιστεί η προς ενημέρωση σύνοδος. Συνεπώς, μια πολύ σημαντική παράμετρος των αλγορίθμων ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης είναι η *τοπικότητα,* η οποία εκφράζει το ποσοστό γνώσης που απαιτείται από το δρομολογητή.

Ένας δρομολογητής που δε χρησιμοποιεί πληροφορία ούτε για τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων, ούτε για την τοπολογία του δικτύου ονομάζεται δρομολογητής *χωρίς γνώση.* Προφανώς, ένας δρομολογητής χωρίς γνώση απολαμβάνει σημαντικές ιδιότητες αποτελεσματικότητας, ευρωστίας και επεκτασιμότητας. Πιο συγκεκριμμένα, οι δρομολογητές χωρίς γνώση δεν προκαλούν υψηλή επικοινωνία στο δικτύο και αποφεύγουν προβλήματα ασάφειας που μπορεί να προκύψουν όταν απαιτείται γνώση των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων ([6, Ενότητα 6.4.2]). Στο αντίθετο άκρο, ένας δρομολογητής *με πλήρη γνώση* απαιτεί καθολική πληροφορία και των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων και της δικτυακής τοπολογίας. Προφανώς, ένας δρομολογητής με πλήρη γνώση είναι περισσότερο ευαίσθητος σε "κεντρικοποιημένες" και όχι σε κατανεμημένες υλοποιήσεις.

Υπάρχει ωστόσο μια ενδιάμεση κατηγορία δρομολογητών μεταξύ εκείνων χωρίς γνώση και εκείνων με πλήρη γνώση: οι δρομολογητές που γνωρίζουν τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων αν και δεν χρησιμοποιούν καμιά πληροφορία για τη δικτυακή τοπολογία. Οι δρομολογητές αυτοί ονομάζονται δρομολογητές *με μερική γνώση.* Οι δρομολογητές με μερική γνώση έχουν καλύτερη συμπεριφορά από εκείνους με πλήρη γνώση σε δυναμικές αλλαγές της δικτυακής τοπολογίας, οι οποίες όμως αφήνουν τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων ανεπηρέαστους. Ωστόσο, δεν υπερέχουν των δρομολογητών χωρίς γνώση, αφού οι τελευταίοι δεν αντιμετωπίζουν προβλήματα ασάφειας στην προσπάθεια ανεύρεσης των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων. Οι Afek *et al.* [1, Ενότητες 4 & 5] παρουσιάζουν δυο ενδιαφέροντες δρομολογητές με μερική γνώση, που ονομάζονται GlobalMinSched και LocalMinSched, αντίστοιχα. Αυτοί οι δρομολογητές επιλέγουν τη σύνοδο της οποίας ο ρυθμός μετάδοσης είναι αντίστοιχα *καθολικά* και *τοπικά* ελάχιστος.

Ένα δεύτερο σημαντικό εξάρτημα κάθε αλγορίθμου ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης είναι ο *απενεργοποιητής,* δηλαδή ο μηχανισμός που αποφασίζει για ποιες συνόδους ο ρυθμός μετάδοσής τους έχει πάρει τελική τιμή και δεν χρειάζεται να προσαρμοστεί περισσότερο. Οι απενεργοποιητές *συμφόρησης* [40] παίρνουν την απόφαση αυτή μόνο αν ο ρυθμός μετάδοσης της αντίστοιχης συνόδου δεν μπορεί να αυξηθεί πάνω σε κάποιο συγκεκριμμένο σύνδεσμο ο οποίος αποδίδει το ελάχιστο δυνατό μερίδιο εύρους ζώνης σε κάθε σύνοδο που τον χρησιμοποιεί. Ένας τέτοιος σύνδεσμος ονομάζεται *ακμή συμφόρησης* [40].

Αφότου μια σύνοδος δρομολογηθεί προς προσαρμογή του ρυθμού μετάδοσής της, ένα μήνυμα ελέγχου κυκλοφορεί επαναληπτικά κατά μήκος της δικτυακής διαδρομής της συνόδου και υπολογίζει κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του το εύρος ζώνης κάθε ακμής που χρησιμοποιείται από τη σύνοδο. Προφανώς, οποιαδήποτε αύξηση στο ρυθμό μετάδοσης κάποιας συνόδου μπορεί να απαιτεί μειώσεις στους ρυθμούς μετάδοσης άλλων συνόδων που μοιράζονται συνδέσμους με αυτήν (δείτε, π.χ., [12, 13, 14, 42, 44]). Μιλώντας άτυπα, η *πολυπλοκότητα σύγκλισης* ενός αλγορίθμου ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης είναι ο συνολικός αριθμός προσαρμογών των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων που εκτελούνται στη *χειρότερη* περίπτωση, μέχρι το σημείο στο οποίο όλες οι σύνοδοι έχουν αποκτήσει τον τελικό ρυθμό μετάδοσής τους και έχει επιτευχθεί σύγκλιση σε κατάσταση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου. Εφόσον η γρήγορη σύγκλιση σε κατάσταση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου είναι ζωτικής σημασίας για την αποτελεσματική χρήση των δικτυακών πόρων, η πολυπλοκότητα σύγκλισης είναι μια ακόμη σημαντική παράμετρος της απόδοσης των αλγορίθμων ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης. Η πολυπλοκότητα σύγκλισης προσμετράται ως ο αριθμός αφηρημένων πράξεων πάνω στους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων. Επικεντρώνουμε την προσοχή μας σε μια οπτιμιστική πράξη προσαρμογής, που ονομάζεται πράξη *ενημέρωσης* και έχει προταθεί από τους Afek *et al.* [1, Ενότητα 2.1]. Περιληπτικά, μια πράξη ενημέρωσης προσαρμόζει τους ρυθμούς μετάδοσης "αντίπαλων" συνόδων με δίκαιο και οπτιμιστικό τρόπο.[2]

Στην διατριβή αυτή, παρουσιάζουμε μια εκτεταμένη συλλογή από όρια στην πολυπλοκότητα σύγκλισης των οπτιμιστικών αλγορίθμων ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδο-

[2]Μιλώντας άτυπα, μια πράξη ενημέρωσης αυξάνει το ρυθμό μετάδοσης της συνόδου προς ενημέρωση, έτσι ώστε αυτή να γίνει η σύνοδος με το μεγαλύτερο ρυθμό μετάδοσης πάνω σε κάποιο συγκεκριμμένο σύνδεσμο. Η νέα τιμή του ρυθμού μετάδοσης είναι συνάρτηση της χωρητικότητας του συνδέσμου και των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων που μοιράζονται την ακμή. "Αντίπαλες" σύνοδοι, που μοιράζονται ακμές με τη συγκεχρμμένη σύνοδο και των οποίων ο ρυθμός μετάδοσης υπερβαίνει την νέα τιμή, μειώνονται στην τιμή αυτή, ενώ ο ρυθμός μετάδοσης των υπολοίπων συνόδων παραμένει αναλλοίωτος. Αυτές οι προσαρμογές καθιστούν τη συγκεκριμμένη ακμή "κορεσμένη".

σης που χαρακτηρίζονται από διαφορετικούς βαθμούς τοπικότητας. Πιο συγκεκριμμένα, αποδεικνύουμε κάτω και άνω όρια στην πολυπλοκότητα σύγκλισης για αλγορίθμους χωρίς γνώση, με μερική γνώση, και με πλήρη γνώση. Τα κάτω όρια μας αποδεικνύουν ότι η επίτευξη δρομολόγησης χωρίς ή με μερική γνώση, η οποία επιφέρει μεγάλο βαθμό τοπικότητας, αυξάνει απαραίτητα την πολυπλοκότητα κάτα έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα. Ο παράγοντας αυτός είναι συνάρτηση δικτυακών παραμέτρων. Τα όρια που αποδεικνύουμε εδώ είναι τα πρώτα κάτω όρια που έχουν παρουσιαστεί στην πολυπλοκότητα σύγκλισης αλγορίθων ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης. Επιπλέον, οι αλγόριθμοί μας καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα ορίων που συνδιάζουν ιδιότητες πολυπλοκότητας σύγκλισης και τοπικότητας, ενώ παράλληλα βελτιώνουν σημαντικά και πολυδιάστατα τα άνω όρια που παρουσιάζονται από τους Afek *et al.* [1].

Οι πολυπλοκότητες σύγκλισης των οπτιμιστικών αλγορίθμων που έχουν προταθεί στο [1] έχουν εκφραστεί ως συνάρτηση του συνολικού αριθμού n των συνόδων που υπάρχουν στο δίκτυο. Επιχειρηματολογούμε ότι ο αριθμός αυτός δεν εκφράζει με ακρίβεια σημαντικές δικτυακές παραμέτρους που αποφαίνονται κρίσιμες ως προς τις ιδιότητες πολυπλοκότητας κάθε αλγορίθμου ελέγχου ροής. Θεωρούμε, για παράδειγμα, ένα δίκτυο με n "ανεξάρτητες" συνόδους, και ένα άλλο με n συνόδους κάθε δύο εκ των οποίων μοιράζονται μια ακμή. Προφανώς, η προσαρμογή των ρυθμών μετάδοσης στο πρώτο δίκτυο δεν επηρεάζει το ρυθμό μετάδοσης οποιασδήποτε άλλης συνόδου. Συνεπώς, οι προσαρμογές αυτές δεν "καθυστερούν" τη σύγκλιση οποιασδήποτε άλλης συνόδου. Αντίθετα, η προσαρμογή των ρυθμών μετάδοσης στο δεύτερο δίκτυο μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα αλλαγές στους ρυθμούς μετάδοσης άλλων συνόδων. Επομένως, κάποιοι σύνοδοι μπορεί να προκαλέσουν την καθυστέρηση σύγκλισης άλλων συνόδων. Ωστόσο, η παράμετρος n αποτυγχάνει να εκφράσει την παραπάνω διάκριση με ποσοτικό τρόπο. Για το λόγο αυτό, εισάγουμε μια νέα παράμετρο, διαφορετική του n, και παρουσιάζουμε πιο ακριβή όρια στην πολυπλοκότητα σύγκλισης ως συνάρτηση αυτής της παραμέτρου. Πιο συγκεκριμμένα, έστω ότι d είναι ο μέγιστος αριθμός συνόδων που μοιράζονται άμεσα ή έμμεσα μια ακμή.[3] Το d ονομάζεται *εξάρτηση των συνόδων*. Επομένως, το d είναι ο μέγιστος αριθμός συνόδων που μπορούν να

[3] Μιλώντας τυπικά, το d είναι το μέγιστο μέγεθος μιας κλάσης ισοδυναμίας που προκύπτει από την μεταβατική κλειστότητα της σχέσης "διαμοιρασμού-ακμής" σε ένα σύνολο συνόδων.

επηρεαστούν από την εκτέλεση μιας πράξης ενημέρωσης πάνω σε κάποια σύνοδο. Είναι σαφές ότι $1 \leq d \leq n$. Ισχυριζόμαστε πως η εξάρτηση των συνόδων d, μαζί με τον αριθμό n, είναι επαρκείς παράγοντες έκφρασης της πολυπλοκότητας σύγκλισης των οπτιμιστικών αλγορίθμων ελέγχου ροής.

Εισάγουμε μια νέα μεθοδολογία την οποία χρησιμοποιούμε για τη συνδυαστική κατασκευή ενός δικτύου ως συνάρτηση οποιουδήποτε δρομολογητή που λειτουργεί χωρίς ή με μερική γνώση, το οποίο επιφέρει υψηλή πολυπλοκότητα σύγκλισης στους αλγορίθμους που χρησιμοποιούν τους δρομολογητές αυτούς. Τα κάτω όρια που παρουσιάζονται σε αυτή τη διατριβή αποδεικνύονται κάνοντας χρήση της δικτυακής αυτής κατασκευής. Επιπρόσθετα, για την απόδειξη των άνω ορίων, παρουσιάζουμε μια συλλογή από ενδιαφέρουσες ιδιότητες που σχετίζονται με το σχεδιασμό και την ανάλυση οπτιμιστικών αλγορίθμων ελέγχου ροής. Χρησιμοποιούμε τα εργαλεία αυτά προκειμένου να αποδείξουμε και να αναλύσουμε την πολυπλοκότητα σύγκλισης συγκεκριμένων αλγορίθμων που περιγράφουμε. Κάποιες από τις ιδιότητες αυτές αποδεικνύονται επίσης χρήσιμες στις αποδείξεις των κάτω ορίων.

Αν και η πολυπλότητα σύγκλισης αποτελεί καλό μετρικό του αριθμού των φάσεων επικοινωνίας που πραγματοποιούνται στο δίκτυο μέχρι η τελική κατάσταση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου να προσεγγιστεί και επομένως παρέχει το κατάλληλο έδαφος για την αξιολόγηση της αποδοτικότητας των κατανεμημένων αλγορίθμων που συγκλίνουν στην κατάσταση δικαιοσύνης, προσαρμόζοντας σταδιακά τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων, επιχειρηματολογούμε ότι η πολυπλοκότητα σύγκλισης δεν επαρκεί από μόνη της για την "καθολική" αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας τέτοιων κατανεμημένων αλγορίθμων.

Επιπρόσθετα του *κόστους επικοινωνίας* μεταξύ διαφορετικών συνόδων, ένας κατανεμημένος αλγόριθμος που συγκλίνει σε μια κατάσταση δικαιοσύνης μπορεί να απαιτεί τον *υπολογισμό* της μέγιστης δυνατής αύξησης του ρυθμού μετάδοσης μιας συνόδου πάνω σε κάθε δικτυακό σύνδεσμο [1]. Ο τρόπος διεξαγωγής και το κόστος τέτοιων υπολογισμών, δεν καθορίζονται στις προηγούμενες εργασίες [1]. Οι υπολογισμοί αυτοί εκτελούνται στους δικτυακούς διακόπτες και το κόστος τους μπορεί να είναι συνάρτηση του αριθμού των συνόδων που διατρέχουν το σύνδεσμο. Στη χειρότερη περίπτωση, ο αριθμός των συνόδων που διατρέχουν ένα σύνδεσμο είναι γραμμικός στο συνολικό αριθμό συνόδων που υπάρχουν στο δίκτυο. Συνεπώς, ένας κατανεμημένος αλγόριθμος που συγκλίνει σε μια κατάσταση δικαιοσύνης είναι *κλιμακωτός* (όσον αφορά τους απαιτούμενους υπολογισμούς) μόνο αν το υπολογιστικό κόστος που απαιτείται σε κάθε δικτυακό διακόπτη είναι "μικρό" σε σχέση με τον αριθμό των συνόδων που χρησιμοποιούν τον διακόπτη. Προφανώς, η πολυπλοκότητα σύγκλισης, όπως έχει οριστεί εκφράζει μόνο τον αριθμό τέτοιων υπολογισμών στην χειρότερη περίπτωση και όχι το συγκεκριμμένο κόστος που αυτοί οι υπολογισμοί μπορούν να επιφέρουν. Επομένως, η πολυπλοκότητα σύγκλισης δεν παρέχει με ακρίβεια το υπολογιστικό κόστος τέτοιων αλγορίθμων.

Παρουσιάζουμε έναν απλό, συνδυαστικό αλγόριθμο για την εκτέλεση τοπικών υπολογισμών στους δικτυακούς διακόπτες. Επιπρόσθετα, παρουσιάζουμε ένα γενικό, ασύγχρονο, και κατανεμημένο σχήμα για την υλοποίηση κάθε οπτιμιστικού αλγορίθμου ελέγχου ροής που λειτουργεί χωρίς γνώση. Το προτεινόμενο σχήμα επιλύει σοβαρά προβλήματα συγχρονισμού μεταξύ των συνόδων και εγγυάται σύγκλιση στην κατάσταση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου, αν ο αλγόριθμος που υλοποιεί συγκλίνει σε μια τέτοια κατάσταση.

Παρουσιάζουμε τέλος μια σημαντική επέκταση της κλασικής θεωρίας δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου στον έλεγχο ροής, που υποστηρίζει την ύπαρξη προτεραιοτήτων μεταξύ των διαφορετικών κατανεμημένων εφαρμογών που χρησιμοποιούν το δίκτυο. Η θεωρία μας παρουσιάζει ένα νέο κριτήριο δικαιοσύνης που ονομάζεται *δκαιοσύνη μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων,* και το οποίο λαμβάνει υπ' όψιν του τις προτεραιότητες των διαφόρων συνόδων και μελετάμε μια κλάση αλγορίθμων, οι οποίοι ονομάζονται *αλγόριθμοι συμφόρησης προτεραιοτήτων,* και αποδεικνύεται να συγκλίνουν στην κατάσταση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων. Τέλος, παρουσιάζουμε και αναλύουμε συγκεκριμμένους οπτιμιστικούς τέτοιους αλγορίθμους.

1.2 Λεπτομερής Περιγραφή

Το πρώτο βασικό μας αποτέλεσμα είναι ένα κάτω όριο στην πολυπλοκότητα σύγκλισης των οπτιμιστικών αλγορίθμων ελέγχου ροής που λειτουργούν χωρίς γνώση και συγκλίνουν σε κατάσταση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου. Η απόδειξη βασίζεται σε μια νέα τεχνική για την κατασκευή ενός δικτύου πάνω στο οποίο κάποιος συγκεκριμμένος, οπτιμιστικός αλγόριθμος χωρίς γνώση έχει υψηλή πολυπλοκότητα σύγκλισης. Πιο συγκεκριμμένα, παρέχουμε μια γενική μεθοδολογία, δοθέντος οποιουδήποτε αυθαίρετου αλγορίθμου που λειτουργεί χωρίς γνώση, για την κατασκευή ενός δικτύου ως συνάρτηση του δρομολογητή του αλγορίθμου, το οποίο εγγυάται ότι αν οι σύνοδοι δρομολογούνται προς ενημέρωση με τη σειρά που επιβάλλει ο δρομολογητής αυτός και αν ο αλγόριθμος συγκλίνει στην κατάσταση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου, τότε απαιτούνται $\Theta(dn)$ πράξεις ενημέρωσης προκειμένου να επιτευχθεί αυτή η σύγκλιση. Η μεθοδολογία για την κατασκευή βασίζεται αποκλειστικά σε συνδυαστικά επιχειρήματα και για αυτό παρουσιάζει ανεξάρτητα ενδιαφέρον. Χρησιμοποιεί την ακολουθία συνόδων που καθορίζεται από το δρομολογητή, προκειμένου να επιλεγούν οι ακμές και οι χωρητικότητές τους στο δίκτυο με τέτοιο τρόπο που να καθυστερούν τη σύγκλιση.

Ίσως προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι, αποδεικνύουμε πως το κάτω όριο $\Omega(dn)$, που αποδεικνύεται για την πολυπλοκότητα αλγορίθμων χωρίς γνώση, ισχύει επίσης και στην περίπτωση αλγορίθμων με μερική γνώση. Περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε βηματικά την ακολουθία δρομολόγησης συνόδων που παράγεται από οποιονδήποτε αλγόριθμο με μερική γνώση, ώστε να δημιουργήσουμε το κατάλληλο δίκτυο για το οποίο απαιτούνται $\Omega(dn)$ πράξεις ενημέρωσης προκειμένου να επιτευχθεί σύγκλιση σε κατάσταση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου. Προκύπτει ότι αυτό το κάτω όριο είναι ισχυρό για τους αλγορίθμους με μερική γνώση. Όπως παρατηρούμε, το πάνω όριο $\Theta(n^2)$ στην πολυπλοκότητα σύγκλισης των αλγορίθμων με μερική γνώση GlobalMin και LocalMin, που αποδείχτηκε από τους Afek *et al.* [1] συνεπάγεται για την περίπτωση $d = n$, ένα αντίστοιχο άνω όριο $\Theta(dn)$. Επομένως, αν και διαισθητικά θα ήταν αναμενόμενο η γνώση των ρυθμών μετάδοσης να παίζει κρίσιμο ρόλο στην απόδοση των αλγορίθμων, τα αποτελέσματά μας υποδηλώνουν ότι αυτό *δεν* είναι αλήθεια. Αντίθετα, τα όρια που παρέχουμε για τους αλγορίθμους με μερική γνώση αποδεικνύουν ότι η γνώση των ρυθμών μετάδοσης μόνο, δεν επιφέρει τη μείωση της πολυπλοκότητας σύγκλισης κάτω του άνω ορίου $\Theta(dn)$ που επιτυγχάνουν οι αλγόριθμοι χωρίς γνώση.

Επιπρόσθετα, αποδεικνύουμε ένα αντίστοιχο "σφιχτό" άνω όριο στην πολυπλοκότητα σύγκλισης κάθε αλγορίθμου χωρίς γνώση. Παρουσιάζουμε έναν ντετερμινιστικό αλγόριθμο χωρίς γνώση, που ονομάζεται RoundRobin, με πολυπλοκότητα σύγκλισης $dn/2 + n/2$. Αυτός ο αλγόριθμος βασίζεται στην πολύ απλή ιδέα δρομολόγησης των διαφόρων συνόδων εκ περιτροπής (round-robin).[4] Ο δρομολογητής διεξάγει d "φάσεις," σε κάθε μια από τις οποίες, κάθε σύνοδος δρομολογείται μια φορά (εκ περιτροπής). Οι αλγόριθμοι GlobalMin και LocalMin που παρουσιάστηκαν από τους Afek *et al.*[1, Ενότητα 4 & 5] επιτυγχάνουν πολυπλοκότητα σύγκλισης επίσης $\Theta(dn)$. Ωστόσο, ο RoundRobin είναι καλύτερος ως προς το βαθμό τοπικότητάς του, αφού λειτουργεί χωρίς γνώση, ενώ αντίθετα οι GlobalMin και LocalMin λειτουργούν με μερική γνώση.

Είναι δυνατόν η εισαγωγή τυχαιότητας να μας οδηγήσει σε απλούστερους οπτιμιστικούς αλγορίθμους ελέγχου ροής από το RoundRobin, που δεν απαιτούν γνώση και έχουν καλή πολυπλοκότητα; Αποδεικνύουμε ότι η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι θετική, παρουσιάζοντας έναν πιθανοτικό οπτιμιστικό αλγόριθμο που λειτουργεί χωρίς γνώση. Ο αλγόριθμος αυτός ονομάζεται Random και είναι ο πρώτος πιθανοτικός αλγόριθμος που έχει ποτέ προταθεί για έλεγχο ροής. Ο αλγόριθμος συσχετίζει μια πιθανότητα p_i με κάθε σύνοδο S_i, $1 \leq i \leq n$, με βάση την οποία επιλέγει στη συνέχεια αν η σύνοδος θα δρομολογηθεί ή όχι για ενημέρωση.

Προκειμένου να καθορίσουμε την πολυπλοκότητα σύγκλισης του Random, περιγράφουμε και αναλύουμε μια ενδιαφέρουσα γενίκευση του κλασικού προβλήματος *επιλογής κουπονιών* [65], όπου κάθε κουπόνι επιλέγεται με μια συγκεκριμμένη πιθανότητα (και όχι ομοιόμορφα). Ονομάζουμε το πρόβλημα αυτό *γενικευμένο πρόβλημα επιλογής κουπονιών*. Μελετάμε την κατανομή πιθανοτήτων του αριθμού των δοκιμών που απαιτούνται, προκειμένου τουλάχιστον ένα κουπόνι από κάθε τύπο να επιλεγεί. Πιο συγκεκριμμένα, αποδεικνύουμε άνω όρια στη μέση τιμή της τυχαίας αυτής μεταβλητής. Χρησιμοποιούμε ιδιότητες των αλγορίθμων συμφόρησης και επικαλούμαστε μια αντιστοιχία με το *γενικευμένο πρόβλημα επιλογής κουπονιών,* προκειμένου να αποδείξουμε ότι ο αναμενόμενος αριθμός πράξεων ενημέρωσης που εκτελούνται σε κάθε εκτέλεση του Random είναι $O(d \ln n / p_{min})$, όπου $p_{min} = \min_{1 \leq i \leq n} p_i$. Τονίζουμε ότι το παραπάνω όριο γίνεται $O(dn \ln n)$ στην *ομοιόμορφη* περίπτωση, που όλες οι πιθανότητες είναι $1/n$. Το όριο αυτό είναι λίγο μεγαλύτερο από το αντίστοιχο όριο του αλγορίθμου RoundRobin, ο οποίος

[4] Τονίζουμε ότι τεχνικές δρομολόγησης εκ περιτροπής έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί από πολλούς αλγορίθμους για έλεγχο ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης (δείτε, π.χ., [32, 33, 34]). Ωστόσο, κανένας από αυτούς τους αλγορίθμους δεν χρησιμοποιεί τον ίδιο μηχανισμό προσαρμογής των ρυθμών μετάδοσης που μελετάμε εδώ.

επίσης λειτουργεί χωρίς γνώση αλλά δεν είναι τόσο απλός όσο ο Random.

Στο σημείο αυτό, είμαστε έτοιμοι να διερευνήσουμε αν μπορούμε να νικήσουμε το κάτω όριο $\Theta(dn)$ που επιτυγχάνουν στην πολυπλοκότητα σύγκλισής τους οι αλγόριθμοι χωρίς ή με μερική γνώση, ενδεχομένως θυσιάζοντας την τοπικότητα που παρέχουν. Ίσως δεν προκαλεί έκπληξη ότι όντως η επίτευξη τοπικότητας επιφέρει μια αύξηση στην πολυπλοκότητα σύγκλισης της τάξης του d. Περιγράφουμε έναν ντετερμινιστικό αλγόριθμο, που ονομάζεται Linear, και επιτυγχάνει πολυπλοκότητα ακριβώς n. Ωστόσο, ο Linear είναι αλγόριθμος που λειτουργεί με πλήρη γνώση. Ο Linear ακολουθεί την γνωστή ιδέα επιλογής μιας ακμής με υψηλό φόρτο και δρομολογεί όλες τις συνόδους που μοιράζονται αυτήν την ακμή (δείτε, π.χ., [6, Ενότητα 6.4.2] ή [36]).[5] Προφανώς, ο Linear είναι *βέλτιστος* ως προς την πολυπλοκότητα σύγκλισης, εφόσον υπάρχουν περιπτώσεις που εξαναγκάζουν όλες τις n συνόδους να πρέπει να ενημερωθούν τουλάχιστον μια φορά από οποιοδήποτε αλγόριθμο (ανεξάρτητα από το βαθμό πληροφορίας που αυτός χρησιμοποιεί). Τα αποτελέσματά μας αυτά απαντούν θετικά σε ένα από τα βασικά ανοιχτά προβλήματα της εργασίας των Afek *et al.* [1], το οποίο αναφέρεται στην ύπαρξη ή όχι οπτιμιστικού αλγορίθμου ελέγχου ροής που να επιτυγχάνει πολυπλοκότητα σύγλισης γραμμική στον αριθμό των συνόδων n.

Τα κάτω και άνω όρια που περιγράφουμε σε αυτή τη διατριβή παρουσιάζουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες μεταξύ της πολυπλοκότητας σύγκλισης και της τοπικότητας των οπτιμιστικών αλγορίθμων ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης. Μεταξύ των τριών προτεινόμενων αλγορίθμων μας, ο Random είναι ο "απλούστερος", και άρα ο πιο κατάλληλος για "κατανεμημένη" υλοποίηση, αλλά παρουσιάζει υψηλότερη πολυπλοκότητα και από τους τρείς. Εναλλακτικά, ο RoundRobin, αν και λιγότερο "απλός" από τον Random, λειτουργεί επίσης χωρίς γνώση και επιτυγχάνει πολυπλοκότητα ασυμπτωτικά βέλτιστη για την κλάση των ντετερμινιστικών αλγορίθμων χωρίς γνώση. Αντίθετα, ο "κεντρικοποιημένος" αλγόριθμος Linear επιτυγχάνει βέλτιστη πολυπλοκότητα σύγκλισης, αλλά δεν παρουσιάζει καθόλου τοπικότητα.

[5] Αυτή η ιδέα αποτελεί τη βάση ενός απλού και κλασικού, επαναληπτικού αλγόριθμου για τον υπολογισμό των δίκαιων ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου [6, Ενότητα 6.4.2]. Σε κάθε επανάληψη, οι ρυθμοί μετάδοσης των συνόδων που χρησιμοποιούν τον πιο φορτωμένο σύνδεσμο αποκτούν την τελική τους τιμή Στην επόμενη επανάληψη, οι τελικοί αυτοί ρυθμοί αφαιρούνται από τις χωρητικότητες των ακμών και η διαδικασία αυτή επανεκτελείται. Τονίζουμε ότι ο αλγόριθμος αυτός δεν είναι οπτιμιστικός.

Προκειμένου να αναλύσουμε τις λεπτομέρειες υλοποίησης κάποιων από τους παραπάνω αλγορίθμους, παρουσιάζουμε ένα κατανεμημένο και ασύγχρονο σχήμα για την υλοποίηση οποιουδήποτε οπτιμιστικού αλγορίθμου ελέγχου ροής που λειτουργεί χωρίς γνώση. Παρουσιάζουμε επίσης αλγορίθμους που επιτελούν τοπικούς υπολογισμούς σε κάθε δικτυακό διακόπτη. Αυτοί οι αλγόριθμοι κατανείμουν την διαθέσιμη χωρητικότητα του συνδέσμου σταδιακά. Αξιολογούμε τους αλγορίθμους αυτούς μετρώντας τον αριθμό των βημάτων έως ότου η συνολική διαθέσιμη χωρητικότητα έχει κατανεμηθεί και αποδεικνύουμε το πολυωνυμικό όριο $O(m \log m)$ στον αριθμό τέτοιων βημάτων στη χειρότερη περίπτωση, όπου m είναι ο αριθμός των συνόδων που χρησιμοποιούν το σύνδεσμο. Καταλήγουμε επομένως στο συμπέρασμα, ότι οι τοπικοί υπολογισμοί που απαιτούνται από την πράξη ενημέρωσης στους δικτυακούς διακόπτες δεν υποβαθμίζει την απόδοση των οπτιμιστικών αλγορίθμων ελέγχου ροής.

Επιπρόσθετα, παρουσιάζουμε πώς τέτοιοι τοπικοί υπολογισμοί μπορούν να ενσωματωθούν σε ένα καθολικά αποτελεσματικό ασύγχρονο και κατανεμημένο σχήμα υλοποίησης *κάθε* οπτιμιστικού αλγορίθμου ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης χωρίς γνώση. Το προτεινόμενο σχήμα υλοποίησης αποκαλύπτει νέα όρια για τη "ρεαλιστική" απόδοση των αλγορίθμων αυτών, η οποία τώρα εκφράζεται ως συνάρτηση παραμέτρων πιο καθοριστικών από τον αριθμό των προσαρμογών των ρυθμών μετάδοσης που εκτελούνται από τον αλγόριθμο στη χειρότερη περίπτωση. Υποθέτουμε ότι τ είναι ο μέγιστος χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη ανακύκλωση ενός πακέτου μιας οποιασδήποτε συνόδου από τον κόμβο μεταδότη στον κόμβο προορισμού και πίσω στον κόμβο μεταδότη και ότι m είναι ο μέγιστος αριθμός από συνόδους που μοιράζονται μια οποιαδήποτε ακμή. Αποδεικνύουμε ότι η "καθολική" πολυπλοκότητα κάθε οπτιμιστικού αλγορίθμου ελέγχου ροής που λειτουργεί χωρίς γνώση, όταν αυτός υλοποιηθεί από το προτεινόμενο σχήμα είναι $O(d^2(\tau + m \log m))$.

Εφόσον κάθε σύνδεσμος μιας οποιαδήποτε συνόδου προς ενημέρωση πρέπει να ενημερωθεί για την αντίστοιχη προσαρμογή του ρυθμού μετάδοσης, το κόστος για την προσωμοίωση μιας πράξης ενημέρωσης δεν μπορεί να είναι μικρότερο από $\Omega(\tau)$. Επίσης, το κόστος αυτό είναι τουλάχιστον $\Omega(m \log m)$, αφού αυτό είναι ένα άνω όριο του κόστους των τοπικών υπολογισμών στους δικτυακούς διακόπτες, υποθέτοντας ότι οι υπολογισμοί αυτοί εκτελούνται με βάση τους εξειδικευμένους αλγορίθμους που παρουσιάζουμε σε αυτήν τη διατριβή. Επομένως, το προτεινόμενο σχήμα υλοποίησης επιφέρει βέλτιστο πολλαπλασιαστικό κόστος στον καθορισμό της "καθολικής" πολυπλοκότητας των οπτιμιστικών αλγορίθμων χωρίς γνώση. Επιπρόσθετα, εφόσον το "ταξίδι" του μηνύματος ελέγχου κατά μήκος της διαδρομής της συνόδου στην οποία ανήκει μπορεί να πραγματοποιηθεί παράλληλα με τη διεξαγωγή των τοπικών υπολογισμών στους διακόπτες, οι υπολογισμοί αυτοί δεν προκαλούν επιβάρυνση στην απόδοση αυτών των αλγορίθμων όταν $m \log m \in O(\tau)$.

Προκειμένου να γενικεύσουμε την κλασική θεωρία δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου στο πρόβλημα του ελέγχου ροής για την περίπτωση ύπαρξης διαφορετικών απαιτήσεων για διαφορετικές συνόδους, συσχετίζουμε με κάθε σύνοδο έναν θετικό πραγματικό αριθμό, που ονομάζεται *προτεραιότητα.* Η προτεραιότητα μιας συνόδου αποτελεί μια αφηρημένη οντότητα που χρησιμοποιείται στη διατριβή αυτή για να μοντελοποιήσει τη σχετική απαίτηση της συνόδου σε εύρος ζώνης.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια *συνάρτηση ανάθεσης προτεραιοτήτων* για κάθε σύνοδο, η οποία απεικονίζει την προτεραιότητα της συνόδου σε ρυθμούς μετάδοσης. Οι συναρτήσεις ανάθεσης προτεραιοτήτων μπορεί να καθορίζονται π.χ. είτε με βάση συγκεκριμμένες πολιτικές διαχείρισης των δικτυακών πόρων, ή μέσω διαφορετικών ειδών κυκλοφορίας, ή λόγω μηχανισμών χρέωσης ([20, 47, 59]). Στο δικό μας μοντέλο, οι συναρτήσεις ανάθεσης προτεραιοτήτων παρέχουν ένα μηχανισμό καθορισμού της *επιθυμητής* ποιότητας εξυπηρέτησης για κάθε εφαρμογή που χρησιμοποιεί το δίκτυο, ενώ οι τιμές των συναρτήσεων αυτών για δεδομένες προτεραιότητες των συνόδων εκφράζουν την πραγματική ποιότητα στην εξυπηρέτηση κάθε συνόδου. Υποθέτουμε ενδιαφέρουσες μαθηματικές ιδιότητες στις συναρτήσεις αυτές, όπως π.χ. αύξουσα μονοτονία, συνέχεια και κυρτότητα.

Η τιμή των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων για την τιμή προτεραιότητας μηδέν καθορίζει τον ελάχιστο δυνατό ρυθμό μετάδοσης που η αντίστοιχη σύνοδος μπορεί να αποκομίσει. Προκειμένου να εγγυηθούμε *επάρκεια,* υποθέτουμε ότι η χωρητικότητα κάθε συνδέσμου δεν είναι μικρότερη από το άθροισμα στην τιμή μηδέν των τιμών των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων όλων των συνόδων που χρησιμοποιούν την ακμή. Χρησιμοποιούμε και πάλι κατάλληλες πράξεις προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης των συνόδων. Λόγω αντιστρεψιμότητας των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων, αυτές οι πράξεις μπορεί να θεωρηθεί ότι διαχειρίζονται επίσης και τις προτεραιότητες των αντίστοιχων συνόδων.

Αποδεικνύεται ότι το κριτήριο δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου είναι ανεπαρκές στην περίπτωση ανάθεσης προτεραιοτήτων στις διάφορες συνόδους. Παρουσιάζουμε ένα νέο κριτήριο δικαιοσύνης που λαμβάνει υπ' όψιν του τις προτεραιότητες με άμεσο και φορμαλιστικό τρόπο. Η *δικαιοσύνη μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων* απαιτεί ότι δεν μπορεί να γίνει, έστω και ελάχιστη αύξηση στο ρυθμό μετάδοσης μιας συνόδου χωρίς αυτό να προκαλέσει τη μείωση του ρυθμού μετάδοσης κάποιας άλλης συνόδου με μικρότερη προτεραιότητα. Συνεπώς, με βάση τη δικαιοσύνη μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων, ο σημαντικός παράγοντας που καθορίζει αν ο ρυθμός μετάδοσης μιας συνόδου μπορεί να αυξηθεί είναι η προτεραιότητά της συνόδου (και όχι ο ίδιος ο ρυθμός μετάδοσης). Άρα, μια επιτακτική και απαιτητική κατανεμημένη εφαρμογή μπορεί να επενδύσει σε μια συνάρτηση ανάθεσης προτεραιοτήτων που αποδίδει υψηλότερες τιμές, ενώ, παράλληλα, διασφαλίζει αρκετό εύρος ζώνης για τη μετάδοση των δεδομένων της με δίκαιο τρόπο. Η δικαιοσύνη μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων είναι επομένως μια δίκαιη συνθήκη που υποστηρίζει άμεσα αυθαίρετες προτεραιότητες για τις συνόδους του δικτύου.

Ένα ακόμη σημαντικό σημείο της γενικής θεωρίας μας είναι ο ορισμός του ισομεριδίου προτεραιότητας μιας ακμής. Προκειμένου να ορίσουμε την έννοια αυτή, επιλύουμε για κάθε ακμή μια συγκεκριμμένη αλγεβρική εξίσωση που ονομάζεται *εξίσωση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων*. Μιλώντας άτυπα, η εξίσωση αυτή εκφράζει ότι σε όλες τις συνόδους που διατρέχουν μια ακμή ανατίθεται *ίση* προτεραιότητα που αντιστοιχεί, μέσω των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων, σε ρυθμούς μετάδοσης που καθιστούν την ακμή κορεσμένη. Ορίζουμε το *ισομερίδιο προτεραιότητας* μιας ακμής να είναι μια θετική ρίζα της εξίσωσης δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων για αυτήν την ακμή. Πιο σημαντικά, χρησιμοποιούμε τον ορισμό του ισομεριδίου προτεραιότητας, μαθηματικές ιδιότητες των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων, τη συνθήκη επάρκειας, και το γεγονός ότι οι πράξεις προσαρμογής των ρυθμών μετάδοσης σέβονται τη συνθήκη χωρητικότητας για να αποδείξουμε ότι το ισομερίδιο προτεραιότητας ορίζεται *μοναδικά*. Η ιδιότητα μοναδικότητας αποτρέπει κάθε δυνατή ασάφεια που μπορεί να προκύψει κατά τη χρήση του ισομεριδίου προτεραιότητας στην περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας μας.

Πιο συγκεκριμμένα, οι ακμές συμφόρησης προτεραιοτήτων ορίζονται καλά λόγω της ιδιότητας μοναδικότητας των ισομεριδίων προτεραιότητας. Μιλώντας άτυπα, μια *ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων* έχει το μικρότερο ισομερίδιο προτεραιότητας από όλες τις ακμές που χρησιμοποιούνται από τις συνόδους που τη διατρέχουν. Ορίζουμε επίσης τους *αλγορίθμους συμφόρησης προτεραιοτήτων* να είναι εκείνοι που δεν αποφασίζουν ποτέ ότι ο ρυθμός μετάδοσης μιας συνόδου είναι ο τελικός της, αν η σύνοδος δεν χρησιμοποιεί κάποια ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων και η προτεραιότητα της συνόδου δεν ισούται με το ισομερίδιο προτεραιότητας της ακμής αυτής.

Αυτοί οι ορισμοί αποτελούν γενικεύσεις των κλασικών ορισμών των *ακμών συμφόρησης* και των *αλγορίθμων συμφόρησης* [36, 40, 41]. Αποδεικνύουμε μια συλλογή από ενδιαφέρουσες, συνδυαστικές ιδιότητες για τους αλγορίθμους συμφόρησης προτεραιοτήτων που γενικεύουν αντίστοιχες ιδιότητες των αλγορίθμων συμφόρησης με κομψό τρόπο. Πιο σημαντικά, εγκαθιδρούμε μια ανάλογη σχέση, όπως εκείνη μεταξύ αλγορίθμων συμφόρησης και δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου, για τους αλγορίθμους συμφόρησης προτεραιοτήτων: αποδεικνύουμε ότι οι αλγόριθμοι συμφόρησης προτεραιοτήτων συγκλίνουν πάντα σε κατάσταση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη θεωρία μας στο οπτιμιστικό μοντέλο, στο οποίο παρουσιάζουμε μια γενίκευση της πράξης ενημέρωσης, που ονομάζεται *πράξη ενημέρωσης προτεραιοτήτων*. Η πολυπλοκότητα σύγκλισης ενός οπτιμιστικού αλγορίθμου που συγκλίνει σε κατάσταση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων είναι ο αριθμός των πράξεων ενημέρωσης προτεραιοτήτων που εκτελούνται από τον αλγόριθμο στη χειρότερη περίπτωση έως ότου να επιτευχθεί η σύγκλιση. Παρουσιάζουμε νέες συνδυαστικές ιδιότητες των αλγορίθμων συμφόρησης προτεραιοτήτων για το οπτιμιστικό περιβάλλον εργασίας. Οι ιδιότητες αυτές σχετίζονται με τον τρόπο που κάθε μια σύνοδος προσεγγίζει το δίκαιο ρυθμό μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων κατά την εκτέλεση ενός οπτιμιστικού αλγορίθμου συμφόρησης προτεραιοτήτων.

Το τελικό μας αποτέλεσμα είναι η περιγραφή και η ανάλυση *εξιδεικευμένων* οπτιμιστικών αλγορίθμων συμφόρησης προτεραιοτήτων. Ο πρώτος από αυτούς τους αλγορίθμους λειτουργεί χωρίς γνώση και είναι μέτριος σε απόδοση ενώ ο δεύτερος λειτουργεί με πλήρη γνώση, αλλά έχει βέλτιστη απόδοση.

1.3 Σχετικές Εργασίες

Τονίζουμε ότι τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη διατριβή αυτή διαφέρουν από προηγούμενα αποτελέσματα στην ίδια περιοχή (όπως π.χ., [6, 7, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 36, 40, 41, 57]), αφού ακολουθούν το οπτιμιστικό μοντέλο το οποίο εισήγαγαν πρόσφατα οι Afek *et al.* [1]. Το μοντέλο αυτό επικεντρώνεται γύρω από την πράξη εημέρωσης, η οποία επιτρέπει στις συνόδους να αποκτούν ρυθμό μετάδοσης μεγαλύτερο από τον τελικό δίκαιο ρυθμό τους. Καταφέρνουμε να αποδείξουμε ότι οι βασικές "κλασικές" αρχές δρομολόγησης, όπως εκείνη της δρομολόγησης εκ περιτροπής [32, 33, 34] ή της δρομολόγησης συνόδων που διατρέχουν ακμές συμφόρησης [36], εξακολουθούν να είναι σημαντικές στο νέο μοντέλο. Πιο σημαντικά, αποδεικνύουμε ότι κάποιες από αυτές τις τεχνικές είναι αποδεδειγμένα καλύτερες, ως προς την πολυπλοκότητα σύκγλισης ή την τοπικότητα (ή και τα δύο) από άλλες, όπως η δρομολόγηση της συνόδου με τον καθολικά μικρότερο ρυθμό μετάδοσης [6], που έχουν ήδη μελετηθεί στο οπτιμιστικό μοντέλο από τους Afek *et al.* [1].

Τονίζουμε επίσης ότι οι *υλοποιήσεις* αλγορίθμων ελέγχου ροής που έχουν παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία μέχρι σήμερα (π.χ., [12, 14, 67]) χρησιμοποιούν *συγκεκριμμένους* αλγορίθμους ως βασικά συστατικά για τη ανάπτυξή τους, οι οποίοι ανήκουν επίσης στην κλάση των συντηρητικών αλγορίθμων που δεν επιτρέπει σε κάποια σύνοδο να έχει ενδιάμεσα μεγαλύτερο ρυθμό μετάδοσης από την τιμή της τελικής ανάθεσης. Αντίθετα, οι μειώσεις που υιοθετούν οι οπτιμιστικοί αλγόριθμοι απαιτούν ατομικότητα εκτέλεσης της πράξης ενημέρωσης, γεγονός που δυσκολεύει την υλοποίηση τέτοιων οπτιμιστικών σχημάτων με κατανεμημένο και ασύγχρονο τρόπο.

Παρόμοιες εκδόσεις δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου προτάθηκαν ανεξάρτητα από τους Hayden [36], Jaffe [40, 41] και Luss και Smith [55]. Η κλασική θεωρία δίκαιου ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης, που ονομάζεται επίσης και θεωρία *συμφόρησης ελέγχου ροής* [40], έχει χτιστεί γύρω από το κριτήριο δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου ([6, 33, 36, 40, 41]). Όλη αυτή η θεωρία είχε υιοθετήσει το συντηρητικό παράδειγμα. Το οπτιμιστικό μοντέλο εργασίας εισήχθει από τους Afek *et al.* [1]. Καμιά από τις προηγούμενες εργασίες δεν έχει λάβει υπ' όψιν της προτεραιότητες (με την [40], την οποία σχολιάζουμε πιο κάτω, να είναι η μοναδική εξαίρεση).

Ασύγχρονοι κατανεμημένοι αλγόριθμοι που συγκλίνουν σε δίκαιους ρυθμούς μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου έχουν παρουσιαστεί στις [12, 13, 14, 44, 57, 71] (η λίστα αυτή δεν είναι εξαντλητική). Όλοι αυτοί οι αλγόριθμοι ακολουθούν το συντηρητικό παράδειγμα. Επίσης, θέματα που άπτονται των προτεραιοτήτων έχουν μείνει ανέγγιχτα από τις εργασίες αυτές.

Οι εργασίες των Jaffe [40, Ενότητα X] και Gafni και Bertsekas [29] (η οποία είχε σαν κίνητρο ένα σχήμα κωδικοποιήσης ήχου) είναι οι μόνες εργασίες που γνωρίζουμε οι οποίες επιχειρούν να διευθυνσιοδοτήσουν θέματα που σχετίζονται με προτεραιότητες στο γενικό πλαίσιο της θεωρίας ελέγχου ροής δια προσαρμογής ρυθμού μετάδοσης με δικαιοσύνη.

Ο Jaffe εισάγει την έννοια της *προτεραιότητας ρυθμαπόδοσης* [40, Ενότητα X] προκειμένου να αγγίξει θέματα διαφορετικής μεταχείρισης των συνόδων ενός ετερογενούς συνόλου. Μιλωντας άτυπα, η προτεραιότητα ρυθμαπόδοσης μιας συνόδου είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός που πολλαπλασιάζει το ρυθμό μετάδοσης της συνόδου, έτσι ώστε αυτός να πλησιάσει την επιθυμητή τιμή. Οι αριθμοί αυτοί είναι τέτοιοι ώστε ο λόγος της ρυθμαπόδοσης των συνόδων που διατρέχουν κάθε κορεσμένη ακμή συμφόρησης ισούται με το λόγο των προτεραιοτήτων ρυθμαπόδοσης των συνόδων αυτών. Ο Jaffe [40, Ενότητα X] χρησιμοποιεί τις παραπάνω έννοιες για να προτείνει μια επαναδιατύπωση του κριτηρίου δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου. (Το αυθεντικό κριτήριο δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου που παρουσιάζεται στην [40, Ενότητα IX] είναι εν μέρει διαφορετικό από τη νέα έκδοση που παρουσιάζεται στην [6, Ενότητα 5], αν και είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το ένα συνεπάγεται το άλλο.)

Η διατύπωση του κριτηρίου δικαιοσύνης, όπως παρουσιάζεται από τον Jaffe μπορεί να συγκριθεί με την ειδική περίπτωση που οι ρυθμοί μετάδοσης συσχετίζονται με γραμμικό τρόπο με τις προτεραιότητες των αντίστοιχων συνόδων, στο δικό μας γενικότερο πλαίσιο. Ωστόσο, εμείς επιτρέπουμε στις συναρτήσεις ανάθεσης προτεραιοτήτων να είναι *αυθαίρετες* και όχι απαραίτητα γραμμικές ως προς του ρυθμούς μετάδοσης ή τις προτεραιότητες. Επομένως, το κριτήριο που εξετάζουμε σε αυτήν τη διατριβή είναι πιο γενικό. Ο Jaffe παρουσιάζει μια απλή τροποποίηση ενός *εξειδικευμένου,* συντηρητικού, επαναληπτικού αλγορίθμου για την περίπτωση ομογενών συνόδων [40, Ενότητα V], η οποία ικανοποιεί το νέο κριτήριο δικαιοσύνης που προτείνει. Αντίθετα, τα δικά μας αποτελέσματα είναι πολύ πιο γενικά, αφού ισχύουν για *κάθε* αλγόριθμο συμφόρησης προτεραιοτήτων, ανεξάρτητα με το αν είναι συντηρητικός ή οπτιμιστικός. Επιπρόσθετα, αποδεικνύουμε επίσης ιδιότητες για *κάθε* οπτιμιστικό, αλγόριθμο συμφόρησης προτεραιοτήτων, τις οποίες χρησιμοποιούμε για να σχεδιάσουμε και να αναλύσουμε την απόδοση εξειδικευμένων αλγορίθμων.

Οι Gafni και Bertsekas [29] διατυπώνουν κομψές, συνδυαστικές συνθήκες βελτιστοποίησης, οι οποίες εσωματώνουν αφηρημένες συναρτήσεις ως προς τους ρυθμούς μετάδοσης και τις χωρητικότητες των ακμών, με σκοπό να εκφράσουν διαφορετικές προτιμήσεις μεταξύ διαφορετικών συνόδων στην κατανομή του εύρους ζώνης κάθε συνδέσμου. Οι Gafni και Bertsekas παρέχουν έναν *απλό* επαναληπτικό, συντηρητικό, σύγχρονο αλγόριθμο, για τον υπολογισμό ρυθμών μετάδοσης που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες. Αντίθετα, στη διατριβή αυτή εισάγουμε με άμεσο και διαισθητικά ισχυρό τρόπο την έννοια των προτεραιοτήτων ως συναρτήσεων στους ρυθμούς μετάδοσης (και αντίστροφα). Διατυπώνουμε μια συνθήκη δικαιοσύνης κατάλληλη για οποιοδήποτε περιβάλλον εργασίας διαπραγματεύεται προτεραιότητες, και αναπτύσσουμε μια ολόκληρη θεωρία γύρω από τη συνθήκη αυτή. Επιπρόσθετα, όπως ήδη τονίσαμε, το ένα μέρος της θεωρίας μας αναφέρεται σε ολόκληρη την κλάση αλγορίθμων συμφόρησης προτεραιοτήτων, ενώ το υπόλοιπο μέρος αναφέρεται σε αλγορίθμους που ακολουθούν το οπτιμιστικό μοντέλο [1].

1.4 Οργάνωση

Η διατριβή αυτή είναι χωρισμένη σε τρία μέρη. Στο πρώτο από αυτά (Μέρος I) παρουσιάζουμε ενδιαφέρουσες μαθηματικές θεμελιώσεις, το μοντέλο εργασίας μας και εισαγωγικά αποτελέσματα για τους αλγορίθμους συμφόρησης. Το Μέρος II παρουσιάζει τα αποτελέσματά μας για το οπτιμιστικό μοντέλο, ενώ το Μέρος III παρουσιάζει τη γενικευμένη θεωρία δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου για την περίπτωση ύπαρξης διαφορετικών απαιτήσεων σε εύρος ζώνης από τις συνόδους.

Πιο συγκεκριμμένα, το Κεφάλαιο 2 παρέχει χρήσιμη μαθηματική ορολογία, περιγράφει τις συναρτήσεις ενημέρωσης και παρουσιάζει κώδικα για την υλοποίησή τους. Επιπρόσθετα, στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε το άνω όριο στον αριθμό των βημάτων που απαιτούνται για τη διεξαγωγή τοπικών υπολογισμών στους δικτυακούς διακόπτες. Το Κεφάλαιο 3 παρουσιάζει το πλαίσιο εργασίας μας, ενώ εισαγωγικά, θεωρητικά αποτελέσματα για τους αλγορίθμους συμφόρησης παρέχονται στο Κεφάλαιο 4. Το οπτιμιστικό μοντέλο παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5. Το Κεφάλαιο 6 επεξεργάζεται σημαντικές ιδιότητες των οπτιμιστικών αλγορίθμων συμφόρησης που συσχετίζονται με την εγκυρότητα του διανύσματος εξόδου τους και την πολυπλοκότητα σύγκλισής τους. Η γενική μεθοδολογία για την κατασκευή του δικτύου πάνω στο οποίο βασίζεται η απόδειξη του κάτω ορίου, καθώς και η απόδειξη του ορίου αυτού στην πολυπλοκότητα σύγκλισης των αλγορίθμων χωρίς ή με μερική γνώση παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 7, ενώ το Κεφάλαιο 8 περιγράφει αντίστοιχα άνω όρια. Το σχήμα υλοποίησης για τους αλγορίθμους χωρίς γνώση επεξηγείται στο Κεφάλαιο 9. Το Κεφάλαιο 10 εισάγει τις έννοιες των προτεραιοτήτων και των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων και μελετά τη δικαιοσύνη μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων. Το Κεφάλαιο 11 επικεντρώνεται στους αλγορίθμους συμφόρησης προτεραιοτήτων, ενώ στο Κεφάλαιο 12 αποδεικνύονται τα αποτελέσματά μας για οπτιμιστικούς, αλγορίθμους συμφόρησης προτεραιοτήτων. Καταλήγοντας σχολιάζουμε τα αποτελέσματά μας και περιγράφουμε ενδιαφέροντα ανοιχτά προβλήματα.

Μέρος I

Μοντέλο Εργασίας και Αλγόριθμοι Συμφόρησης

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικές Θεμελιώσεις

Η οργάνωση του κεφαλαίου αυτού είναι η εξής. Η Ενότητα 2.1 παρουσιάζει μια συνοπτική ανασκόπηση χρήσιμης μαθηματικής συμβολογραφίας. Οι συναρτήσεις ενημέρωσης παρουσιάζονται στην Ενότητα 2.2, ενώ η Ενότητα 2.3 επικεντρώνεται στις λεπτομέρειες της υλοποίησής τους. Η Ενότητα 2.4 περιγράφει μια γενίκευση του γνωστού πιθανοτικού προβλήματος επιλογής κουπονιών (coupon collector's problem).

2.1 Μαθηματική Συμβολογραφία

Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\Re$ για να συμβολίσουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Συμβολίζουμε με λ την κενή ακολουθία. Για κάθε ακολουθία σ, συμβολίζουμε με $|\sigma|$ το *μήκος* της σ. Μια άπειρη ακολουθία έχει άπειρο μήκος. Για κάθε ακέραιο $m \geq 1$, συμβολίζουμε $[m] = \{1, \ldots, m\}$, και ορίζουμε τον *m-οστό αρμονικό αριθμό* H_m να είναι $\sum_{l=1}^{m} 1/l$. Το H_m αυξάνει λογαριθμικά με το m, ή ακριβέστερα, $H_m \approx \ln m + \gamma$, όπου $\gamma = 0.577\ldots$ είναι η *σταθερά του Euler*. Παρουσιάζουμε στη συνέχεια ένα απλό λήμμα που αποδεικνύεται με συνδυαστικά επιχειρήματα.

Λήμμα 2.1 *Έστω ότι $n = \sum_{j\geq 1} n_j$ είναι ένα άθροισμα απείρων όρων. Τότε, $\sum_{j\geq 1} n_j^2 \leq n \cdot \max_{j\geq 1} n_j$.*

Απόδειξη: Προφανώς,

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 1} n_j^2 \leq \sum_{j\geq 1}(n_j \cdot \max_{j\geq 1} n_j) &= \sum_{j\geq 1} n_j \cdot \max_{j\geq 1} n_j \\ &= n \cdot \max_{j\geq 1} n_j\,,\end{aligned}$$

όπως απαιτείται. ■

Αναπαριστάνουμε τα διανύσματα με πυκνούς, μικρούς χαρακτήρες. Έστω ένα διάνυσμα $\mathbf{r} = \langle r_1, r_2, \ldots, r_m \rangle^{\mathrm{T}}$. Χρησιμοποιούμε συχνά την νόρμα $\|\mathbf{r}\|_1 = \sum_{l=1}^{m} |r_l|$. Για κάθε ακέραιο $m \geq 1$, συμβολίζουμε με $\mathbf{0}^{(m)}$ το διάνυσμα που όλα τα m στοιχεία του είναι μηδέν.

Έστω ότι X είναι μια τυχαία μεταβλητή. Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}(X)$ τη *μέση τιμή* της X. Η μέση τιμή είναι γραμμικός τελεστής στο σύνολο των τυχαίων μεταβλητών. Εάν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη *γεωμετρική κατανομή με παράμετρο* ρ, ισχύει ότι $\mathcal{E}(X) = 1/\rho$ ([58, Παράρτημα C]).

2.2 Συναρτήσεις Ενημέρωσης

2.2.1 Η Συνάρτηση Αυξήσεως και το Ανασχηματιστικό Διάνυσμα Αυξήσεως

Σε αυτήν την ενότητα, ορίζουμε τη συνάρτηση αυξήσεως και το ανασχηματιστικό διάνυσμα αυξήσεως. Επίσης, αποδεικνύουμε ότι η ανασχηματιστική αύξηση και επομένως και το ανασχηματιστικό διάνυσμα αυξήσεως είναι μοναδικά. Η συνάρτηση αυξήσεως αποτελεί επαναδιατύπωση του [1, Παράρτημα A, Ορισμός A.1] στη μορφή αφηρημένης, μαθηματικής συνάρτησης.

Ορισμός 2.2.1 *Έστω $m \geq 2$ ένας ακέραιος. Η* συνάρτηση αυξήσεως, *η οποία συμβολίζεται* `iupdate`, *έχει τρία ορίσματα εισόδου. Το πρώτο είναι ένα διάνυσμα $\mathbf{r} \in \Re^m$, το δεύτερο ένας ακέραιος $i \in [m]$, και το τρίτο ένας πραγματικός αριθμός $c \in \Re$, τέτοια ώστε $\|\mathbf{r}\|_1 < c$. Η συνάρτηση αυξήσεως επιστρέφει ως έξοδο ένα ζεύγος $\langle \mathbf{r}', \Delta \rangle = \mathtt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$, που αποτελείται από ένα διάνυσμα $\mathbf{r}'$ και έναν πραγματικό αριθμό $\Delta > 0$ τέτοια ώστε:*

(1) $\|\mathbf{r}'\|_1 = c$;

(2) $r'_i = r_i + \Delta$;

(3) *για κάθε* $j \in [m]$, $j \neq i$, *εάν* $r_j \leq r_i + \Delta$, *τότε* $r'_j = r_j$;

(4) *για κάθε* $j \in [m]$, $j \neq i$, *εάν* $r_j > r_i + \Delta$, *τότε* $r'_j = r_i + \Delta$.

Εάν $\langle \mathbf{r}', \Delta \rangle = \texttt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$, ονομάζουμε το διάνυσμα $\mathbf{r}'$ *ανασχηματιστικό διάνυσμα αυξήσεως* της τριάδας $\langle \mathbf{r}, i, c \rangle$ που αντιστοιχεί στην *ανασχηματιστική αύξηση* Δ ([1, Παράρτημα Α, Ορισμός Α.1]). Διαισθητικά, το ανασχηματιστικό διάνυσμα επιφέρει τον "κορεσμό" του c (συνθήκη (1)) αυξάνοντας το στοιχείο r_i κατά Δ (συνθήκη (2)), ενώ τα στοιχεία εκείνα που είναι μικρότερα από το αυξητέο δεν επηρεάζονται (συνθήκη (3)). Επίσης, το ανασχηματιστικό διάνυσμα είναι κατά κάποια έννοια δίκαιο, αφού επιπρόσθετα, μετά την αύξηση, κανένα στοιχείο με μεγαλύτερη τιμή δεν έχει απομείνει στο διάνυσμα (συνθήκη (4)).

Μοναδικότητα του Ανασχηματιστικού Διανύσματος Αυξήσεως

Αποκεικνύουμε ότι η ανασχηματιστική αύξηση είναι μοναδική και επομένως και το ανασχηματιστικό διάνυσμα αυξήσεως είναι μοναδικό.

Πρόταση 2.1 *Έστω ότι για κάποιο ζεύγος* $\langle \mathbf{r}', \Delta \rangle$ *ισχύει ότι:*

$$\langle \mathbf{r}', \Delta \rangle = \texttt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle),$$

για κάποιο διάνυσμα $\mathbf{r}$, *έναν ακέραιο* i, *και έναν πραγματικό* $c > 0$. *Τότε, δεν υπάρχει ζεύγος* $\langle \mathbf{r}'', \Delta' \rangle$ *τέτοιο ώστε* $\Delta' \neq \Delta$ *και* $\langle \mathbf{r}'', \Delta' \rangle = \texttt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$.

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ζεύγος $\langle \mathbf{r}'', \Delta' \rangle$ τέτοιο ώστε $\Delta' \neq \Delta$ και $\langle \mathbf{r}'', \Delta' \rangle = \texttt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$.

Προκειμένου να απλοποιήσουμε την απόδειξη χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συμβολογραφία. Συμβολίζουμε $\mathbf{s} = \texttt{sort}(\mathbf{r})$. Συνεπώς, το διάνυσμα $\mathbf{s}$ περιέχει ακριβώς τα ίδια στοιχεία με το $\mathbf{r}$, αλλά ανακατανεμημένα σε αύξουσα διάταξη. Επίσης, συμβολίζουμε με $\mathbf{s}'$ και $\mathbf{s}''$ τις ταξινομημένες σε αύξουσα διάταξη εκδόσεις των διανυσμάτων $\mathbf{r}'$ και $\mathbf{r}''$, αντίστοιχα. Έστω ότι

$l \in [m]$ είναι ακέραιος τέτοιος ώστε: $s_{m-l+1} > r_i + \Delta$ και για κάθε ακέραιο $j \in [m-l]$ ισχύει ότι $s_j \leq r_i + \Delta$. Προφανώς, εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{s}$ είναι ταξινομημένο, για κάθε $j = m-l+1, \ldots, m$, είναι $s_j > r_i + \Delta$. Επιπρόσθετα, έστω ότι $l' \in [m]$ είναι ακέραιος τέτοιος ώστε: $s_{m-l'+1} > r_i + \Delta'$ και για κάθε ακέραιο $j \in [m-l']$ ισχύει ότι $s_j \leq r_i + \Delta'$. Προφανώς, εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{s}$ είναι ταξινομημένο, για κάθε $j = m - l' + 1, \ldots, m$, είναι $s_j > r_i + \Delta'$.

Επειδή $\langle \mathbf{r}', \Delta \rangle = \mathtt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$ ισχύει ότι $\mathbf{s}' = \langle s_1, \ldots, s_{m-l}, r_i + \Delta, \ldots, r_i + \Delta \rangle$. Επίσης, αφού $\langle \mathbf{r}'', \Delta' \rangle = \mathtt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$ ισχύει ότι $\mathbf{s}'' = \langle s_1, \ldots, s_{m-l'}, r_i + \Delta', \ldots, r_i + \Delta' \rangle$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} s'_j &= \sum_{j=1}^{m-l} s_j + \sum_{j=m-l+1}^{m} (r_i + \Delta) \\ &= \sum_{j=1}^{m-l} s_j + l(r_i + \Delta)\,. \end{aligned}$$

καθώς επίσης,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} s''_j &= \sum_{j=1}^{m-l'} s_j + \sum_{j=m-l'+1}^{m} (r_i + \Delta') \\ &= \sum_{j=1}^{m-l'} s_j + l'(r_i + \Delta')\,. \end{aligned}$$

Εφόσον $\langle \mathbf{r}', \Delta \rangle = \mathtt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$ και $\langle \mathbf{r}'', \Delta' \rangle = \mathtt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$, η πρώτη συνθήκη της συνάρτησης `iupdate` συνεπάγεται ότι $\sum_{j=1}^{m} s'_j = c$ και $\sum_{j=1}^{m} s''_j = c$. Συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^{m} s'_j = \sum_{j=1}^{m} s''_j\,.$$

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που $l = l'$. Τότε,

$$\sum_{j=1}^{m-l} s_j + l(r_i + \Delta) = \sum_{j=1}^{m-l} s_j + l(r_i + \Delta')\,,$$

έτσι ώστε

$$l(\Delta - \Delta') \;\; = \;\; 0\,,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\Delta \;\; = \;\; \Delta'\,.$$

Άτοπο, αφού από υπόθεση ισχύει ότι $\Delta \neq \Delta'$. Άρα, θα πρέπει να είναι $l \neq l'$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $l < l'$ (η αντίστροφη περίπτωση είναι παρόμοια), οπότε έχουμε

$$\sum_{j=1}^{m} s'_j \;\; = \;\; \sum_{j=1}^{m-l'} s_j + \sum_{j=m-l'+1}^{m-l} s_j + l(r_i + \Delta)\,.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^{m-l'} s_j + \sum_{j=m-l'+1}^{m-l} s_j + l(r_i + \Delta) \;\; = \;\; \sum_{j=1}^{m-l'} s_j + l'(r_i + \Delta')\,.$$

Άρα,

$$\sum_{j=m-l'+1}^{m-l} s_j + l(r_i + \Delta) \;\; = \;\; l'(r_i + \Delta')\,,$$

έτσι ώστε

$$\sum_{j=m-l'+1}^{m-l} s_j + l(r_i + \Delta) - l'(r_i + \Delta') \;\; = \;\; 0\,.$$

Προφανώς, για κάθε $j = m - l' + 1, \ldots, m - l$ ισχύει ότι $s_j > r_i + \Delta'$. Επομένως,

$$\sum_{i=m-l'+1}^{m-l} s_j \;\; > \;\; (l' - l)(r_i + \Delta')\,.$$

Συνεπώς,

$$(l' - l)(r_i + \Delta') + l(r_i + \Delta) - l'(r_i + \Delta') \quad > \quad 0\,,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$l(r_i + \Delta) - l(r_i + \Delta') \quad > \quad 0\,.$$

Άρα,

$$l(\Delta - \Delta') \quad > \quad 0\,,$$

έτσι ώστε

$$\Delta > \Delta'\,.$$

Προφανώς, για κάθε $j = m - l' + 1, \ldots, m - l$ ισχύει ότι $s_j \leq r_i + \Delta$. Επομένως,

$$\sum_{i=m-l'+1}^{m-l} s_j \quad \leq \quad (l' - l)(r_i + \Delta)\,.$$

Άρα,

$$(l' - l)(r_i + \Delta) + l(r_i + \Delta) - l'(r_i + \Delta') \quad \leq \quad 0\,,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$l'(r_i + \Delta) - l'(r_i + \Delta') \quad \leq \quad 0\,.$$

Συνεπώς,

$$l'(\Delta - \Delta') \quad \leq \quad 0\,,$$

έτσι ώστε

$$\Delta \leq \Delta' .$$

Άτοπο. ■

2.2.2 Η Συνάρτηση Μειώσεως και το Ανασχηματιστικό Διάνυσμα Μειώσεως

Σε αυτήν την ενότητα, ορίζουμε τη συνάρτηση μειώσεως και το ανασχηματιστικό διάνυσμα μειώσεως. Επίσης, αποδεικνύουμε ότι η ανασχηματιστική μείωση και επομένως και το ανασχηματιστικό διάνυσμα μειώσεως είναι μοναδικά. Η συνάρτηση μειώσεως αποτελεί επαναδιατύπωση του [1, Παράρτημα Α, Ορισμός Α.2] στη μορφή αφηρημένης, μαθηματικής συνάρτησης.

Ορισμός 2.2.2 *Έστω $m \geq 2$ ένας ακέραιος. Η* συνάρτηση μειώσεως, *η οποία συμβολίζεται* `dupdate`, *έχει τέσσερα ορίσματα εισόδου, ένα διάνυσμα $\mathbf{r} \in \Re^m$, έναν ακέραιο $i \in [m]$, έναν παραγματικό $c \in \Re$ τέτοιον ώστε $\|\mathbf{r}\|_1 \leq c$ και έναν πραγματικό $\Delta \geq 0$. Η συνάρτηση μειώσεως επιστρέφει ως έξοδο ένα ζεύγος $\langle \mathbf{r}', B \rangle = \texttt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta \rangle)$, που αποτελείται από ένα διάνυσμα $\mathbf{r}'$ και έναν πραγματικό αριθμό $B \geq 0$ τέτοια ώστε:*

(1) $\|\mathbf{r}'\|_1 = c$;

(2) $r'_i = r_i + \Delta$;

(3) *για κάθε $j \in [m]$, $j \neq i$, αν $r_j \leq B$, τότε $r'_j = r_j$;*

(4) *για κάθε $j \in [m]$, $j \neq i$, αν $r_j > B$, τότε $r'_j = B$.*

Εάν $\langle \mathbf{r}', B \rangle = \texttt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta \rangle)$, ονομάζουμε το διάνυσμα $\mathbf{r}'$ *ανασχηματιστικό διάνυσμα μειώσεως* για την τετράδα $\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta \rangle$, το οποίο αντιστοιχεί στην *ανασχηματιστική μείωση* B ([1, Παράρτημα Α, Ορισμός Α.2]). Διαισθητικά, το ανασχηματιστικό διάνυσμα μειώσεως "αποδέχεται" μια αύξηση στο στοιχείο r_i κατά Δ, χωρίς να επιτρέπει το συνολικό άθροισμα των στοιχείων του $\mathbf{r}$ να ξεπερνά το c. Επομένως, αυτή η αύξηση μπορεί να επιφέρει μειώσεις στην τιμή άλλων στοιχείων του διανύσματος $\mathbf{r}$. Στοιχεία με τιμή μικρότερη του B δε μεταβάλλονται, ενώ όλα τα υπόλοιπα στοιχεία αλλάζουν την τιμή τους σε B. Επίσης, προκαλείται "κορεσμός" του c.

Μοναδικότητα του Ανασχηματιστικού Διανύσματος Μειώσεως

Αποκεικνύουμε ότι η ανασχηματιστική μείωση είναι μοναδική και επομένως, και το ανασχηματιστικό διάνυσμα μειώσεως είναι μοναδικό.

Πρόταση 2.2 *Έστω ότι για κάποιο ζεύγος $\langle \mathbf{r}', B\rangle$ ισχύει ότι:*

$$\langle \mathbf{r}', B\rangle \quad = \quad \texttt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta\rangle)\,,$$

για κάποιο διάνυσμα $\mathbf{r}$, έναν ακέραιο i, και τους πραγματικούς c και Δ. Τότε, δεν υπάρχει ζεύγος $\langle \mathbf{r}'', B'\rangle$ τέτοιο ώστε $B \neq B'$ και $\langle \mathbf{r}'', B'\rangle = \texttt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta\rangle)$.

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ζεύγος $\langle \mathbf{r}'', B'\rangle$ τέτοιο ώστε $B \neq B'$ and $\langle \mathbf{r}'', B'\rangle = \texttt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta\rangle)$.

Προκειμένου να απλοποιήσουμε την απόδειξη χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συμβολογραφία. Συμβολίζουμε $\mathbf{s} = \texttt{sort}(\mathbf{r})$. Συνεπώς, το διάνυσμα $\mathbf{s}$ περιέχει ακριβώς τα ίδια στοιχεία με το $\mathbf{r}$, αλλά ανακατανεμημένα σε αύξουσα διάταξη. Επίσης, συμβολίζουμε με $\mathbf{s}'$ και $\mathbf{s}''$ τις ταξινομημένες σε αύξουσα διάταξη εκδόσεις των διανυσμάτων $\mathbf{r}'$ και $\mathbf{r}''$, αντίστοιχα. Για κάθε $j \in [m]$, συμβολίζουμε με $\widehat{j}$ το δείκτη του στοιχείου του διανύσματος $\texttt{sort}(\mathbf{r})$ που αντιστοιχεί στο στοιχείο $r_j \in \mathbf{r}$. 'Εστω ότι $l \in [m]$ είναι ένας ακέραιος τέτοιος ώστε: $s_{m-l+1} > B$ και για κάθε ακέραιο $j \in [m-l]$, ισχύει ότι $s_j \leq B$. Εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{s}$ είναι ταξινομηνένο συνεπάγεται ότι, για κάθε $j = m-l+1, \ldots, m$, είναι $s_j > B$. 'Εστω επίσης ότι $l' \in [m]$ είναι ένας ακέραιος τέτοιος ώστε: $s_{m-l'+1} > B'$ και για κάθε ακέραιο $j \in [m-l']$ ισχύει ότι $s_j \leq B'$. Εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{s}$ είναι ταξινομημένο συνεπάγεται ότι για κάθε $j = m-l'+1, \ldots, m$ είναι $s_j > B'$.

Αφού $\langle \mathbf{r}', B\rangle = \texttt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta\rangle)$ ισχύει ότι για κάθε $j = 1, \ldots, m-l$, $j \neq \widehat{i}$, $s'_j = s_j$. Επίσης, για κάθε $j = m-l+1, \ldots, m$, $j \neq \widehat{i}$, $s'_j = B$. Προφανώς, $s'_{\widehat{i}} = r_i + \Delta$. Επομένως,

$$\sum_{j=1}^{m} s'_j = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B + r_i + \Delta\,.$$

Αφού $\langle \mathbf{r}'', B'\rangle = \texttt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta\rangle)$ ισχύει ότι για κάθε $j = 1, \ldots, m-l'$, $j \neq \widehat{i}$, $s''_j = s_j$. Επίσης, για κάθε $j = m-l'+1, \ldots, m$, $j \neq \widehat{i}$, $s''_j = B'$. Προφανώς, $s''_{\widehat{i}} = r_i + \Delta$. Επομένως,

$$\sum_{j=1}^{m} s''_j = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l'} s_j + \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B' + r_i + \Delta\,.$$

Εφόσον $\langle \mathbf{r}', B\rangle = \texttt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta\rangle)$ και $\langle \mathbf{r}'', B'\rangle = \texttt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta\rangle)$, η πρώτη συνθήκη της συνάρτησης `dupdate` συνεπάγεται ότι $\sum_{j=1}^{m} s'_j = c$ και $\sum_{j=1}^{m} s''_j = c$, αντίστοιχα. Συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^{m} s'_j = \sum_{j=1}^{m} s''_j\,.$$

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση όπου $l = l'$. Τότε,

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B + r_i + \Delta = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B' + r_i + \Delta\,.$$

έτσι ώστε

$$\sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} (B - B') = 0\,.$$

Συνεπώς,

$$B - B' = 0\,,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$B \;=\; B' .$$

Άτοπο, αφού από υπόθεση ισχύει ότι $B \neq B'$. Επομένως, θα πρέπει να ισχύει ότι $l \neq l'$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $l < l'$ (η αντίστροφη περίπτωση είναι παρόμοια), έτσι ώστε $m - l' < m - l$. Τότε ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{m} s'_j \;=\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l'} s_j + \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B + r_i + \Delta .$$

Συνεπώς,

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l'} s_j + \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B + r_i + \Delta \;=\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l'} s_j + \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B' + r_i + \Delta .$$

Άρα,

$$\sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B - \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B' \;=\; 0 .$$

Συνεχίζουμε εξετάζοντας τις ακόλουθες περιπτώσεις για το $\widehat{i}$.

1. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\widehat{i} < m - l'$. Προφανώς,

$$\sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B - \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B' \;=\; \sum_{j=m-l'+1}^{m-l} s_j + \sum_{j=m-l+1}^{m} B - \sum_{j=m-l'+1}^{m} B' ,$$

   έτσι ώστε,

$$\sum_{j=m-l'+1}^{m-l} s_j + lB - l'B' \;=\; 0 .$$

Προφανώς, για κάθε $j = m - l' + 1, \ldots, m - l$ ισχύει ότι $s_j > B'$. Επομένως

$$\sum_{i=m-l'+1}^{m-l} s_j \quad > \quad (l' - l)B' .$$

Άρα,

$$(l' - l)B' + lB - l'B' \quad > \quad 0 ,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$lB - lB' \quad > \quad 0 .$$

Συνεπώς,

$$l(B - B') \quad > \quad 0 ,$$

έτσι ώστε

$$B > B' .$$

Προφανώς, για κάθε $j = m - l' + 1, \ldots, m - l$ ισχύει ότι $s_j \leq B$. Επομένως,

$$\sum_{i=m-l'+1}^{m-l} s_j \quad \leq \quad (l' - l)B .$$

Άρα,

$$(l' - l)B + lB - l'B' \quad \leq \quad 0 ,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$l'B - l'B' \leq 0 .$$

Συνεπώς,

$$l'(B - B') \leq 0 ,$$

έτσι ώστε

$$B \leq B' .$$

Άτοπο.

2. Εξετάζουμε στη συνέχεια την περίπτωση όπου $m - l' + 1 \leq \widehat{i} < m - l + 1$. Προφανώς,

$$\sum_{\substack{j=m-l'+1 \\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1 \\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B - \sum_{\substack{j=m-l'+1 \\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B' = \sum_{\substack{j=m-l'+1 \\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{j=m-l+1}^{m} B - \sum_{\substack{j=m-l'+1 \\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B' ,$$

έτσι ώστε,

$$\sum_{\substack{j=m-l'+1 \\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + lB - (l'-1)B' = 0 .$$

Προφανώς, για καθε $j = m - l' + 1, \ldots, m - l$, $j \neq \widehat{i}$ ισχύει ότι $s_j > B'$. Επομένως,

$$\sum_{\substack{j=m-l'+1 \\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j > (l' - l - 1)B' .$$

Άρα,

$$(l' - l - 1)B' + lB - (l'-1)B' > 0 ,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$lB - lB' - B + B' \;\; > \;\; 0\,.$$

Συνεπώς,

$$(l-1)(B - B') \;\; > \;\; 0\,.$$

Όμως ισχύει ότι $l \geq 1$, το οποίο σημαίνει ότι $l - 1 \geq 0$. Επομένως, θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$B > B'\,.$$

Προφανώς, για κάθε $j = m - l' + 1, \ldots, m - l$, $j \neq \widehat{i}$ ισχύει ότι $s_j \leq B$. Επομένως,

$$\sum_{\substack{j=m-l'+1 \\ j \neq \widehat{i}}}^{m-l} s_j \;\; \leq \;\; (l' - l - 1)B\,.$$

Άρα,

$$(l' - l - 1)B + lB - (l' - 1)B' \;\; \leq \;\; 0\,,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$l'B - l'B' + B - B' \;\; \leq \;\; 0\,.$$

Συνεπώς,

$$(l' - 1)(B - B') \;\; \leq \;\; 0\,.$$

Όμως ισχύει ότι $l' \geq 1$, το οποίο σημαίνει ότι $l' - 1 \geq 0$. Επομένως, θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$B \leq B' .$$

Άτοπο.

3. Μελετάμε τέλος την περίπτωση που $\widehat{i} \geq m - l + 1$. Προφανώς,

$$\sum_{\substack{j=m-l'+1 \\ j \neq \widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1 \\ j \neq \widehat{i}}}^{m} B - \sum_{\substack{j=m-l'+1 \\ j \neq \widehat{i}}}^{m} B' \;=\; \sum_{j=m-l'+1}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l'+1 \\ j \neq \widehat{i}}}^{m} B - \sum_{\substack{j=m-l'+1 \\ j \neq \widehat{i}}}^{m} B' ,$$

έτσι ώστε,

$$\sum_{j=m-l'+1}^{m-l} s_j + (l-1)B - (l'-1)B' \;=\; 0 .$$

Επιπρόσθετα, για κάθε $j = m - l' + 1, \ldots, m - l$ ισχύει ότι $s_j > B'$. Επομένως,

$$\sum_{j=m-l'+1}^{m-l} s_j \;>\; (l' - l)B' .$$

Άρα,

$$(l' - l)B' + (l - 1)B - (l' - 1)B' \;>\; 0 ,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$lB - lB' - B + B' \;>\; 0 .$$

Συνεπώς,

$$(l - 1)(B - B') \;>\; 0 .$$

Όμως ισχύει ότι $l \geq 1$, το οποίο σημαίνει ότι $l - 1 \geq 0$. Επομένως, θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$B > B' .$$

Προφανώς, για κάθε $j = m - l' + 1, \ldots, m - l$ ισχύει ότι $s_j \leq B$. Επομένως,

$$\sum_{j=m-l'+1}^{m-l} s_j \quad \leq \quad (l' - l)B .$$

Άρα,

$$(l' - l)B + (l - 1)B - (l' - 1)B' \quad \leq \quad 0 ,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$l'B - l'B' + B - B' \quad \leq \quad 0 .$$

Συνεπώς,

$$(l' - 1)(B - B') \quad \leq \quad 0 .$$

Όμως ισχύει ότι $l' \geq 1$, το οποίο σημαίνει ότι $l' - 1 \geq 0$. Επομένως, θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$B \leq B' .$$

Άτοπο.

Σε αυτό το σημείο η απόδειξη της Πρότασης 2.2 έχει ολοκληρωθεί. ∎

2.2.3 Ιδιότητες

Σε αυτήν την ενότητα, αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων αυξήσεως και μειώσεως.

Πρόταση 2.3 *Έστω ότι $\langle \mathbf{r}', \Delta \rangle = \mathtt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$, όπου $\mathbf{r}', \mathbf{r}$ είναι διανύσματα πραγματικών αριθμών με $m > 0$ στοιχεία, $i \in [m]$ είναι ακέραιος, $c > 0$ είναι μια αυθαίρετη θετική σταθερά και $\Delta \geq 0$ είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Έστω ότι $\Delta' \geq 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $\Delta' \leq \Delta$. Τότε, αν $\langle \mathbf{r}'', B \rangle = \mathtt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta' \rangle)$ για το διάνυσμα $\mathbf{r}''$ και τον πραγματικό B, ισχύει ότι $B \geq r_i + \Delta$.*

Απόδειξη: Προκειμένου να απλοποιήσουμε την απόδειξη χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συμβολογραφία. Συμβολίζουμε $\mathbf{s} = \mathtt{sort}(\mathbf{r})$. Συνεπώς, το διάνυσμα $\mathbf{s}$ περιέχει ακριβώς τα ίδια στοιχεία με το $\mathbf{r}$ αλλά ανακατανεμημένα σε αύξουσα διάταξη. Επίσης, συμβολίζουμε με $\mathbf{s}'$ και $\mathbf{s}''$ τις ταξινομημένες σε αύξουσα διάταξη εκδόσεις των διανυσμάτων $\mathbf{r}'$ και $\mathbf{r}''$, αντίστοιχα. Για κάθε $j \in [m]$, συμβολίζουμε με $\widehat{j}$ το δείκτη του στοιχείου του διανύσματος $\mathtt{sort}(\mathbf{r})$ που αντιστοιχεί στο στοιχείο $r_j \in \mathbf{r}$. Έστω ότι $l \in [m]$ είναι ακέραιος τέτοιος ώστε: $s_{m-l+1} > r_i + \Delta$ και για κάθε ακέραιο $j \in [m-l]$ ισχύει ότι $s_j \leq r_i + \Delta$. Εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{s}$ είναι ταξινομημένο συνεπάγεται ότι για κάθε $j = m-l+1, \ldots, m$ είναι $s_j > r_i + \Delta$. Έστω ότι $l' \in [m]$ είναι ένας ακέραιος τέτοιος ώστε: $s_{m-l'+1} > B$ και για κάθε ακέραιο $j \in [m-l']$ ισχύει ότι $s_j \leq B$. Εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{s}$ είναι ταξινομηνένο συνεπάγεται ότι για κάθε $j = m-l+1, \ldots, m$ είναι $s_j > B$.

Εφόσον $\langle \mathbf{r}', \varDelta \rangle = \mathtt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$ ισχύει ότι, για κάθε $j = 1, \ldots, m-l$, $j \neq \widehat{i}$, $s'_j = s_j$. Επίσης, για κάθε $j = m-l+1, \ldots, m$, είναι $s'_j = r_i + \varDelta$. Προφανώς, $s'_{\widehat{i}} = r_i + \Delta$. Συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^{m} s'_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1 \\ j \neq \widehat{i}}}^{m} (r_i + \Delta) + r_i + \Delta \,.$$

Εφόσον $\langle \mathbf{r}'', B\rangle = \mathtt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta'\rangle)$ ισχύει ότι, για κάθε $j = 1, \ldots, m-l'$, $j \neq \widehat{i}$, $s''_j = s_j$. Επίσης, για κάθε $j = m-l'+1, \ldots, m$, $j \neq \widehat{i}$, είναι $s''_j = B$. Προφανώς, $s''_{\widehat{i}} = r_i + \Delta'$. Συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^{m} s''_j \;=\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l'} s_j + \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B + r_i + \Delta' .$$

Συνεχίζουμε εξετάζοντας διάφορες περιπτώσεις για το l. Υποθέτουμε αρχικά ότι $l < l'$, έτσι ώστε $m - l' < m - l$. Τότε,

$$\sum_{j=1}^{m} s'_j \;=\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l'} s_j + \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} (r_i + \Delta) + r_i + \Delta .$$

Εφόσον $\langle \mathbf{r}', \mathit{\Delta}\rangle = \mathtt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c\rangle)$, η πρώτη συνθήκη της συνάρτησης $\mathtt{iupdate}$ συνεπάγεται ότι $\sum_{j=1}^{m} s'_j = c$. Επιπρόσθετα, εφόσον $\langle \mathbf{r}'', B\rangle = \mathtt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta'\rangle)$, η πρώτη συνθήκη της συνάρτησης $\mathtt{dupdate}$ συνεπάγεται ότι $\sum_{j=1}^{m} s''_j = c$. Συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^{m} s'_j \;=\; \sum_{j=1}^{m} s''_j ,$$

έτσι ώστε

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l'} s_j + \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} (r_i + \Delta) + r_i + \Delta \;=\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l'} s_j + \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B + r_i + \Delta' .$$

Επομένως,

$$\sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} (r_i + \Delta) - \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B + (\Delta - \Delta') \;=\; 0 .$$

Προφανώς, για κάθε $j = m - l' + 1, \ldots, m - l$, $j \neq \widehat{i}$ ισχύει ότι $s_j \leq r_i + \Delta$. Επομένως,

$$\sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} (r_i + \Delta) + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} (r_i + \Delta) - \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B + (\Delta - \Delta') \quad \leq \quad 0\,.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} (r_i + \Delta) - \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B + (\Delta - \Delta') \quad \leq \quad 0\,.$$

Όμως, $\Delta' \leq \Delta$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\Delta - \Delta' \geq 0$. Άρα,

$$\sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} ((r_i + \Delta) - B) \quad \leq \quad 0\,.$$

Έπεται ότι,

$$r_i + \Delta \quad \leq \quad B\,,$$

όπως απαιτείται.

Υποθέτουμε τώρα ότι $l > l'$, έτσι ώστε $m - l < m - l'$. Προφανώς,

$$\sum_{j=1}^{m} s''_j \quad = \quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-l'} s_j + \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} B + r_i + \Delta'\,.$$

Εφόσον $\langle \mathbf{r}', \mathit{\Delta} \rangle = \texttt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$, η πρώτη συνθήκη της συνάρτησης `iupdate` συνεπάγεται ότι $\sum_{j=1}^{m} s'_j = c$. Επίσης, αφού $\langle \mathbf{r}'', B \rangle = \texttt{dupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta' \rangle)$, η πρώτη συνθήκη της συνάρτησης `dupdate` συνεπάγεται ότι $\sum_{j=1}^{m} s''_j = c$. Συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^{m} s'_j \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} s''_j\,,$$

έτσι ώστε

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m-l'} s_j + \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} B + r_i + \Delta' \;=\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} (r_i+\Delta) + r_i + \Delta\,.$$

Άρα,

$$\sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m-l'} s_j + \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} B - \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} (r_i+\Delta) + (\Delta'-\Delta) \;=\; 0\,.$$

Προφανώς, για κάθε $j = m-l+1,\ldots,m-l'$, $j \neq \widehat{i}$ ισχύει ότι $s_j > r_i + \Delta$. Επομένως,

$$\sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m-l'} (r_i+\Delta) + \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} B - \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} (r_i+\Delta) + (\Delta'-\Delta) \;>\; 0\,.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m-l} B - \sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} (r_i+\Delta) + (\Delta'-\Delta) \;>\; 0\,.$$

Όμως ισχύει ότι $\Delta' \leq \Delta$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\Delta' - \Delta \leq 0$, έτσι ώστε

$$\sum_{\substack{j=m-l'+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} (B - (r_i+\Delta)) \;>\; 0\,.$$

Έπεται ότι,

$$B \;>\; r_i + \Delta\,,$$

όπως απαιτείται.

Θεωρούμε τέλος την περίπτωση όπου $l = l'$. Προφανώς,

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m-l} s_j + \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} (r_i + \Delta) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m-l} s_j - \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} B + (\Delta - \Delta') \;\; = \;\; 0\,,$$

έτσι ώστε

$$\sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} (r_i + \Delta) - \sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} B + (\Delta - \Delta') \;\; = \;\; 0\,.$$

Επομένως,

$$\sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} (((r_i + \Delta)) - B) + (\Delta - \Delta') \;\; = \;\; 0\,.$$

Όμως, ισχύει ότι $\Delta' \leq \Delta$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\Delta - \Delta' \geq 0$. Άρα,

$$\sum_{\substack{j=m-l+1\\ j\neq \widehat{i}}}^{m} (((r_i + \Delta)) - B) \;\; \leq \;\; 0\,,$$

έτσι ώστε $r_i + \Delta \leq B$, όπως απαιτείται.

Σε αυτό το σημείο η απόδειξη της Πρότασης 2.3 έχει ολοκληρωθεί. ∎

Συνεχίζουμε παρουσιάζοντας ειδικές συνθήκες κάτω από τις οποίες η ανασχηματιστική αύξηση που επιστρέφει η συνάρτηση `iupdate` είναι μηδέν.

Πρόταση 2.4 *Έστω ότι $\langle \mathbf{r}', \Delta\rangle = \texttt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c\rangle)$, για κάποιο διάνυσμα $\mathbf{r}$ με $m > 0$ στοιχεία τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^{m} r_i \leq c$, έναν ακέραιο $i \in [m]$, και τους πραγματικούς αριθμούς $c > 0$ και $\Delta \geq 0$. Τότε, $\Delta = 0$ αν ισχύει ότι:*

(1) $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$;

(2) $\sum_{i=1}^{m} r'_i = \sum_{i=1}^{m} r_i = c$;

(3) *για κάθε* $j \in [m]$, $j \neq i$, $r_j \leq r_i$.

Απόδειξη: Προκειμένου να απλοποιήσουμε την απόδειξη χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συμβολογραφία. Συμβολίζουμε $\mathtt{s} = \mathtt{sort}(\mathbf{r})$. Συνεπώς, το διάνυσμα $\mathtt{s}$ περιέχει ακριβώς τα ίδια στοιχεία με το $\mathbf{r}$ αλλά ανακατανεμημένα σε αύξουσα διάταξη. Για κάθε $j \in [m]$, συμβολίζουμε με $\widehat{j}$ το δείκτη του στοιχείου του διανύσματος $\mathtt{sort}(\mathbf{r})$ που αντιστοιχεί στο στοιχείο $r_j \in \mathbf{r}$. Αφού $\sum_{j=1}^{m} r_j \leq c$ ισχύει ότι $\sum_{j=1}^{m} s_j \leq c$.

Εφόσον $\langle \mathbf{r}', \Delta \rangle = \mathtt{iupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$ και $\Delta = 0$, εξ ορισμού της συνάρτησης iupdate, έχουμε:

(1) $\sum_{i=1}^{m} r'_i = c$;

(2) $r'_i = r_i$;

(3) για κάθε $j \in [m]$, $j \neq i$, αν $r_j \leq r_i$ τότε $r'_j = r_j$;

(4) για κάθε $j \in [m]$, $j \neq i$, αν $r_j > r_i$ τότε $r'_j = r_i$.

Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος $l \in [m-1]$ τέτοιος ώστε, για κάθε $j = l+1, \ldots, m$ ισχύει ότι $s_j > r_i$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} r'_j &= \sum j = 1^l s_j + \sum_{j=l+1}^{m} r_i \\ &< \sum_{j=1}^{l} s_j + \sum_{j=l+1}^{m} s_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} s_j \\ &\leq c, \end{aligned}$$

έτσι ώστε $\sum_{j=1}^{m} r'_j < c$. Άτοπο.

Επομένως, για κάθε $j \in [m]$ είναι $s_j \leq r_i$, το οποίο συνεπάγεται ότι $r_j \leq r_i$, όπως απαιτείται για τον ισχυρισμό (3). Απο τη συνθήκη (3), αυτό συνεπάγεται ότι, για κάθε $j \in [m]$, $r'_j = r_j$, όπως απαιτείται για τον ισχυρισμό (1). Ο ισχυρισμός (2) είναι άμεση συνέπεια του (1) και της συνθήκης (2). ∎

`function IUpdate` (`real vector:` $\mathbf{r} \in \Re^m$; `integer:` $i \in [m]$; real: c)

1 $sum := 0;$
2 `for` $(j = 1; j \leq m; j++)$ {
3 $\quad r'_j := r_j;$
4 $\quad sum := sum + r_j;$
5 }

6 $r'_i := r_i + c - sum;$
7 $total := r'_i;$
8 `sort`$(\mathbf{r}')$;
9 $count := 1;$
10 $l := m;$
11 `while` $(l > 0$ *and* $total/count < r'_l)$ `do begin`
12 $\quad total := total + r'_l;$
13 $\quad count++;$
14 $\quad l--;$
15 `end;`

16 $common := total/count;$
17 `for` $(j = l + 1; j \leq m; j++)$
18 $\quad r'_j := common;$
19 $r'_{\hat{i}} := common;$

20 $\Delta := common - r_i;$

Σχήμα 2-1: Η συνάρτηση `IUpdate`

2.3 Υλοποίηση των Συναρτήσεων Ενημέρωσης

2.3.1 Κώδικας για τη Συνάρτηση Αυξήσεως

Σε αυτήν την ενότητα αποδεικνύουμε ότι η `iupdate` είναι πράγματι συνάρτηση. Το Σχήμα 2-1 παρουσιάζει ψευδοκώδικα σε C για τη συνάρτηση `IUpdate`.

Το στοιχείο r_i επιδέχεται αρχικά μια αύξηση ίση με την "ελεύθερη χωρητικότητα" του c (στον κώδικα του Σχήματος 2-1 αυτή είναι ίση με $c - sum$, γραμμή 6). Στη συνέχεια, η αυξημένη τιμή του στοιχείου αυτού συγκρίνεται με το μέγιστο στοιχείο του διανύσματος $\mathbf{r}'$. Στην περίπτωση που είναι μεγαλύτερη, η συνάρτηση `IUpdate` τερματίζει, αφού η συνθήκη (3) της `iupdate` υποδηλώνει ότι στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{r}$ με μικρότερη τιμή δεν επηρεάζονται. Διαφορετικά, η τιμή των δύο αυτών στοιχείων θα εξισωθεί. Πιο συγκεκριμμένα, η τιμή κάθε ενός από αυτά θα γίνει ίση με $total/count$. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται επαναληπτικά έως ότου να μην απομείνει κανένα στοιχείο με μεγαλύτερη τιμή από την κοινή τιμή $total/count$. Σε αυτό το σημείο η συνάρτηση `IUpdate` τερματίζει. Λίγο πριν τον τερματισμό της, το Δ υπολογίζεται ως η αύξηση $common - r_i$ (γραμμή 18 στον κώδικα).

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η `IUpdate` τερματίζει και επιστρέφει το ανασχηματιστικό διάνυσμα αυξήσεως.

Προκειμένου να απλοποιήσουμε την απόδειξη χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συμβολογραφία. Για κάθε $j \in [m]$, συμβολίζουμε με $\widehat{j}$ το δείκτη του στοιχείου του διανύσματος $\texttt{sort}(\mathbf{r}')$ που αντιστοιχεί στο στοιχείο $r_j \in \mathbf{r}'$. Θέτουμε $r_{\widehat{i}}^{in} = r_i + c - \|\mathbf{r}\|_1$, και για κάθε $j \in [m]$, $j \neq i$ υποθέτουμε ότι $r_{\widehat{j}}^{in} = r_j$. Επίσης, έστω ότι $count^{(0)} = 1$, $total^{(0)} = r_{\widehat{i}}^{in}$ και $l^{(0)} = m$. Συμβολίζουμε με $total^{(k)}$, $count^{(k)}$ και $l^{(k)}$ τις τιμές των μεταβλητών $total$, $count$ και l, αντίστοιχα, μετά την kοστή επανάληψη της `while` (εντολή 11 στον κώδικα). Επιπλέον, συμβολίζουμε με $n \geq 0$ το συνολικό αριθμό επαναλήψεων της `while` κατά τη διάρκεια μιας αυθαίρετης εκτέλεσης της συνάρτησης `IUpdate`. Τέλος, συμβολίζουμε με $\mathbf{r}^f$ το διάνυσμα εξόδου της συνάρτησης `IUpdate`.

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση `IUpdate` τερματίζει μετά από $O(m \log m)$ βήματα.

Θεώρημα 2.1 *Η συνάρτηση* `IUpdate` *τερματίζει μετά από το πολύ $O(m \log m)$ βήματα.*

Απόδειξη: Προφανώς, η αρχική τιμή του l είναι m, καθώς επίσης το l μειώνεται κατά ένα στο τέλος κάθε επανάληψης της `while`. Επομένως, συμβαίνουν το πολύ m επαναλήψεις. το οποίο σημαίνει ότι ο χρόνος εκτέλεσης της `while` είναι στη χειρότερη περίπτωση $\mathrm{O}(m)$. Προφανώς, ο χρόνος εκτέλεσης της εντολής `for` (εντολή 17 στον κώδικα) είναι στη χειρότερη περίπτωση επίσης $O(m)$, έτσι ώστε ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης της `IUpdate` φράσσεται άνω από το χρόνο που απαιτείται για την ταξινόμηση του διανύσματος $\mathbf{r}'$. Χρησιμοποιώντας έναν $\mathrm{O}(m \log m)$ αλγόριθμο ταξινόμησης, όπως π.χ., τον `MergeSort` ή τον `Heapsort` (δείτε, π.χ., [19]), ο χρόνος εκτέλεσης της `IUpdate` γίνεται στην χειρότερη περίπτωση $\mathrm{O}(m \log m)$, όπως απαιτείται. ■

Συνεχίζουμε με μια σειρά προτάσεων που αποδεικνύουν ότι η συνάρτηση `IUpdate` υπολογίζει το ανασχηματιστικό διάνυσμα αυξήσεως. Ο πρώτος μας ισχυρισμός είναι ότι $\|\mathbf{r}^{in}\|_1 = c$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}^{in}\|_1 &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\hat{i}}}^{m} r_j^{in} + r_{\hat{i}}^{in} \\
&= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} r_j + r_i + c - \|\mathbf{r}\|_1 \\
&= \sum_{j=1}^{m} r_j + c - \|\mathbf{r}\|_1 \\
&= \|\mathbf{r}\|_1 + c - \|\mathbf{r}\|_1 = c\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

Παρατήρηση 2.1 *Ισχύει ότι:*

$$\|\mathbf{r}^{in}\|_1 = c\,.$$

Συνεχίζουμε με την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 2.2 *Για κάθε ακέραιο $k \in [n]$,*

(1) $count^{(k)} = count^{(k-1)} + 1 = k + 1$,

(2) $l^{(k)} = m - k$,

(3) $total^{(k)} = total^{(k-1)} + r_{l(k-1)}^{in} = total^{(0)} + \sum_{j=l(k-1)}^{m} r_j^{in}$.

Η ακόλουθη παρατήρηση είναι μια άμεση συνέπεια της δεύτερης συνθήκης της `while`.

Παρατήρηση 2.3 *Ισχύει ότι:*

(1) *για κάθε ακέραιο $k = 0, \ldots, n-1$,*

$$\frac{total^{(k)}}{count^{(k)}} < r_{l(k)}^{in}\,,$$

(2) $total^{(n)}/count^{(n)} \geq r^{in}_{l(n)}$.

Η ακόλουθη πρόταση υποδηλώνει ότι κατά τη διάρκεια εκτέλεσης της συνάρτησης `IUpdate`, η ποσότητα $total/count$ είναι αύξουσα.

Πρόταση 2.5 *Για κάθε ακέραιο* $k = 0, \ldots, n$, *ισχύει ότι*

$$total^{(k)}/count^{(k)} \quad \geq \quad total^{(k-1)}/count^{(k-1)}\,.$$

Απόδειξη: Προφανώς, $total^{(n)}/count^{(n)} = total^{(n-1)}/count^{(n-1)}$. Η Παρατήρηση 2.3 συνεπάγεται ότι για κάθε $k \in [n]$,

$$total^{(k-1)}/count^{(k-1)} \quad < \quad r^{in}_{l(k-1)}\,.$$

Από την Παρατήρηση 2.2(1) and (3), έχουμε ότι για κάθε $k \in [n]$, $count^{(k)} = count^{(k-1)} + 1$, ενώ $total^{(k)} = total^{(k-1)} + r^{in}_{l(k-1)}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \frac{total^{(k)}}{count^{(k)}} &= \frac{total^{(k-1)} + r^{in}_{l(k-1)}}{count^{(k-1)} + 1} \\ &> \frac{total^{(k-1)} + total^{(k-1)}/count^{(k-1)}}{count^{(k-1)} + 1} \\ &= \frac{count^{(k-1)}\, total^{(k-1)} + total^{(k-1)}}{(count^{(k-1)} + 1)\, count^{(k-1)}} \\ &= \frac{total^{(k-1)}}{count^{(k-1)}} \end{aligned}$$

όπως απαιτείται. ■

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι το στοιχείο $r^{in}_{\hat{i}}$ δεν είναι ένα από τα τελευταία n στοιχεία του διανύσματος $\mathtt{sort}(\mathbf{r}')$.

Πρόταση 2.6 $\hat{i} \leq m - n$.

Απόδειξη: Προφανώς, $r^{in}_{\hat{i}} = r_i + c - \|\mathbf{r}\|_1$, ενώ $total^{(0)} = r^{in}_{\hat{i}}$ και $count^{(0)} = 1$, έτσι ώστε $r^{in}_{\hat{i}} = total^{(0)}/count^{(0)}$. Από την Παρατήρηση 2.3 έχουμε ότι $total^{(0)}/count^{(0)} < r^{in}_{l(0)}$. Συνεπώς, $r^{in}_{\hat{i}} \leq$

$r^{in}_{l^{(0)}}$. Στην περίπτωση που $n = 0$, ο ισχυρισμός ισχύει προφανώς. Ας υποθέσουμε επομένως ότι $n > 0$. Η Πρόταση 2.5 υποδηλώνει ότι για κάθε $k \in [n]$, η ποσότητα $total^{(k)}/count^{(k)}$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση, έτσι ώστε $total^{(0)}/count^{(0)} \leq total^{(k)}/count^{(k)}$. Επομένως, ισχύει ότι $r^{in}_{\widehat{i}} \leq total^{(k)}/count^{(k)}$. Από την Παρατήρηση 2.3, για κάθε $k = 0, \ldots, n-1$ ισχύει ότι $r^{in}_{l^{(k)}} > total^{(k)}/count^{(k)}$, έτσι ώστε $r^{in}_{\widehat{i}} < r^{in}_{l^{(k)}}$ (για κάθε $k = 0, \ldots, n-1$). Επομένως, $r^{in}_{\widehat{i}} \leq r^{in}_{l^{(n-1)}}$. Εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{r}^{in}$ είναι ταξινομημένο έχουμε ότι $\widehat{i} < l^{(n-1)}$. Η Παρατήρηση 2.2 υποδηλώνει ότι $l^{(n-1)} = m - n + 1$, έτσι ώστε $\widehat{i} < m - n + 1$. Συνεπώς, ισχύει ότι $\widehat{i} \leq m - n$, όπως απαιτείται. ■

Προφανώς, $\Delta = total^{(n)}/count^{(n)} - r_i$ (εντολή 20 στον κώδικα), έτσι ώστε

$$total^{(n)}/count^{(n)} \quad = \quad r_i + \Delta\,,$$

όπως υποδηλώνεται από την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 2.4 *Ισχύει ότι:*

$$\frac{total^{(n)}}{count^{(n)}} \quad = \quad r_i + \Delta\,.$$

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι μετά την εκτέλεση της `IUpdate`, τα τροποποιημένα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{r}$ είναι τα n μεγαλύτερα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{r}^{in}$ και έχουν όλα τη ίδια τιμή $r_i + \Delta$.

Λήμμα 2.2 *Ισχύει ότι:*

(1) *για κάθε* $j = m - n + 1, \ldots, m$, $r^f_j = r_i + \Delta$;

(2) *για κάθε* $j = 1, \ldots, m - n$, $r^f_j = r^{in}_j$.

Απόδειξη: Από την Παρατήρηση 2.2 έχουμε ότι $l^{(n)} = m - n$. Προφανώς, η εντολή `for` εγγυάται ότι, για κάθε $j = l^{(n)} + 1, \ldots, m$, είναι $r^f_j = total^{(n)}/count^{(n)}$. Συνεπώς, για κάθε $j = m-n+1, \ldots, m$, $r^f_j = total^{(n)}/count^{(n)}$. Η Παρατήρηση 2.4 υποδηλώνει ότι $total^{(n)}/count^{(n)} =$

$r_i + \Delta$. Επομένως, για κάθε $j = m-n+1, \ldots, m$, ισχύει ότι $r^f_j = r_i + \Delta$. Προφανώς, κανένα άλλο στοιχείο δεν τροποποιείται, έτσι ώστε για κάθε $j = 1, \ldots, m-n$ ισχύει ότι $r^f_j = r^{in}_j$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. ■

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας ότι το διάνυσμα εξόδου της συνάρτησης `IUpdate` επιφέρει τον "κορεσμό" του c, όπως χρειάζεται από τη συνθήκη (1) της `iupdate`.

Πρόταση 2.7 *Μετά από κάθε εκτέλεση της* `IUpdate` *ισχύει ότι* $\|\mathbf{r}^f\|_1 = c$.

Απόδειξη: Προφανώς,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}^f\|_1 &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{l^{(n)}} r^f_j + \sum_{\substack{j=l^{(n)}+1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m} r^f_j + r^f_{\widehat{i}} \\
&= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-n} r^f_j + \sum_{j=m-n+1}^{m} r^f_j + r^f_{\widehat{i}} \\
&\quad \text{(λόγω της Πρότασης 2.6)} \\
&= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-n} r^{in}_j + \sum_{j=m-n+1}^{m} total^{(n)}/count^{(n)} + total^{(n)}/count^{(n)} \\
&\quad \text{(λόγω του Λήμματος 2.2)} \\
&= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-n} r^{in}_j + (n+1)\, total^{(n)}/count^{(n)} \\
&= \sum_{\substack{i=j\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-n} r^{in}_j + (n+1)\, \frac{total^{(0)} + \sum_{j=l^{(n-1)}}^{m} r^{in}_j}{1+n} \\
&\quad \text{(λόγω της Παρατήρησης 2.2(1) and (3))} \\
&= \sum_{\substack{i=j\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-n} r^{in}_j + total^{(0)} + \sum_{j=l^{(n-1)}}^{m} r^{in}_j \\
&= \sum_{\substack{i=j\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-n} r^{in}_j + r_i + c - \|\mathbf{r}\|_1 + \sum_{j=l^{(n-1)}}^{m} r^{in}_j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-n} r_j^{in} + r_i + c - \sum_{j=1}^{m} r_j + \sum_{j=m-n+1}^{m} r_j^{in} \\
&\quad \text{(λόγω της Παρατήρησης 2.2(2))} \\
&= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\widehat{i}}}^{m-n} r_j^{in} + r_{\widehat{i}}^{in} + \sum_{j=m-n+1}^{m} r_j^{in} \\
&\quad \text{(εντολή (6) της IUpdate)} \\
&= \sum_{j=1}^{m-n} r_j^{in} + \sum_{j=m-n+1}^{m} r_j^{in} \\
&\quad \text{(λόγω της Πρότασης 2.6)} \\
&= \sum_{j=1}^{m} r_j^{in} \\
&= c \qquad\qquad \text{(λόγω της Παρατήρησης 2.1)},
\end{aligned}
$$

όπως απαιτείται. ■

Αποδεικνύουμε τώρα ότι το ζεύγος εξόδου $\langle \mathbf{r}^f, \Delta \rangle$ της `IUpdate` σέβεται τις υπόλοιπες τρεις συνθήκες που επιβάλει η συνάρτηση `iupdate`.

Πρόταση 2.8 *Ισχύει ότι:*

(1) $r_{\widehat{i}}^f = r_i + \Delta$;

(2) *για κάθε* $j \in [m]$, $j \neq i$, *αν* $r_j \leq r_i + \Delta$ *τότε* $r_{\widehat{j}}^f = r_j$;

(3) *για κάθε* $j \in [m]$, $j \neq i$, *αν* $r_j > r_i + \Delta$ *τότε* $r_{\widehat{j}}^f = r_i + \Delta$.

Απόδειξη: Ξεκινάμε με την απόδειξη του (1). Προφανώς, $r_{\widehat{i}}^f = total^{(n)}/count^{(n)}$ (εντολή 19 του κώδικα). Η Παρατήρηση 2.4 υποδηλώνει ότι $\Delta = total^{(n)}/count^{(n)} - r_i$, το οποίο συνεπάγεται ότι $r_{\widehat{i}}^f = r_i + \Delta$, όπως απαιτείται για τη συνθήκη (1).

Για να δείξουμε την (2), αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $j \in [m]$, $j \neq i$, το στοιχείο r_j μεταβάλλεται μόνο αν $r_j > r_i + \Delta$. Στην περίπτωση που $n = 0$, κανένα στοιχείο δεν τροποποιείται, έτσι ώστε η συνθήκη ισχύει τετριμμένα. Ας υποθέσουμε επομένως ότι $n > 0$. Από το Λήμμα 2.2 έχουμε ότι τα τροποποιημένα στοιχεία είναι τα n μεγαλύτερης τιμής στοιχεία του $\mathbf{r}^{in}$. Από την Παρατήρηση 2.3 ισχύει ότι, για κάθε $k = 0, \ldots, n-1$, $r^{in}_{l(k)} > total^{(k)}/count^{(k)}$. Η Παρατήρηση 2.5 εγγυάται ότι, για κάθε $k = 0, \ldots, n-1$, $total^{(k)}/count^{(k)} \leq total^{(n)}/count^{(n)}$, έτσι ώστε, για κάθε $k = 0, \ldots, n-1$, $r^{in}_{l(k)} > total^{(n)}/count^{(n)}$. Εφόσον $\Delta = total^{(n)}/count^{(n)} - r_i$, αυτό υποδηλώνει ότι, για κάθε $k = 0, \ldots, n-1$, ισχύει ότι $r^{in}_{l(k)} > r_i + \Delta$, όπως απαιτείται για την (2).

Αποδεικνύουμε τέλος τη συνθήκη (3). Προφανώς, για κάθε δείκτη $j \in [m]$, $j \neq i$, τέτοιο ώστε $r^f_j \neq r^{in}_j$, ισχύει ότι $r^f_j = r_i + \Delta$. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι *κάθε* στοιχείο r_j τέτοιο ώστε $r_j > r_i + \Delta$ ενημερώνεται. Στην περίπτωση που $n = 0$, δεν υπάρχει τέτοιο στοιχείο στο διάνυσμα $\mathbf{r}$, έτσι ώστε ο ισχυρισμός ισχύει τετριμμένα. Ας υποθέσουμε επομένως ότι $n > 0$. Θα αποδείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι ο ισχυρισμός (3) ισχύει. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος $j \in [m]$, $j \neq i$, τέτοιος ώστε $r_j > r_i + \Delta$ αλλά $r^f_{\widehat{j}} = r_j$. Εφόσον $r^f_{\widehat{j}} = r_j$, το Λήμμα 2.2 συνεπάγεται ότι $\widehat{j} \leq m - n$. Επιπλέον, για κάθε $k = j, \ldots, m-n$ έχουμε ότι $r^{in}_k = r^f_k$. Εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{r}^{in}$ είναι ταξινομημένο και $l^{(n)} = m - n$, αυτό υποδηλώνει ότι

$$r^{in}_{\widehat{k}} \leq r^{in}_{l(n)} .$$

Συνεπώς, ισχύει ότι $r^{in}_{l(n)} > r_i + \Delta$. Από την Παρατήρηση 2.4 ισχύει ότι $total^{(n)}/count^{(n)} = r_i + \Delta$, έτσι ώστε $r^{in}_{l(n)} > total^{(n)}/count^{(n)}$. Αυτό σημαίνει ότι η δεύτερη συνθήκη της `while` είναι αληθής για τον ακέραιο $l^{(n)} > 0$. Άτοπο. ∎

Οι Προτάσεις 2.7 και 2.8 υποδηλώνουν άμεσα ότι η συνάρτηση `IUpdate` υπολογίζει το ανασχηματιστικό διάνυσμα αυξήσεως, όπως υπαγορεύεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2 *Η συνάρτηση* `IUpdate` *υπολογίζει το ανασχηματιστικό διάνυσμα αυξήσεως.*

2.3.2 Κώδικας για τη Συνάρτηση Μειώσεως

Σε αυτήν την ενότητα αποδεικνύουμε ότι η `dupdate` είναι πράγματι συνάρτηση. Το Σχήμα 2-2 παρουσιάζει ψευδοκώδικα σε C για τη συνάρτηση `DUpdate`.

Μειώσεις συμβαίνουν μόνο αν το άθροισμα όλων των στοιχείων του $\mathbf{r}$ μετά την αύξηση του r_i κατά Δ είναι μεγαλύτερο από c (γραμμή 6 στον κώδικα). Η συνολική μείωση που πρέπει να

```
procedure DUpdate (real vector: r ∈ ℜ^m; integer: i ∈ [m]; reals: c, Δ)

sum := 0;
for   (j = 1; j ≤ m; j++) {
        r'_j := r_j;
        sum := sum + r_j;
}

 if  (sum > c) {
      decrease = Δ − (c − sum);
      portion = Δ − (c − sum);
      r'_i = r_i + Δ;
      sort(r');
      count := 1;
      l := m;
      while (l > 0 and r'_l − portion < r'_{l−1}) do begin
            decrease := decrease − count * (r'_l − r'_{l−1});
            count ++;
            l −−;
            portion = decrease/count;
      end


      for (j = m; j ≥ l; j −−)
          r'_j := r'_l − portion;

      B = r'_l − portion;
 }
```

Σχήμα 2-2: Η συνάρτηση DUpdate

πραγματοποιηθεί είναι Δ μείον τη"διαθέσιμη χωρητικότητα" του c (δηλαδή στην περίπτωση μας, $c - sum$). Η μεταβλητή *portion* εκφράζει το μέγεθος της μειώσεως ανά στοιχείο. Η `DUpdate` ξεκινά μειώνοντας το μέγιστο στοιχείο του διανύσματος $\mathbf{r}'$. Η συνθήκη (4) της `dupdate` υποδηλώνει ότι *για κάθε* $j \in [m]$, $j \neq i$, αν $r_j > B$ θα πρέπει να έχουμε τελικά $r'_j = B$. Επομένως, επιβάλλοντας τη συνολική αύξηση στο μέγιστο στοιχείο του $\mathbf{r}$ δεν εγγυώμαστε σωστή λύση.

Η συνάρτηση `DUpdate` λειτουργεί ως εξής. Υποθέτει αρχικά ότι η συνολική μείωση θα επιβληθεί στο m-οστό διατεταγμένο στοιχείο (δηλαδή στο μέγιστο στοιχείο) του $\mathbf{r}'$. Στην περίπτωση που η μειωμένη τιμή του στοιχείου αυτού είναι μικρότερη από την τιμή του $(m-1)$-οστού διατεταγμένου στοιχείου (δηλαδή του δεύτερου μεγαλύτερου στοιχείου) του διανύσματος, τότε τα δύο στοιχεία πρέπει να μοιραστούν τη μείωση. Συνεπώς, αντί να εφαρμόσουμε τη συνολική μείωση στο m-οστό διατεταγμένο στοιχείο, μειώνουμε την τιμή του, έτσι ώστε αυτή να ισούται με την τιμή του $(m-1)$-οστού διατεταγμένου στοιχείου. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται επαναληπτικά κατά τη διάρκεια κάθε επανάληψης της εντολής `while` (εντολή 11 στον κώδικα). Γενικά, στην $(m-k)$-οστή επανάληψη, υποτίθεται ότι κάθε ένα από τα στοιχεία $r'_{m-k+1}, \ldots, r'_m$ μειώνεται στην τιμή του r'_{m-k}, ενώ η συνολική τους μείωση μπορεί να μην είναι και πάλι αρκετή, το οποίο θα προκαλέσει όλα αυτά τα στοιχεία, καθώς επίσης και το r'_{m-k}, να μειωθούν περαιτέρω στην αμέσως επόμενη επανάληψη της `while`.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια την τυπική απόδειξη ότι η `DUpdate` τερματίζει και υπολογίζει το ανασχηματιστικό διάνυσμα μειώσεων.

Προκειμένου να απλοποιήσουμε την απόδειξη χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συμβολογραφία. Για κάθε $j \in [m]$, συμβολίζουμε με $\widehat{j}$ το δείκτη του στοιχείου του διανύσματος $\mathtt{sort}(\mathbf{r}')$ που αντιστοιχεί στο στοιχείο $r_j \in \mathbf{r}'$. Θέτουμε $r^{in}_{\widehat{i}} = r_i + \Delta$ και για κάθε $j \in [m]$, $j \neq i$, υποθέτουμε ότι $r^{in}_{\widehat{j}} = r_j$. Επίσης, έστω ότι $decrease^{(0)} = \Delta - (c - \|\mathbf{r}\|_1)$, $portion^{(0)} = \Delta - (c - \|\mathbf{r}\|_1)$, $count^{(0)} = 1$ και $l^{(0)} = m$. Συμβολίζουμε με $decrease^{(k)}$, $portion^{(k)}$, $count^{(k)}$ και $l^{(k)}$ τις τιμές των μεταβλητών *decrease*, *portion*, *count* και l, αντίστοιχα, μετά την k-οστή επανάληψη της `while`. Επίσης, συμβολίζουμε με $n \geq 0$ τον συνολικό αριθμό επαναλήψεων της `while`, που εκτελούνται κατά τη διάρκεια μιας οποιασδήποτε εκτέλεσης της συνάρτησης `DUpdate`. Επιπλέον, συμβολίζουμε με $\mathbf{r}^f$ το διάνυσμα εξόδου της `DUpdate`.

Το ακόλουθο θεώρημα υπαγορεύει ότι η `DUpdate` τερματίζει μετά από το πολύ $O(m \log m)$ βήματα. Η απόδειξη του θεωρήματος στηρίζεται σε αντίστοιχα επιχειρήματα με εκείνα που παρουσιάζονται στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.

Θεώρημα 2.3 *Η συνάρτηση* `DUpdate` *τερματίζει μετά από* $O(m \log m)$ *βήματα.*

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια μια σειρά προτάσεων και ισχυρισμών προκειμένου να αποδείξουμε ότι η `DUpdate` υπολογίζει το ανασχηματιστικό διάνυσμα μειώσεως. Ο πρώτος μας ισχυρισμός υποδηλώνει ότι $\|\mathbf{r}^{in}\|_1 = \|\mathbf{r}\|_1 + \Delta$. Προφανώς,

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{r}^{in}\|_1 &= \sum_{j=1}^{m} r_j^{in} \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \widehat{i}}}^{m} r_j^{in} + r_{\widehat{i}}^{in} \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} r_j + (r_i + \Delta) \\
&= \|\mathbf{r}\|_1 + \Delta \,.
\end{aligned}
$$

Επομένως,

Παρατήρηση 2.5 *Ισχύει ότι:*

$$
\|\mathbf{r}^{in}\|_1 = \|\mathbf{r}\|_1 + \Delta \,.
$$

Η ακόλουθη παρατήρηση είναι άμεση.

Παρατήρηση 2.6 *Για κάθε* $k \in [n]$,

(1) $count^{(k)} = count^{(k-1)} + 1 = k + 1$;

(2) $l^{(k)} = l^{(k-1)} - 1 = m - k$;

(3) $portion^{(k)} = decrease^{(k)} / count^{(k)}$.

Συνεχίζουμε με το ακόλουθο απλό λήμμα.

Λήμμα 2.3 *Ισχύει ότι:*

$$\begin{aligned} decrease^{(k)} &= decrease^{(0)} - \sum_{j=1}^{k} j * (r^{in}_{m-j+1} - r^{in}_{m-j}) \\ &= decrease^{(0)} - (\sum_{j=1}^{k} r^{in}_{m-j+1} - k * r^{in}_{m-k})\,. \end{aligned}$$

Απόδειξη: Προφανώς, για κάθε $k \in [n]$ ισχύει ότι

$$decrease^{(k)} = decrease^{(k-1)} - count^{(k-1)} * (r^{in}_{m-k+1} - r^{in}_{m-k})\,.$$

Από την Παρατήρηση 2.6(1) έχουμε ότι $count^{(k-1)} = k$, έτσι ώστε

$$decrease^{(k)} = decrease^{(k-1)} - k * (r^{in}_{m-k+1} - r^{in}_{m-k})\,.$$

Επιλύουμε την παραπάνω αναδρομική σχέση χρησιμοποιώντας την απλή επαναληπτική μέθοδο:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{k} j * (r^{in}_{m-j+1} - r^{in}_{m-j}) \\ = \; & (r^{in}_{m} - r^{in}_{m-1}) + 2\,(r^{in}_{m-1} - r^{in}_{m-2}) + \ldots + k\,(r^{in}_{m-k+1} - r^{in}_{m-k}) \\ = \; & r^{in}_{m} + (2\,r^{in}_{m-1} - r^{in}_{m-1}) + \ldots + (k\,r^{in}_{m-k+1} - (k-1)\,r^{in}_{m-k+1}) - k\,r^{in}_{m-k} \\ = \; & \sum_{j=1}^{k} r^{in}_{m-j+1} - k\,r^{in}_{m-k}\,, \end{aligned}$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} decrease^{(k)} &= decrease^{in} - \sum_{j=1}^{k} j * (r^{in}_{m-j+1} - r^{in}_{m-j}) \\ &= decrease^{in} - (\sum_{j=1}^{k} r^{in}_{m-j+1} - k * r^{in}_{m-k})\,, \end{aligned}$$

όπως απαιτείται. ∎

Συνεχίζουμε με την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 2.7 *Ισχύει ότι:*

$$B \quad = \quad r^{in}_{l(n)} + portion^{(n)} \,.$$

Το ακόλουθο λήμμα υποδηλώνει ότι κατά τη διάρκεια εκτέλεσης της `DUpdate`, μόνο τα $(n+1)$ μεγαλύτερα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{r}^{in}$ τροποποιούνται.

Λήμμα 2.4 *Ισχύει ότι:*

(1) *για κάθε* $j = m-n, \ldots, m$, $r^f_j = B$;

(2) *για κάθε* $j = 1, m-n-1$, $r^f_j = r^{in}_j$.

Απόδειξη: Από την Παρατήρηση 2.6 έχουμε ότι $l^{(n)} = m-n$. Προφανώς, η εντολή **`for`** (εντολή 19 στον κώδικα) υποδηλώνει ότι για κάθε $j = l^{(n)}, \ldots, m$ ισχύει ότι $r^f_j = r^{in}_{l(n)} + portion^{(n)}$. Συνεπώς, για κάθε $j = m-n, \ldots, m$, $r^f_j = r^{in}_{l(n)} + portion^{(n)}$. Από την Παρατήρηση 2.7 είναι $B = r^{in}_{l(n)} + portion^{(n)}$, έτσι ώστε, για κάθε $j = m-n+1, \ldots, m$, $r^f_j = B$. Επιπλέον, κανένα άλλο στοιχείο δεν τροποποιείται, έτσι ώστε, για κάθε $j = 1, \ldots, m-n-1$, ισχύει ότι $r^f_j = r^{in}_j$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. ■

Η ακόλουθη παρατήρηση είναι άμεση συνέπεια της δεύτερης συνθήκης της εντολής `while`.

Παρατήρηση 2.8 *Ισχύει ότι:*

(1) *για κάθε ακέραιο* $k = 0, \ldots, n-1$,

$$r^{in}_{l(k)} - portion^{(k)} \quad < \quad r^{in}_{l(k+1)} \,,$$

(2) $r^{in}_{l(n)} - portion^{(n)} \geq r^{in}_{l(n)-1}$.

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι η ποσότητα *portion* φθίνει κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε εκτέλεσης της `DUpdate`.

Πρόταση 2.9 *Εάν $n \neq 0$, για κάθε $k \in [n]$ ισχύει ότι*

$$portion^{(k)} \quad < \quad portion^{(k-1)} .$$

Απόδειξη: Από την Παρατήρηση 2.6 (3) έχουμε ότι

$$portion^{(k)} \quad = \quad \frac{decrease^{(k)}}{portion^{(k)}} ,$$

καθώς επίσης, $count^{(k)} = count^{(k-1)} + 1$. Το Λήμμα 2.3 υποδηλώνει ότι

$$decrease^{(k)} \quad = \quad decrease^{(k-1)} - count^{(k-1)} \, (r^{in}_{m-k+1} - r^{in}_{m-k}) .$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
portion^{(k)} \quad &= \quad \frac{decrease^{(k-1)} - count^{(k-1)}(r^{in}_{m-k+1} - r^{in}_{m-k})}{count^{(k-1)} + 1} \\
&< \quad \frac{decrease^{(k-1)} - count^{(k-1)}(r^{in}_{m-k+1} - r^{in}_{m-k})}{count^{(k-1)}} \\
&= \quad \frac{decrease^{(k-1)}}{count^{(k-1)}} - (r^{in}_{m-k+1} - r^{in}_{m-k}) \\
&\leq \quad \frac{decrease^{(k-1)}}{count^{(k-1)}} \\
&\quad\quad \text{(επειδή το διάνυσμα } \mathbf{r}^{in} \text{ είναι ταξινομημένο)} \\
&= \quad portion^{(k-1)} ,
\end{aligned}$$

όπως απαιτείται. ■

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι το διάνυσμα εξόδου της `DUpdate` επιφέρει "κορεσμό" στο c, όπως απαιτείται από την συνθήκη (1) της συνάρτησης `dupdate`.

Πρόταση 2.10 *Αν $n \neq 0$, ισχύει ότι*

$$\|\mathbf{r}^f\|_1 \quad = \quad c .$$

Απόδειξη: Προφανώς,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}^f\|_1 &= \sum_{j=1}^{m-n-1} r_j^f + \sum_{j=m-n}^{m} r_j^f \\
&= \sum_{j=1}^{m-n-1} r_j^{in} + \sum_{j=m-n}^{m} B \\
&\quad \text{(λόγω Λήμματος 2.4)} \\
&= \sum_{j=1}^{m-n-1} r_j^{in} + \sum_{j=m-n}^{m} (r_{l(n)}^{in} - portion^{(n)}) \\
&\quad \text{(λόγω Παρατήρησης 2.7)} \\
&= \sum_{j=1}^{m-n-1} r_j^{in} + (1+n)\left(r_{l(n)}^{in} - \frac{decrease^{(n)}}{count^{(n)}}\right) \\
&\quad \text{(λόγω Παρατήρησης 2.6 (1) και (3))} \\
&= \sum_{j=1}^{m-n-1} r_j^{in} + (1+n)\, r_{l(n)}^{in} - decrease^{(n)} \\
&= \sum_{j=1}^{m-n-1} r_j^{in} + (1+n)\, r_{l(n)}^{in} - (decrease^{(0)} + n\, r_{m-n}^{in} - \sum_{j=1}^{n} r_{m-j+1}^{in}) \\
&\quad \text{(λόγω Λήμματος 2.3)} \\
&= \sum_{j=1}^{m-n-1} r_j^{in} + (1+n)\, r_{m-n}^{in} - (decrease^{(0)} + n\, r_{m-n}^{in} - \sum_{j=1}^{n} r_{m-j+1}^{in}) \\
&\quad \text{(λόγω Παρατήρησης 2.6 (1))} \\
&= \sum_{j=1}^{m-n-1} r_j^{in} + r_{m-n}^{in} - decrease^{(0)} + \sum_{j=m-n+1}^{m} r_j^{in}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} r_j^{in} - decrease^{(0)} \\
&= \|\mathbf{r}\|_1 + \Delta - (\Delta + c - \|\mathbf{r}\|_1) \\
&\quad \text{(λόγω Παρατήρησης 2.5)} \\
&= c\,,
\end{aligned}$$

όπως απαιτείται. ∎

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι το ζεύγος εξόδου $\langle \mathbf{r}^f, B\rangle$ της `DUpdate` ικανοποιεί τις συνθήκες (3) και (4) της συνάρτησης `dupdate`.

Ισχυρισμός 2.1 *Για κάθε $j \in [m]$ τέτοιο ώστε $j \neq i$, ισχύει ότι*

(1) *αν $r_j \leq B$ τότε $r^f_{\hat{j}} = r_j$;*

(2) *αν $r_j > B$ τότε $r^f_{\hat{j}} = B$.*

Απόδειξη: Ξεκινάμε με την απόδειξη του (1). Αρκεί να αποδείξουμε ότι, για κάθε $j \in [m]$ τέτοιο ώστε $j \neq i$, αν $r_j \neq r^f_{\hat{j}}$ τότε $r_j > B$. Το Λήμμα 2.8 υποδηλώνει ότι, για κάθε $k = 0, \ldots, n-1$, ισχύει ότι $r^{in}_{l(k)} - portion^{(k)} < r^{in}_{l(k+1)}$. Από την Παρατήρηση 2.6 (1) έχουμε ότι, για κάθε $k = 0, \ldots, n-1$, $l^{(k)} = m - k$, έτσι ώστε, για κάθε $k = 0, \ldots, n-1$, ισχύει ότι $r^{in}_{m-k} - portion^{(k)} < r^{in}_{m-k-1}$. Εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{r}^{in}$ είναι ταξινομημένο, για κάθε $k = 0, \ldots, n$, είναι $r^{in}_{m-k-1} \leq r^{in}_{m-k}$, έτσι ώστε, για κάθε $k = 0, \ldots, n$, έχουμε $r^{in}_{m-k} > r^{in}_{m-n+1} - portion^{(n-1)}$. Από το Λήμμα 2.9 έχουμε ότι $portion^{(n)} \leq portion^{(n-1)}$, έτσι ώστε, για κάθε $k = 0, \ldots, n$, ισχύει ότι $r^{in}_{m-k} > r^{in}_{m-n+1} - portion^{(n)}$. Επίσης, εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{r}^{in}$ είναι ταξινομημένο, ισχύει ότι $r^{in}_{m-n+1} \geq r^{in}_{m-n}$, το οποίο συνεπάγεται ότι, για κάθε $k = 0, \ldots, n$, $r^{in}_{m-k} > r^{in}_{m-n} - portion^{(n)}$. Από την Παρατήρηση 2.6 (2) ισχύει ότι $l^{(n)} = m - n$. Επομένως, για κάθε $k = 0, \ldots, n$, είναι $r^{in}_{m-k} > r^{in}_{l(n)} - portion^{(n)}$. Η Παρατήρηση 2.7 υποδηλώνει ότι $B = r^{in}_{l(n)} - portion^{(n)}$, έτσι ώστε, για κάθε $k = 0, \ldots, n$, $r^{in}_{m-k} > B$. Από το Λήμμα 2.4 συνεπάγεται ότι τα τροποποιήμενα στοιχεία είναι εκείνα με δείκτες στο σύνολο $\{m-n, \ldots, m\}$, το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη του (1).

Συνεχίζουμε να αποδείξουμε το (2). Από το Λήμμα 2.4 έχουμε ότι, για κάθε τροποποιημένο στοιχείο $j \in [m]$, ισχύει πως $r^f_j = B$. Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε ότι *κάθε* τέτοιο στοιχείο μειώνεται. Συνεχίζουμε εξετάζοντας τις ακόλουθες περιπτώσεις για το n. Υποθέτουμε πρώτα ότι $n = 0$. Από το Λήμμα 2.7 είναι $B = r^{in}_m - portion^{(0)}$. Επομένως, $r^{in}_m > B$. Προφανώς, $r^{in}_{m-1} \leq r^{in}_m - portion^{(0)}$, έτσι ώστε $r^{in}_{m-1} \leq B$. Εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{r}^{in}$ είναι ταξινομημένο, για κάθε $j \in [m-1]$ ισχύει ότι $r^{in}_j \leq r_{j+1}$. Επομένως, για κάθε $j \in [m-1]$, ισχύει ότι $r^{in}_j \leq B$, όπως απαιτείται.

Υποθέτουμε τώρα ότι $n > 0$. Θα αποδείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι ο ισχυρισμός ισχύει. Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι υπάρχει κάποιο $j \in [m]$,

$j \neq i$, τέτοιο ώστε $r_j > B$ και $r^f_{\widehat{j}} = r_j$. Αφού $r_j > B$, είναι $r_j > r^{in}_{l(n)} - portion^{(n)}$. Επειδή $r^f_{\widehat{j}} = r_j$, από το Λήμμα 2.4 συνεπάγεται ότι $\widehat{j} < l^{(n)}$. Εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{r}^{in}$ είναι ταξινομημένο ισχύει ότι $r_j \leq r_{l(n)-1}$, έτσι ώστε $r^{in}_{l(n)} - portion^{(n)} < r_{l(n)-1}$. Από την Παρατήρηση 2.6(2) ισχύει ότι $r_{l(n)-1} = r_{l(n-1)}$. Συνεπώς, $r^{in}_{l(n)} - portion^{(n)} < r_{l(n-1)}$. Άτοπο, αφού έρχεται σε αντίφαση με τον ορισμό του n. ∎

Αν για κάποια τετράδα $\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta \rangle$ ισχύει ότι Δ είναι η ανασχηματιστική αύξηση για την τριάδα $\langle \mathbf{r}, i, c \rangle$, τότε η Πρόταση 2.3 υποδηλώνει ότι $B \geq r_i + \Delta$. Συνεπάγεται επομένως ότι $r^f_{\widehat{i}} = r^{in}_{\widehat{i}} = r_i + \Delta$. Άρα, οι Προτάσεις 2.10 και 2.1 άμεσα υποδηλώνουν ότι, σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση `DUpdate` υπολογίζει το ανασχηματιστικό διάνυσμα μειώσεως, όπως υπαγορεύεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4 *Αν* $\Delta \geq 0$ *είναι η ανασχηματιστική αύξηση για την τριάδα* $\langle \mathbf{r}, i, c \rangle$, *η συνάρτηση* `DUpdate`$(\langle \mathbf{r}, i, c, \Delta \rangle)$ *υπολογίζει το ανασχηματιστικό διάνυσμα μειώσεως.*

2.4 Το Γενικευμένο Πρόβλημα Επιλογής Κουπονιών

Η παρουσίαση είναι παραπλήσια με εκείνη που παρουσιάζεται στο [58, Ενότητα 3.6], όπου το αυθεντικό πρόβλημα επιλογής κουπονιών [65] αναλύεται (ενδιαφέρουσες παραλλαγές του προβλήματος παρουσιάζονται επίσης στο [37, Κεφάλαιο 3, Ασκήσεις 21-25]).

Στο γενικευμένο πρόβλημα επιλογής κουπονιών υπάρχουν m διαφορετικά κουπόνια, που συμβολίζονται $1, \ldots, m$. Σε κάθε πείραμα ένα κουπόνι επιλέγεται τυχαία. Η πιθανότητα κάποιο επιλεγόμενο κουπόνι να είναι τύπου i είναι $p_i > 0$, $1 \leq i \leq m$, όπου $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Συμβολίζουμε με $p_{min} = \min_{1 \leq i \leq m} p_i$. Προφανώς, $0 < p_{min} \leq 1/m$. Οι τυχαίες επιλογές των κουπονιών στα πειράματα γίνονται ανεξάρτητα. Στο κλασικό *πρόβλημα επιλογής κουπονιών* [65], $p_1 = \ldots = p_m = 1/m$. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον απαιτούμενο αριθμό πειραμάτων, προκειμένου να επιλεγεί τουλάχιστον ένα κουπόνι κάθε είδους. Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.11 $\mathcal{E}(X) \leq (\ln m + \gamma)/p_{min}$

Απόδειξη: Η ανάλυση που παρουσιάζεται εδώ είναι γενίκευση της ανάλυσης του κλασικού προβλήματος επιλογής κουπονιών που περιγράφεται στο [58, Ενότητα 3.6].

Έστω ότι η ακολουθία πειραμάτων είναι $c_1, c_2, \ldots, c_X$, όπου κάθε $c_i \in [m]$ συμβολίζει τον τύπο κουπονιού που επιλέγεται στο i-οστό πείραμα. Ονομάζουμε το i-οστό πείραμα *επιτυχές* εάν είτε $i = 1$ ή ο τύπος c_i δεν έχει επιλεχθεί σε κανένα από τα $i-1$ πρώτα πειράματα.

Διαιρούμε την ακολουθία $c_1, c_2, \ldots, c_X$ σε *τμήματα,* όπου το τμήμα i, $0 \leq i \leq m-1$, ξεκινά με το πείραμα που ακολουθεί το i-οστό επιτυχές πείραμα και τελειώνει με το πρώτο πείραμα στο οποίο επιτυγχάνεται η $(i+1)$-οστή επιτυχία. Για κάθε i, $0 \leq i \leq m-1$, συμβολίζουμε με X_i την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των πειραμάτων στο διάστημα i. Συνεπώς, $X = \sum_{i=0}^{m-1} X_i$.

Συμβολίζουμε με ρ_i την πιθανότητα επιτυχίας σε οποιοδήποτε πείραμα του τμήματος i, δηλαδή το ρ_i είναι η πιθανότητα επιλογής ενός από τα $(m-i)$ διαφορετικά κουπόνια που απολείπονται, τα οποία συμβολίζουμε $c_1, c_2, \ldots, c_{m-i}$. Τέτοιου είδους κουπόνια επιλέγονται με πιθανότητες $p_{c_1}, p_{c_2}, \ldots, p_{c_{m-i}}$, αντίστοιχα. Προφανώς, $\rho_i = p_{c_1} + p_{c_2} + \ldots + p_{c_{m-i}} \geq (m-i)\, p_{min}$.

Η τυχαία μεταβλητή X_i ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο ρ_i ([58, Ενότητα 3.6.1]). Επομένως, $\mathcal{E}(X_i) = 1/\rho_i \leq 1/((m-i)p_{min})$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X) &= \mathcal{E}(\sum_{i=0}^{m-1} X_i) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}(X_i) && \text{(λόγω γραμμικότητας του τελεστή μέσης τιμής)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{(m-i)\, p_{min}} \\
&= \frac{1}{p_{min}} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m-i} \\
&= \frac{1}{p_{min}} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} \\
&= \frac{1}{p_{min}} H_m \\
&\approx \frac{1}{p_{min}} (\ln m + \gamma),
\end{aligned}$$

όπως απαιτείται. ■

Κεφάλαιο 3

Μοντέλο

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε το μοντέλο στο οποίο εργαζόμαστε. Πολλοί από τους ορισμούς μας τυποποιούν και ραφινάρουν αντίστοιχους ορισμούς που παρουσιάζονται στα [1] και [6, Κεφάλαιο 6].

Η οργάνωση του κεφαλαίου αυτού είναι η ακόλουθη. Οι βασικές οντότητες του δικτύου, των συνόδων και των ρυθμών μετάδοσής τους εισάγονται στην Ενότητα 3.1. Θέματα δικαιοσύνης περιγράφονται στην Ενότητα 3.2. Οι έννοιες των ενεργών συνόδων και των ενεργών ακμών περιγράφονται στην Ενότητα 3.3. Η Ενότητα 3.4 παρουσιάζει τις έννοιες του ισομεριδίου και του ελάχιστου ισομεριδίου, που χρησιμοποιούνται στην Ενότητα 4.1 για να οριστούν οι ακμές συμφόρησης και οι ακμές ελάχιστου ισομεριδίου. Η Ενότητα 3.5 ορίζει τις πράξεις προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης των συνόδων. Οι δρομολογητές, οι απενεργοποιητές και οι αλγόριθμοι εισάγονται στην Ενότητα 3.6. Η έννοια μιας εκτέλεσης στο δίκτυο περιγράφεται στην Ενότητα 3.7, ενώ η Ενότητα 3.8 ορίζει την πολυπλοκότητα σύγκλισης.

3.1 Δίκτυο, Σύνοδοι και Διανύσματα Ρυθμών Μετάδοσης

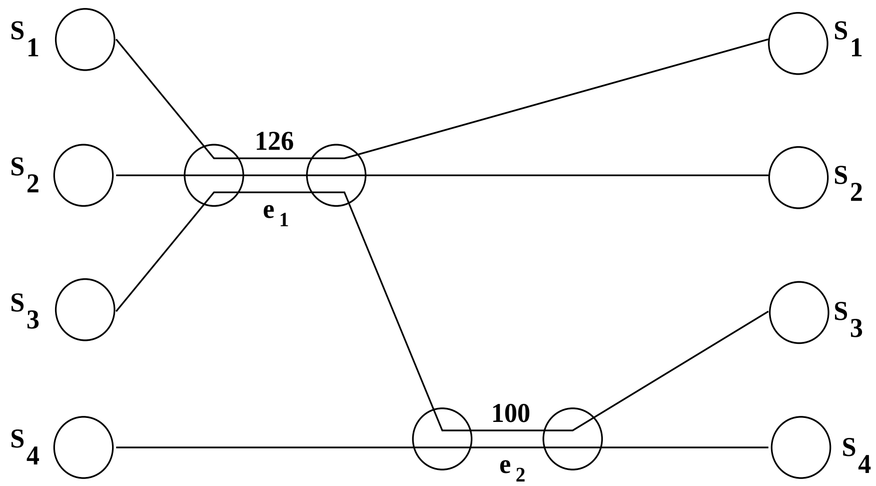
Κάθε *δίκτυο επικοινωνίας* παριστάνεται από έναν κατευθυνόμενο γράφο $G = (V, E)$, όπου κάθε κόμβος $v \in V$ συμβολίζει έναν κόμβο του δικτύου και κάθε ακμή $e \in E$ παριστάνει ένα δικτυακό σύνδεσμο. Με κάθε ακμή $e \in E$ συσχετίζουμε έναν πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του μηδενός που ονομάζεται *χωρητικότητα* και συμβολίζεται $cap(e)$.

Θεωρούμε ότι στο δίκτυο υπάρχει ένας σταθερός αριθμός συνόδων που για κάθε μία η σύνδεση έχει αποκατασταθεί με μεταγωγή κυκλώματος (virtual circuit routing). Μια *σύνοδος* είναι μια ακολουθία από ακμές που δημιουργούν ένα απλό μονοπάτι στον G μεταξύ ενός κόμβου *πηγή* και ενός κόμβου *προορισμού*. Η σύνοδος μοντελοποιεί μια διασύνδεση μεταξύ ενός κόμβου πηγής και ενός κόμβου προορισμού με μεταγωγή κυκλώματος. Στο δίκτυο υπάρχουν n σύνοδοι, $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ όπου $n \geq 2$. Για κάθε ακμή $e \in E$, συμβολίζουμε με $sessions(e)$ το σύνολο των συνόδων που διατρέχουν (ή χρησιμοποιούν) την e. Για κάθε σύνολο από συνόδους $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, συμβολίζουμε με $\mathcal{S}' \mid e$ το σύνολο $\mathcal{S}' \cap sessions(e)$. Συχνά, θα συμβολίζουμε μία σύνοδο είτε με το σύμβολο S_i ή μόνο με το δείκτη i. Επίσης, μερικές φορές θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό S_i μιας συνόδου ως το σύνολο των ακμών που χρησιμοποιούνται από τη σύνοδο και επομένως θα γράφουμε $e \in S_i$, για κάθε ακμή e την οποία διατρέχει το S_i.

Παράδειγμα 3.1 *Το Σχήμα 3-1 απεικονίζει ένα απλό δίκτυο με τέσσερις συνόδους S_1, S_2, S_3 και S_4 και δύο ακμές e_1 και e_2 με χωρητικότητες $cap(e_1) = 126$ και $cap(e_2) = 100$, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι οι σύνοδοι S_1 και S_2 χρησιμοποιούν μόνο την ακμή e_1. Η σύνοδος S_4 χρησιμοποιεί μόνο την ακμή e_2, ενώ η σύνοδος S_3 χρησιμοποιεί και τις δύο ακμές.*

Ορίζουμε τη σχέση *διαμοιρασμού-ακμής* πάνω στο $\mathcal{S}$, την οποία συμβολίζουμε με $\|_{\mathcal{S}}$, ως εξής. Για κάθε ζεύγος συνόδων $S_i, S_j \in \mathcal{S}$, ισχύει ότι $S_i \|_{\mathcal{S}} S_j$, αν υπάρχει ακμή $e \in E$ τέτοια ώστε: $S_i \in sessions(e)$ και $S_j \in sessions(e)$. Μιλώντας άτυπα, $S_i \|_{\mathcal{S}} S_j$ εάν οι σύνοδοι S_i και S_j μοιράζονται μια ακμή. Η σχέση $\|_{\mathcal{S}}$ είναι ανακλαστική και συμμετρική. Το κλειστό σύνολο ως προς τη μεταβατική ιδιότητα της σχέσης $\|_{\mathcal{S}}$, το οποίο συμβολίζουμε $\|^{\star}_{\mathcal{S}}$, είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{S}$, και διαμερίζει το $\mathcal{S}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας που συμβολίζονται με $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_c$ και ονομάζονται *συμπλέγματα συνόδων* ή απλά *συμπλέγματα*, όπου $1 \leq c \leq n$ και $|\mathcal{S}_1| + \ldots + |\mathcal{S}_c| = n$. Για όλους τους δείκτες j και k που είναι τέτοιοι ώστε $1 \leq j, k \leq c$ και $j \neq k$ ισχύει ότι $\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k = \emptyset$, ενώ $\cup_{1 \leq j \leq c} \mathcal{S}_j = \mathcal{S}$. Συμβολίζουμε με $d = \max\{|\mathcal{S}_1|, \ldots, |\mathcal{S}_c|\}$, δηλαδή το d είναι ο μέγιστος πληθικός αριθμός κάθε συμπλέγματος συνόδων. Ονομάζουμε το d *εξάρτηση μεταξύ των συνόδων*. Προφανώς, $1 \leq d \leq n$.

Για κάθε ακολουθία σ από δείκτες συνόδων και για κάθε σύνολο από συνόδους $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$,



Σχήμα 3-1: Ένα απλό δίκτυο

συμβολίζουμε με $\sigma \mid \mathcal{S}'$ τον *περιορισμό* της σ σε δείκτες συνόδων στο $\mathcal{S}'$. Συμβολίζουμε με $\sigma \uparrow \mathcal{S}'$ το μικρότερο πρόθεμα της $\sigma \mid \mathcal{S}'$, αν υπάρχει, το οποίο περιέχει όλους τους δείκτες των συνόδων στο $\mathcal{S}'$, με τη σειρά που εμφανίζονται στο πρόθεμα αυτό της $\sigma \mid \mathcal{S}'$ και χωρίς επαναλήψεις. Αν τέτοιο πρόθεμα δεν υπάρχει, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\sigma \mid \mathcal{S}'$ για να παραστήσουμε το $\sigma \mid \mathcal{S}'$, χωρίς ωστόσο επαναλήψεις και διατηρώντας τη διάταξη των δεικτών στη σ. Συμβολίζουμε με $\sigma \downarrow \mathcal{S}'$ το υπολείπον τμήμα της $\sigma \mid \mathcal{S}'$.

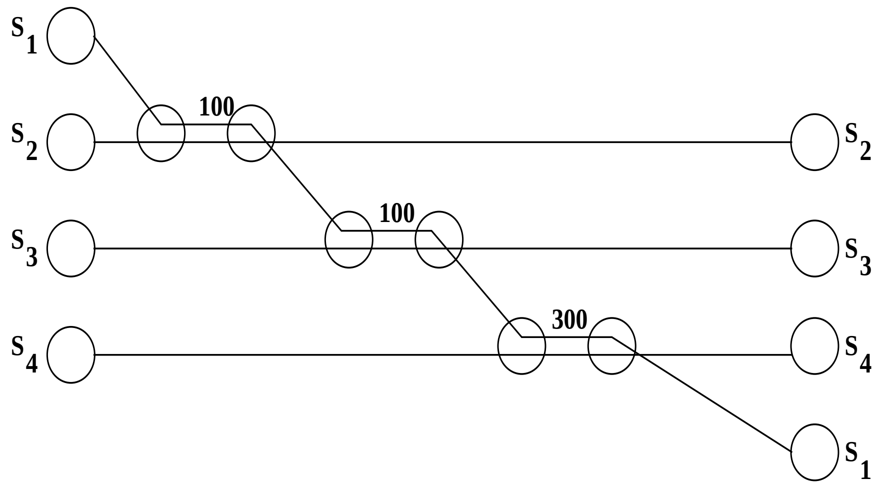
Σε κάθε σύνοδο S έχει αποδοθεί ένας *ρυθμός μετάδοσης* (rate) ή ένα *εύρος ζώνης* (bandwidth), το οποίο είναι ένας μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός που συμβολίζεται με $r(S)$. Ένα *διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης* είναι ένα διάνυσμα $\mathbf{r} = \langle r(S_1), r(S_2), \ldots, r(S_n)\rangle^{\mathrm{T}}$. Για κάθε ακμή e, συμβολίζουμε με $\mathbf{r} \mid e$ τον περιορισμό του $\mathbf{r}$ στα στοιχεία εκείνα που αντιστοιχούν σε συνόδους που χρησιμοποιούν την e. Η *συνθήκη χωρητικότητας* απαιτεί ότι για κάθε ακμή $e \in E$, $\|\mathbf{r} \mid e\|_1 \leq cap(e)$, δηλαδή, το άθροισμα των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων που χρησιμοποιούν μια ακμή δεν πρέπει να υπερβαίνει τη χωρητικότητα της ακμής. Ένα *εφικτό διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης* σέβεται τη συνθήκη χωρητικότητας. Μια ακμή e λέγεται κορεσμένη όταν $\|\mathbf{r} \mid e\|_1 = cap(e)$.

3.2 Δικαιοσύνη

Ένα από τα δυσκολότερα θέματα που σχετίζεται με τον έλεγχο ροής είναι η δίκαιη μεταχείριση των χρηστών, όταν μέρος της κυκλοφορίας δεν μπορεί να εξυπηρετηθεί από το δίκτυο. Διαισθητικά, η έννοια της δικαιοσύνης έχει συνδεθεί με την ισοδύναμη μεταχείριση των χρηστών. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι σύνοδοι θα πρέπει να χρησιμοποιούν εξίσου τους δικτυακούς πόρους. Ωστόσο, προκύπτει ότι ο ορισμός αυτός δεν είναι κατάλληλος στη θεωρία ελέγχου ροής, όπου είναι σημαντικοί και άλλοι παράμετροι βελτιστοποίησης, όπως η μεγιστοποιήση των πόρων του δικτύου. Το κριτήριο δικαιοσύνης που έχει γίνει κοινά αποδεκτό, ονομάζεται *δικαιοσύνη μεγίστου-ελαχίστου* ([6, 33, 40]) και βασίζεται στην ιδέα της μεγιστοποίησης της χρήσης του δικτύου από χρήστες με ελάχιστο μερίδιο εύρους ζώνης. Σε κάθε βήμα, η κατανομή εύρους ζώνης στους χρήστες με ελάχιστο μερίδιο μεγιστοποιείται. Μιλώντας άτυπα, με βάση το κριτήριο δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου, δε θα πρέπει να είναι δυνατό να αυξηθεί έστω και ελάχιστα ο ρυθμός μετάδοσης μιας συνόδου, αν αυτό προκαλεί τη μείωση του ρυθμού μετάδοσης μιας άλλης συνόδου με μικρότερο ή ίσο ρυθμό μετάδοσης.

Ένα *κορεσμένο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης* είναι ένα εφικτό διάνυσμα στο οποίο κάθε αύξηση του ρυθμού μετάδοσης μιας συνόδου, που δεν καθιστά το διάνυσμα μη εφικτό, συνεπάγεται τη μείωση του ρυθμού μετάδοσης κάποιας άλλης συνόδου. Ένα *δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου* είναι ένα κορεσμένο διάνυσμα στο οποίο η αύξηση του ρυθμού μετάδοσης οποιασδήποτε συνόδου που δεν καθιστά το διάνυσμα μη εφικτό, συνεπάγεται τη μείωση ενός μικρότερου ρυθμού μετάδοσης μιας άλλης συνόδου. Με άλλα λόγια, κάθε αύξηση οποιουδήποτε στοιχείου του διανύσματος που διατηρεί την ιδιότητα εφικτότητας του διανύσματος, επιφέρει μείωση σε κάποιο άλλο στοιχείο του διανύσματος που αντιστοιχεί σε σύνοδο με μικρότερο ρυθμό μετάδοσης. Επομένως, ένα δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου είναι πάντα κορεσμένο, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα. Προφανώς, όλα τα στοιχεία ενός δίκαιου διανύσματος μεγίστου-ελαχίστου είναι μεγαλύτερα του μηδενός, αφού όλες οι χωρητικότητες των ακμών είναι μεγαλύτερες του μηδενός.

Παράδειγμα 3.2 *Στο Σχήμα 3-2 απεικονίζεται ένα δίκτυο με τέσσερις συνόδους* S_1*,* S_2*,* S_3 *και* S_4*, και τρεις ακμές* e_1*,* e_2 *και* e_3 *με* $cap(e_1) = 100$*,* $cap(e_2) = 100$ *και* $cap(e_3) = 300$*,*



Σχήμα 3-2: Θέματα δικαιοσύνης στην κατανομή εύρους ζώνης σε ένα δίκτυο με τέσσερις συνόδους και τρεις συνδέσμους.

αντίστοιχα. Με βάση το διαισθητικό ορισμό δικαιοσύνης και οι τέσσερις σύνοδοι θα πρέπει να αποκτήσουν τον ίδιο ρυθμό μετάδοσης.

Προφανώς, αφού οι σύνοδοι S_1 *και* S_2 *μοιράζονται την ακμή* e_1*, κάθε μια από αυτές θα πρέπει να αποκτήσει ρυθμό μετάδοσης* 50*, προκειμένου να μην παραβιαστεί η συνθήκη χωρητικότητας της ακμής. Ωστόσο, αν κατανείμουμε ρυθμό μετάδοσης* 50 *σε κάθε σύνοδο, θα παραμείνει αδέσμευτο εύρος ζώνης* 200 *μονάδων στην ακμή* e_3*. Αυτό είναι σαφώς ανεπιθύμητο, αφού ένας βασικός στόχος των αλγορίθμων ελέγχου ροής είναι η μεγιστοποίηση της χρήσης των πόρων του δικτύου.*

Το δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου στο παράδειγμα αυτό είναι το εφικτό διάνυσμα $\langle 50, 50, 50, 250 \rangle$*. Παρατηρούμε ότι η σύνοδος* S_4 *αποκτά πολύ μεγαλύτερο ρυθμό μετάδοσης από ότι οι υπόλοιπες τρεις συνόδοι. Επιπλέον, καμιά σύνοδος δεν μπορεί να αυξήσει το ρυθμό μετάδοσής της, χωρίς είτε να παραβιάσει την εφικτότητα του διανύσματος, είτε να μειώσει το ρυθμό μετάδοσης μιας άλλης συνόδου με μικρότερο ή ίσο ρυθμό μετάδοσης.*

3.3 Ενεργές Συνδέσεις, Ενεργές Ακμές και Κορεσμένες Ακμές Μέγιστου Ρυθμού Μετάδοσης

Το δίκτυο μοντελοποιείται από μια μηχανή (πιθανώς απείρων) καταστάσεων. Κάθε κατάσταση Q του δικτύου αποτελείται από ένα *εφικτό διάνυσμα ρυθμών* $\mathbf{r} \in \Re^n$ και ένα *ενεργό σύνολο* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$, το οποίο περιέχει όλες τις *ενεργές συνόδους στην κατάσταση* Q. Επομένως, $Q = \langle \mathbf{r}, \mathcal{A} \rangle$. Συχνά θα χρησιμοποιούμε το Q σαν δείκτη στο διάνυσμα $\mathbf{r}$ και στο σύνολο $\mathcal{A}$, προκειμένου να δηλώσουμε την κατάσταση στην οποία αναφερόμαστε. Διαισθητικά, μια ενεργή σύνοδος είναι μια σύνοδος της οποίας ο ρυθμός μετάδοσης δεν έχει αποκτήσει την τελική τιμή (η οποία πρέπει να σέβεται τη συνθήκη δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου). Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}_Q$ το σύνολο $\mathcal{S} \setminus \mathcal{A}_Q$. Συνεπώς, το $\mathcal{D}_Q$ είναι το *σύνολο των ανενεργών συνόδων στην κατάσταση* Q, των συνόδων εκείνων δηλαδή που ο τελικός τους ρυθμός μετάδοσης έχει αποφασιστεί και δεν αλλάζει. Τέτοιες σύνοδοι συχνά ονομάζονται και *απενεργοποιημένες*. Ένα σύμπλεγμα $\mathcal{S}_j$ ονομάζεται *ενεργό σύμπλεγμα στην κατάσταση* Q αν περιέχει τουλάχιστον μια ενεργή σύνοδο. Διαφορετικά, το $\mathcal{S}_j$ ονομάζεται ανενεργό. Συχνά θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q}$ και $\mathbf{r}_{\mathcal{D}_Q}$ για να δηλώσουμε τον περιορισμό του διανύσματος $\mathbf{r}_Q$ σε ενεργές ή ανενεργές συνόδους αντίστοιχα.

Στην *αρχική κατάσταση* είναι $Q^{in} = \langle \mathbf{r}^{in}, \mathcal{A}^{in} \rangle$, όπου $\mathbf{r}^{in} = \mathbf{0}^{(n)}$ και $\mathcal{A}^{in} = \mathcal{S}$. Άρα, όλες οι σύνοδοι είναι αρχικά ενεργές και όλοι οι ρυθμοί μετάδοσης είναι μηδέν. Μια κατάσταση Q είναι *τελική* αν $\mathcal{A}_Q = \emptyset$, δηλαδή σε μια τελική κατάσταση οι τελικοί ρυθμοί μετάδοσης όλων των συνόδων έχουν αποφασιστεί.

Το σύνολο των *ενεργών ακμών που ανήκουν στο σύμπλεγμα* $\mathcal{S}_j$ *στην κατάσταση* Q συμβολίζεται $AE_Q(\mathcal{S}_j)$ και ορίζεται να είναι $AE_Q(\mathcal{S}_j) = \bigcup_{S \in \mathcal{S}_j \cap \mathcal{A}_Q} \{e \mid e \in S\}$. Συνεπώς, το σύνολο $AE_Q(\mathcal{S}_j)$ περιέχει όλες τις ακμές του δικτύου που χρησιμοποιούνται από τουλάχιστον μία ενεργή σύνοδο στην κατάσταση Q, η οποία ανήκει στο σύμπλεγμα $\mathcal{S}_j$. Το *σύνολο των ενεργών ακμών του δικτύου στην κατάσταση* Q συμβολίζεται AE_Q και ορίζεται να είναι $AE_Q = \bigcup_{1 \leq j \leq c} AE_Q(\mathcal{S}_j)$. Συνεπώς, το σύνολο AE_Q περιέχει όλες τις ακμές του δικτύου που χρησιμοποιούνται από τουλάχιστον μια ενεργή σύνοδος στην κατάσταση Q.

Για κάθε ακμή $e \in E$ και για κάθε κατάσταση Q, ορίζουμε την *ελεύθερη χωρητικότητα της* *e στην κατάσταση Q* να είναι η διαφορά του συνολικού εύρους ζώνης που έχει αποδοθεί στις συνόδους που χρησιμοποιούν την e στην κατάσταση Q από τη χωρητικότητα της ακμής. Η ελεύθερη χωρητικότητα της e στην κατάσταση Q συμβολίζεται $residual_Q(e)$ και ισχύει προφανώς:

$$residual_Q(e) \quad = \quad cap(e) - \sum_{S \in sessions(e)} r_Q(S)\,.$$

Για κάθε ακμή $e \in E$ και για κάθε κατάσταση Q, η *παροχημένη χωρητικότητα της e στην κατάσταση Q* [1, Ενότητα 2.1] ορίζεται να είναι το συνολικό εύρος ζώνης που έχει ήδη αποδοθεί στις ανενεργές συνόδους που χρησιμοποιούν την ακμή και συμβολίζεται $allot_Q(e)$. Προφανώς,

$$allot_Q(e) \quad = \quad \sum_{S \in \mathcal{D}_Q|e} r_Q(S)\,.$$

Μια ακμή e ονομάζεται κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για τη σύνοδο S στην κατάσταση Q αν ισχύουν τα εξής:

(1) για κάθε σύνοδο $i \in sessions(e)$, $r_Q(S) \geq r_Q(S_i)$,

(2) η ακμή e είναι κορεσμένη στην κατάσταση Q.

Παράδειγμα 3.3 *Αναφερόμαστε στο δίκτυο του Σχήματος 3-1 και θεωρούμε οποιαδήποτε κατάσταση Q τέτοια ώστε $\mathbf{r}_Q = \langle 30, 30, 50, 50\rangle^{(T)}$. Επιχειρηματολογούμε ότι υπάρχει μια κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για τη σύνοδο S_3 στην κατάσταση Q. Αφού η σύνοδος S_3 χρησιμοποιεί μόνο τις ακμές e_1 και e_2, μόνο αυτές οι ακμές είναι υποψήφιες κορεσμένες ακμές μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για τη σύνοδο S_3 στην κατάσταση Q.*

Αρχικά εξετάζουμε την ακμή e_1. Προφανώς, $\sum_{i \in sessions(e_1)} r_Q(S_i) = r_Q(S_1) + r_Q(S_2) + r_Q(S_3) = 30 + 30 + 50 = 110$, ενώ $cap(e_1) = 126$. Συνεπώς, η ακμή e_1 δεν είναι κορεσμένη στην κατάσταση Q και επομένως δεν είναι κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για τη σύνοδο S_3 στην κατάσταση Q.

Στη συνέχεια εξετάζουμε την ακμή e_2. Προφανώς, $\sum_{i \in sessions(e_2)} r_Q(S_i) = r_Q(S_3) + r_Q(S_4) = 50 + 50 = 100$, ενώ $cap(e_2) = 100$. Συνεπώς, η ακμή e_2 είναι κορεσμένη στην *κατάσταση Q. Επιπρόσθετα, $r_Q(S_3) = 50$, ενώ $r_Q(S_4) = 50$. Άρα, $r_Q(S_3) \geq r_Q(S_4)$. Επομένως, η ακμή e_2 είναι κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για τη σύνοδο S_3 στην κατάσταση Q.*

Ενθαρρύνουμε τον αναγνώστη να αποδείξει ότι η ακμή e_2 είναι επίσης, κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για τη σύνοδο S_4 στην Q, ενώ δεν υπάρχουν κορεσμένες ακμές μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για τις συνόδους S_1 και S_2 στην Q.

3.4 Ισομερίδιο και Ελάχιστο Ισομερίδιο

Για κάθε κατάσταση Q, έστω ότι η e είναι μια ακμή στο AE_Q, έτσι ώστε $|\mathcal{A}_Q \mid e| > 0$. Το *ισομερίδιο της e στην κατάσταση Q* [1, Ενότητα 2.1], το οποίο συμβολίζεται $FS_Q(e)$, ορίζεται να είναι

$$FS_Q(e) \quad = \quad \frac{cap(e) - allot_Q(e)}{|\mathcal{A}_Q \mid e|}.$$

Μιλώντας άτυπα, το $FS_Q(e)$ είναι το μέρος της χωρητικότητας της ακμής e που δεν έχει ακόμη αποδοθεί σε ανενεργές συνόδους στην κατάσταση Q και το οποίο αντιστοιχεί σε κάθε σύνοδο.

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια απλούς ισχυρισμούς που είναι χρήσιμοι στα επόμενα κεφάλαια.

Λήμμα 3.1 *Έστω ακέραιος $l_0 \geq 0$ και ακμή e που είναι ενεργή στην κατάσταση Q_{l_0}. Τότε, για κάθε ακέραιο $l \geq l_0$, ισχύουν τα εξής:*

(1) *αν για κάθε $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, $r_{Q_l}(S_i) = FS_{Q_{l_0}}(e)$, τότε η ακμή e είναι κορεσμένη στην Q_l,*

(2) *αν υπάρχει δείκτης $i_0 \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$ τέτοιος ώστε $r_{Q_l}(S_{i_0}) < FS_{Q_{l_0}}(e)$, ενώ για κάθε $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, $i \neq i_0$, $r_{Q_l}(S_i) \leq FS_{Q_{l_0}}(e)$, τότε η ακμή e δεν είναι κορεσμένη στην Q_l,*

(3) *δεν υπάρχει δείκτης $i_0 \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$ τέτοιος ώστε $r_{Q_l}(S_{i_0}) > FS_{Q_{l_0}}(e)$, ενώ για κάθε $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, $i \neq i_0$ να ισχύει ότι $r_{Q_l}(S_i) \geq FS_{Q_{l_0}}(e)$.*

Απόδειξη: Ξεκινάμε με την απόδειξη του (1). Εξ ορισμού του $FS_{Q_{l_0}}(e)$ έχουμε ότι:

$$FS_{Q_{l_0}}(e) = \frac{cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e)}{|\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e|}.$$

Από υπόθεση, για κάθε $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$ ισχύει ότι $r_{Q_l}(S_i) = FS_{Q_{l_0}}(e)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e} r_{Q_l}(S_i)) &= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e} FS_{Q_{l_0}}(e) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e} \frac{cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e)}{|\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e|} \\
&= |\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e| \cdot \frac{cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e)}{|\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e|} \\
&= cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e).
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} r_{Q_l}(S_i) &= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e} r_{Q_l}(S_i) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_l}(S_i) \\
&\quad (\text{επειδή } \mathcal{A}_{Q_l} \mid e \subseteq \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e) \\
&= cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_l}(S_i). \\
&= cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e) - (allot_{Q_l}(e) - allot_{Q_{l_0}}(e)) \\
&\quad (\text{λόγω Ισχυρισμού 3.2}) \\
&= cap(e) - allot_{Q_l}(e),
\end{aligned}$$

όπως απαιτείται για να αποδειχτεί ότι η ακμή e είναι κορεσμένη στην κατάσταση Q_l.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη του (2). Προφανώς,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} r_{Q_l}(S_i) &= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e} r_{Q_l}(S_i) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_l}(S_i) \\
&\quad (\text{επειδή } \mathcal{A}_{Q_l} \mid e \subseteq \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} r_{Q_l}(S_i) - (allot_{Q_l}(e) - allot_{Q_{l_0}}(e)) \\
&\quad \text{(λόγω Ισχυρισμού 3.2)} \\
&= r_{Q_l}(S_{i_0}) + \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e, i \neq i_0} r_{Q_l}(S_i) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
&< FS_{Q_{l_0}}(e) + \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e, i \neq i_0} r_{Q_l}(S_i) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
&\quad \text{(επειδή } r_{Q_l}(S_{i_0}) < FS_{Q_{l_0}}(e)) \\
&\leq FS_{Q_{l_0}}(e) + \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e, i \neq i_0} FS_{Q_{l_0}}(e) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
&\quad \text{(επειδή } r_{Q_l}(S_i) \leq FS_{Q_{l_0}}(e) \text{ για } i \neq i_0) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} FS_{Q_{l_0}}(e) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e)) \\
&= |\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e| \, FS_{Q_{l_0}}(e) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
&= cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
&\quad \text{(εξ ορισμού του ισομεριδίου)} \\
&= cap(e) - allot_{Q_l}(e)\,,
\end{aligned}
$$

όπως απαιτείται για να αποδειχτεί ότι η ακμή e *δεν* είναι κορεσμένη στην κατάσταση Q_l.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη του (3). Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι υπάρχει κάποια σύνοδος $i_0 \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$ τέτοια ώστε $r_{Q_l}(S_{i_0}) > FS_{Q_{l_0}}(e)$, ενώ για κάθε $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, $i \neq i_0$ ισχύει ότι $r_{Q_l}(S_i) \geq FS_{Q_{l_0}}(e)$. Είναι σαφές ότι:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l} | e} r_{Q_l}(S_i) &= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} r_{Q_l}(S_i) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) | e} r_{Q_l}(S_i) \\
&\quad \text{(επειδή } \mathcal{A}_{Q_l} \mid e \subseteq \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} r_{Q_l}(S_i) - (allot_{Q_l}(e) - allot_{Q_{l_0}}(e)) \\
&\quad \text{(λόγω Ισχυρισμού 3.2)} \\
&= r_{Q_l}(S_{i_0}) + \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e, i \neq i_0} r_{Q_l}(S_i) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&> FS_{Q_{l_0}}(e) + \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e, i \neq i_0} r_{Q_l}(S_i) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
&\quad (\text{επειδή } r_{Q_l}(S_{i_0}) > FS_{Q_{l_0}}(e)) \\
&\geq FS_{Q_{l_0}}(e) + \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e, i \neq i_0} FS_{Q_{l_0}}(e) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
&\quad (\text{επειδή } r_{Q_l}(S_i) \geq FS_{Q_{l_0}}(e) \text{ for } i \neq i_0) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e} FS_{Q_{l_0}}(e) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e)) \\
&= |\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e| \, FS_{Q_{l_0}}(e) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
&= cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
&\quad (\text{εξ ορισμού του ισομεριδίου}) \\
&= cap(e) - allot_{Q_l}(e)\,,
\end{aligned}
$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η ακμή e παραβιάζει τη συνθήκη χωρητικότητας στην κατάσταση Q_l, που είναι άτοπο. Σε αυτό το σημείο η απόδειξη του (3) έχει ολοκληρωθεί. ■

Για κάθε $i \in [n]$, το *ελάχιστο ισομερίδιο της συνόδου* S_i *στην κατάσταση* Q [1, Ορισμός 3.6], το οποίο συμβολίζεται $MFS_Q(S_i)$, ορίζεται να είναι

$$MFS_Q(S_i) \;=\; \min_{e \in S_i} FS_Q(e)\,.$$

Επομένως, $MFS_Q(S_i)$ είναι το ελάχιστο ισομερίδιο στην κατάσταση Q κάθε ακμής που χρησιμοποιείται από τη σύνοδο S_i.

3.5 Πράξεις

Μιλώντας άτυπα, μια πράξη καθορίζει μια "διαδικασία" για τον υπολογισμό νέων ρυθμών μετάδοσης για ένα σύνολο από συνόδους, βασισμένη στους παλιούς ρυθμούς μετάδοσης. Τυπικά, μια *πράξη* είναι μια συνάρτηση `operation` που δέχεται ως είσοδο ένα δείκτη συνόδου i και μια κατάσταση Q και επιστρέφει ως έξοδο νέους ρυθμούς μετάδοσης για όλες τις συνόδους j για τις οποίες ισχύει ότι $S_i \cap S_j \neq \emptyset$. Επιπρόσθετα, το διάνυσμα εξόδου $\mathbf{r}'$ =`operation`(i, Q) σέβεται τη συνθήκη χωρητικότητας, δηλαδή είναι εφικτό.

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σε πράξεις που χρησιμοποιούν "τοπική πληροφορία" ως προς τη σύνοδο S_i (δείτε π.χ. [41, Ενότητα IV]). Τοπικές πληροφορίες σε κάποια σύνοδο θεωρούνται τόσο οι χωρητικότητες των ακμών που χρησιμοποιεί όσο και οι τρέχοντες ρυθμοί μετάδοσης των συνόδων που χρησιμοποιούν αυτές τις ακμές.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι μεγάλο μέρος της διατριβής αυτής δεν ασχολείται με τους μηχανισμούς μέσω των οποίων οι παραπάνω πληροφορίες γίνονται διαθέσιμες στη σύνοδο. Κάθε δικτυακός σύνδεσμος ενδεχομένως γνωρίζει τον τρόπο πληροφόρησης όλων των συνόδων που τον χρησιμοποιούν σχετικά με τέτοιου είδους χρήσιμες πληροφορίες. Εναλλακτικά, ο υπολογισμός και η συλλογή των πληροφοριών μπορεί να γίνεται με τη χρήση μηνυμάτων ελέγχου που κινούνται κατα μήκος της διαδρομής μιας συνόδου. Τέτοιου είδους μηνύματα χρησιμοποιούνται ευρύτατα στα μοντέρνα δικτυακά πρωτόκολλα και ονομάζονται μηνύματα *Διαχείρισης Πόρων* (δείτε, π.χ., [40, Ενότητα IV] ή [1, Ενότητα 1] για αντίστοιχες συζητήσεις). Τα πλήρη χαρακτηριστικά των μηχανισμών συλλογής και μεταβίβασης πληροφοριών ελέγχου είναι συνήθως μέρος της σχεδίασης και της υλοποίησης κατανεμημένων αλγορίθμων οι οποίοι εκτελούν την εν λόγω λειτουργία για να απονείμουν ρυθμούς μετάδοσης στις συνόδους. Ένας τέτοιος αλγόριθμος παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 9.

Μια οποιαδήποτε πράξη `operation` είναι *συντηρητική* αν, πηγαίνοντας από το διάνυσμα $\mathbf{r}_Q$ στο $\mathbf{r}'$, κανένα στοιχείο δε μειώνεται, διαφορετικά η πράξη `operation` ονομάζεται *οπτιμιστική*.

3.6 Δρομολογητές, Απενεργοποιητές και Αλγόριθμοι

Σε αυτή την ενότητα εισάγουμε τις έννοιες των δρομολογητών και των απενεργοποιητών αντίστοιχα. Οι δρομολογητές περιγράφονται στην Ενότητα 3.6.1, ενώ οι απενεργοποιητές παρουσιάζονται στην Ενότητα 3.6.2. Η Ενότητα 3.6.3 παρουσιάζει την έννοια των αλγορίθμων.

3.6.1 Δρομολογητές

Μελετάμε ντετερμινιστικούς και πιθανοτικούς δρομολογητές.

Ντετερμινιστικοί Δρομολογητές

Ένας *ντετερμινιστικός δρομολογητής* είναι μια συνάρτηση Sched που απεικονίζει μια τριάδα που αποτελείται από ένα ζεύγος $\langle G, \mathcal{S} \rangle$ ενός δικτύου G και ενός συνόλου συνόδων πάνω στο δίκτυο G, μια κατάσταση Q, και ένα δείκτη κατάστασης $l \geq 1$ σε ένα δείκτη συνόδου $i = \mathsf{Sched}(\langle\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q, l\rangle)$.

Ένας δρομολογητής Sched λειτουργεί *χωρίς γνώση* αν για όλα τα ζεύγη $\langle G, \mathcal{S} \rangle$ και $\langle \widehat{G}, \widehat{\mathcal{S}} \rangle$, όλες τις καταστάσεις Q και $\widehat{Q}$, και για κάθε ακέραιο $l \geq 1$ ισχύει ότι $\mathsf{Sched}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q, l) = \mathsf{Sched}(\langle \widehat{G}, \widehat{\mathcal{S}}\rangle, \widehat{Q}, l)$. Μιλώντας άτυπα, ένας δρομολογητής χωρίς γνώση αποφασίζει ποια σύνοδος θα δρομολογηθεί στη συνέχεια χωρίς να έχει οποιαδήποτε πληροφορία για την τοπολογία του δικτύου ή για τους ρυθμούς μετάδοσης και την κατάσταση (ενεργή η όχι) των συνόδων. Επομένως, ένας δρομολογητής χωρίς γνώση μπορεί να περιγραφεί από μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ακολουθία $\mathsf{Sched} = i_1, i_2, \ldots$, όπου για κάθε $l \geq 1$, $i_l \in [n]$. Ένα παράδειγμα δρομολογητή χωρίς γνώση είναι ο δρομολογητής ανελκυστήρα (elevator):

$$\mathsf{ElevSched} \;=\; 1,2,\ldots,n,n,\ldots,2,1,1,2,\ldots,n,n,\ldots,2,1,\ldots,1,2,\ldots,n,n,\ldots,2,1,\ldots.$$

Ένας δρομολογητής Sched λειτουργεί με *μερική γνώση* αν για όλα τα ζεύγη $\langle G, \mathcal{S} \rangle$ και $\langle \widehat{G}, \widehat{\mathcal{S}} \rangle$, για κάθε κατάσταση Q, και για κάθε δείκτη κατάστασης $l \geq 1$ ισχύει ότι

$$\mathsf{Sched}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q, l) \;=\; \mathsf{Sched}(\langle \widehat{G}, \widehat{\mathcal{S}}\rangle, Q, l)\,.$$

Μιλώντας άτυπα, ένας δρομολογητής με μερική γνώση δεν χρησιμοποιεί καμιά πληροφορία για την τοπολογία του δικτύου στην επιλογή της συνόδου που θα δρομολογηθεί στη συνέχεια, αλλά μπορεί να γνωρίζει τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων. Επομένως, ένας δρομολογητής Sched με μερική γνώση μπορεί να περιγραφεί με μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ακολουθία από συναρτήσεις Sched_l, μια για κάθε ακέραιο $l \geq 1$, όπου κάθε συνάρτηση απεικονίζει μια κατάσταση Q σε ένα δείκτη συνόδου $i = \mathsf{Sched}_l(Q)$.

Ένα παράδειγμα δρομολογητή με μερική γνώση είναι ο δρομολογητής GlobalMinSched, ο οποίος έχει προταθεί από τους Afek *et al.* [1, Ενότητα 4]. Για το δρομολογητή αυτόν, η συνάρτηση $\mathsf{GlobalMinSched}_l(Q)$ επιστρέφει τον δείκτη της συνόδου με το *μικρότερο* ρυθμό μετάδοσης στην κατάσταση Q.

Παρατηρούμε ότι ένας δρομολογητής χωρίς γνώση είναι και δρομολογητής με μερική γνώση, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Ένας δρομολογητής με *πλήρη γνώση* χρησιμοποιεί πλήρη γνώση, τόσο της τοπολογίας του δικτύου όσο και των ρυθμών μετάδοσης και της κατάστασης των συνόδων, προκειμένου να αποφασίσει τη σύνοδο που θα δρομολογηθεί στη συνέχεια.

Πιθανοτικοί Δρομολογητές

Ένας *πιθανοτικός δρομολογητής* είναι μια συνάρτηση Sched που απεικονίζει μια τριάδα η οποία αποτελείται από ένα ζεύγος $\langle G, \mathcal{S} \rangle$ ενός δικτύου G και ενός συνόλου από συνόδους $\mathcal{S}$ πάνω στο G, μια κατάσταση Q, και ένα δείκτη κατάστασης $l \geq 1$ σε μια (διακριτή) κατανομή πιθανοτήτων $f = \mathsf{Sched}(\langle G, \mathcal{S} \rangle, Q, l)$, η οποία ορίζεται πάνω στο $\mathcal{S}$. Μιλώντας άτυπα, ένας πιθανοτικός δρομολογητής επιλέγει τη σύνοδο που θα δρομολογηθεί στη συνέχεια προκειμένου να αυξηθεί ο ρυθμός μετάδοσής της, με βάση την κατανομή πιθανοτήτων που ακολουθεί.

Η έννοια του δρομολογητή χωρίς γνώση μπορεί να επεκτεθεί σε πιθανοτικούς δρομολογητές με προφανές τρόπο. Ένας δρομολογητής Sched λειτουργεί *χωρίς γνώση* αν για όλα τα ζεύγη $\langle G, \mathcal{S} \rangle$ και $\langle \widehat{G}, \widehat{\mathcal{S}} \rangle$, όλες τις καταστάσεις Q και $\widehat{Q}$, και για κάθε ακέραιο $l \geq 1$ ισχύει ότι $\mathsf{Sched}(\langle G, \mathcal{S} \rangle, Q, l) = \mathsf{Sched}(\langle \widehat{G}, \widehat{\mathcal{S}} \rangle, \widehat{Q}, l)$. Μιλώντας άτυπα, ένας πιθανοτικός δρομολογητής χωρίς γνώση δεν έχει καμιά πληροφορία ούτε για το δίκτυο, ούτε για τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων, όταν αποφασίζει τις πιθανότητες δρομολόγησης των συνόδων. Επομένως, κάθε πιθανοτικός δρομολογητής χωρίς γνώση μπορεί να περιγραφεί με μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ακολουθία $\mathsf{Sched} = f_1, f_2, \ldots$, όπου για κάθε $l \geq 1$, η f_l είναι μια κατανομή πιθανοτήτων πάνω στο $\mathcal{S}$. Η επέκταση τώρα των δρομολογητών με μερική γνώση και εκείνων με πλήρη γνώση στην περίπτωση πιθανοτικών δρομολογητών μπορεί να γίνει με προφανή τρόπο.

3.6.2 Απενεργοποιητές

Ένας *απενεργοποιητής* [1] είναι μια συνάρτηση Term που απεικονίζει ένα ζεύγος $\langle G, \mathcal{S} \rangle$ ενός δικτύου G και ενός συνόλου από συνόδους $\mathcal{S}$ πάνω στο G, και μια κατάσταση Q σε ένα σύνολο από συνόδους $\mathcal{T} = \mathsf{Term}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q))$ τέτοια ώστε $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}_Q$. Διαισθητικά, κάθε απενεργοποιητής Term αποφασίζει σε ποιες συνόδους μεταξύ εκείνων που είναι ακόμη ενεργές έχει αποδοθεί ο τελικός ρυθμός μετάδοσης τους (και άρα για τον αλγόριθμο ελέγχου ροής οι σύνοδοι αυτοί έχουν απενεργοποιηθεί ή "τερματιστεί"). Προς χάριν απλότητος, θα παραλείπουμε συχνά την παράμετρο $\langle G, \mathcal{S}\rangle$ του Term, εάν η αναφορά της είναι προφανής από τα συμφραζόμενα. Αν ισχύει ότι $S \in \mathsf{Term}(Q)$, λέμε ότι η σύνοδος S *απενεργοποιείται στην κατάσταση* Q (δείτε, π.χ., Ενότητα 3.7).

3.6.3 Αλγόριθμοι

Ένας αλγόριθμος Alg είναι μια τριάδα Alg $= \langle$Sched, operation, Term$\rangle$. Η εξειδίκευση των πράξεων σε συντηρητικές και οπτιμιστικές οδηγεί σε μια αντίστοιχη κατάταξη των αλγορίθμων σε συντηρητικούς και οπτιμιστικούς αντίστοιχα κατά προφανή τρόπο.

Ένας αλγόριθμος ονομάζεται *δίκαιος* αν το διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης εξόδου του είναι το δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου.

Η ακόλουθη πρόταση, που έχει αποδειχθεί από τον Hayden [36], δηλώνει ότι ένας αλγόριθμος είναι δίκαιος αν και μόνο αν σε κάθε τελική του κατάσταση υπάρχει μια κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για κάθε σύνοδο που υπάρχει στο δίκτυο. Στη συνέχεια επαναποδεικνύουμε την πρόταση.

Πρόταση 3.1 (Hayden [36]) *Ένας αλγόριθμος* Alg *είναι δίκαιος αν και μόνο αν σε οποιαδήποτε τελική κατάσταση Q του* Alg*, για κάθε σύνοδο S, υπάρχει μια κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για την S στην κατάσταση Q.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε αρχικά ότι ο Alg είναι ένας δίκαιος αλγόριθμος και έστω ότι η Q είναι μια τελική κατάσταση. Προφανώς, το διάνυσμα $\mathbf{r}_Q$ είναι ένα δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο, προκειμένου να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει σύνοδος για την οποία να μην υπάρχει κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης στην Q. Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι υπάρχει κάποια σύνοδος $S \in \mathcal{S}$ για την οποία δεν υπάρχει κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης στην Q. Έστω ότι $e \in S$ είναι μια αυθαίρετη ακμή. Τότε, είτε $\mathit{residual}_Q(e) > 0$ ή υπάρχει κάποια σύνοδος

$S' \in sessions(e)$ τέτοια ώστε $r_Q(S') > r_Q(S)$. Στην περίπτωση που $residual_Q(e) > 0$, ο ρυθμός μετάδοσης της S μπορεί να αυξηθεί κατά $residual_Q(e)$. Στην δεύτερη περίπτωση, ο $r_Q(S)$ μπορεί να αυξηθεί σε μια νέα τιμή $r'_Q(S)$, μειώνοντας το ρυθμό μετάδοσης της συνόδου S' επίσης στην τιμή $r'_Q(S)$. Είναι σαφές ότι μια τέτοια αύξηση δεν παραβιάζει την εφικτότητα του διανύσματος ρυθμών μετάδοσης και δεν προκαλεί τη μείωση του ρυθμού μετάδοσης οποιασδήποτε συνόδου με ρυθμό μετάδοσης μικρότερο ή ίσο από εκείνον της S. Αφού η ακμή e είναι αυθαίρετη μια τέτοια αύξηση μπορεί να πραγματοποιηθεί πάνω σε κάθε ακμή που χρησιμοποιεί η σύνοδος. Αυτό έρχεται σε σύγκρουση με τον ορισμό του δίκαιου διανύσματος μεγίστου-ελαχίστου και είναι επομένως άτοπο.

Υποθέτουμε τώρα ότι για κάποια τελική κατάσταση Q του αλγορίθμου Alg ισχύουν τα ακόλουθα για το $\mathbf{r}_Q$: για κάθε σύνοδο S υπάρχει μια κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για την S στην κατάσταση Q. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο για να αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμος είναι δίκαιος. Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι το διάνυσμα $\mathbf{r}_Q$ *δεν* είναι δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου. Εξ ορισμού του δίκαιου διανύσματος μεγίστου-ελαχίστου, υπάρχει κάποια σύνοδος S_i της οποίας είναι δυνατό να αυξηθεί ο ρυθμός μετάδοσης $r_Q(S_i)$, διατηρώντας πάντοτε την εφικτότητα του διανύσματος, χωρίς να μειωθεί ο ρυθμός μετάδοσης $r_Q(S_j)$ για οποιαδήποτε άλλη σύνοδο S_j τέτοια ώστε $r_Q(S_j) \leq r_Q(S_i)$.

Επομένως, ας θεωρήσουμε μια αύξηση στον $r_Q(S_i)$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο αποδεικνύοντας ότι είναι απαραίτητο να συμβεί μείωση στο ρυθμό μετάδοσης $r_Q(S_j)$, για κάποια σύνοδο S_j τέτοια ώστε $r_Q(S_j) \leq r_Q(S_i)$.

Από υπόθεση ισχύει ότι υπάρχει μια κορεσμένη ακμή e μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για τη σύνοδο S_i στην κατάσταση Q. Εφόσον η e είναι κορεσμένη στην Q, ενώ ταυτόχρονα είναι δυνατή μια αύξηση στον $r_Q(S_i)$, θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μια σύνοδος S_j, διαφορετική από την S_i, η οποία χρησιμοποιεί την e και της οποίας ο ρυθμός μετάδοσης θα μειωθεί προκειμένου να διατηρηθεί η εφικτότητα του διανύσματος (δηλαδή η συνθήκη χωρητικότητας στην ακμή e). Όμως, εφόσον η ακμή e είναι μια κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για τη σύνοδο S_i στην κατάσταση Q και η σύνοδος S_j χρησιμοποιεί την ακμή e ισχύει ότι $r_Q(S_j) \leq r_Q(S_i)$. Άτοπο. ■

3.7 Εκτελέσεις

Μοντελοποιούμε έναν υπολογισμό που “διαχειρίζεται” τους ρυθμούς μετάδοσης και την κατάσταση των συνόδων που υπάρχουν στο δίκτυο, σαν μια ακολουθία από πράξεις, κάθε μια από τις οποίες αλλάζει το ρυθμό μετάδοσης της συνόδου προς δρομολόγηση και ενδεχομένως και άλλων συνόδων με τις οποίες αυτή μοιράζεται ακμές. Τυπικά, μια *εκτέλεση του* Alg *πάνω σε ένα δίκτυο G στο οποίο υπάρχει ένα σύνολο από συνόδους $\mathcal{S}$* είναι μια (ενδεχομένως άπειρη) ακολουθία από εναλλασσόμενες καταστάσεις και δείκτες συνόδων $\alpha = Q_0, i_1, Q_1, \ldots, i_l, Q_l, \ldots$, που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

(1) $Q_0 = Q^{in}$ και $\mathcal{A}_{Q_0} = \mathcal{S}$,

(2) για κάθε ακέραιο $l \geq 1$, $i_l = \mathsf{Sched}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q_{l-1}, l-1)$,

(3) για κάθε ακέραιο $l \geq 1$, αν $i_l \in \mathcal{D}_{Q_l}$, τότε $\mathbf{r}_{Q_l} = \mathbf{r}_{Q_{l-1}}$ και $\mathcal{A}_{Q_{l+1}} = \mathcal{A}_{Q_l}$, διαφορετικά ισχύουν τα ακόλουθα:

   (a) $\mathbf{r}_{Q_l} := \mathtt{operation}(i_l, Q_{l-1})$,

   (b) $\mathcal{A}_{Q_{l+1}} = \mathcal{A}_{Q_l} \setminus \mathsf{Term}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q_l)$.

Δίνουμε στη συνέχεια μια μη αυστηρή περιγραφή του παραπάνω ορισμού. Η συνθήκη (1) βεβαιώνει ότι η αρχική κατάσταση της α ταυτίζεται με την αρχική κατάσταση Q^{in}, καθώς και ότι δεν προκαλούνται απενεργοποιήσεις συνόδων στην αρχική κατάσταση. Η συνθήκη (2) εγγυάται ότι οι δείκτες συνόδων στην α καθορίζονται από το δρομολογητή Sched. Η συνθήκη (3) καθορίζει πώς οι ρυθμοί μετάδοσης και οι καταστάσεις των συνόδων αλλάζουν από τη μια κατάσταση του δικτύου στην άλλη. Αν η σύνοδος προς δρομολόγηση είναι απενεργοποιημένη δεν συμβαίνει καμιά αλλαγή. Διαφορετικά, οι νέοι ρυθμοί μετάδοσης καθορίζονται από την πράξη `operation` του αλγορίθμου (συνθήκη (3/a), ενώ η συνθήκη (3/b) ασχολείται με κάθε δυνατή απενεργοποίηση συνόδων που μπορεί να συμβεί στην τρέχουσα κατάσταση με βάση τον Term. Για κάθε ακέραιο $l \geq 1$, θα λέμε ότι η *σύνοδος i_l δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση Q_l στην εκτέλεση α.*

Διατυπώνουμε στη συνέχεια μια άμεση συνέπεια των ορισμών της παροχημένης χωρητικότητας και της εκτέλεσης.

Ισχυρισμός 3.1 *Για κάθε ακέραιο $l \geq 1$ και για κάθε ακμή $e \in E$,*

$$allot_{Q_l}(e) \quad = \quad allot_{Q_{l-1}}(e) + \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_{l-1}}(S_i)\,.$$

Αποδεικνύουμε τέλος ένα παρόμοια απλό γεγονός που θα μας είναι χρήσιμο στις μετέπειτα αποδείξεις.

Ισχυρισμός 3.2 *Για όλους τους ακεραίους l_0 και l με $0 \leq l_0 < l$, και για κάθε ακμή $e \in E$ ισχύει ότι*

$$\sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_{l_0}}(S_i) \quad = \quad allot_{Q_l}(e) - allot_{Q_{l_0}}(e)\,.$$

Απόδειξη: Προφανώς,

$$\begin{aligned} i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e \quad &\Leftrightarrow \quad i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e \text{ και } i \notin \mathcal{A}_{Q_l} \mid e \\ &\Leftrightarrow \quad i \notin \overline{\mathcal{A}_{Q_{l_0}}} \mid e \text{ και } i \in \overline{\mathcal{A}_{Q_l}} \mid e \\ &\Leftrightarrow \quad i \notin \mathcal{D}_{Q_{l_0}} \mid e \text{ και } i \in \mathcal{D}_{Q_l} \mid e \\ &\Leftrightarrow \quad i \in (\mathcal{D}_{Q_l} \setminus \mathcal{D}_{Q_{l_0}}) \mid e\,. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_l}(S_i) \quad &= \quad \sum_{i \in (\mathcal{D}_{Q_l} \setminus \mathcal{D}_{Q_{l_0}})|e} r_{Q_l}(S_i) \\ &= \quad \sum_{i \in \mathcal{D}_{Q_l}|e} r_{Q_l}(S_i) - \sum_{i \in \mathcal{D}_{Q_{l_0}}|e} r_{Q_l}(S_i) \\ &\qquad (\text{επειδή } \mathcal{D}_{Q_{l_0}} \subseteq \mathcal{D}_{Q_l}) \\ &= \quad allot_{Q_l}(e) - allot_{Q_{l_0}}(e) \\ &\qquad (\text{εξ ορισμού της παροχημένης χωρητικότητας})\,, \end{aligned}$$

όπως απαιτείται. ■

Κάθε κατάσταση Q_l της α, $l \geq 0$, ονομάζεται *προσεγγίσιμη κατάσταση στην εκτέλεση* α. Για όλες τις προσεγγίσιμες καταστάσεις Q_l και $Q_{l'}$ σε μια εκτέλεση α, γράφουμε $Q_l \xrightarrow{\alpha} Q_{l'}$ αν $l < l'$, δηλαδή $Q_l \xrightarrow{\alpha} Q_{l'}$ αν η κατάσταση Q_l προηγείται της $Q_{l'}$ στην εκτέλεση α. Για κάθε προσεγγίσιμη κατάσταση Q σε μια άπειρη εκτέλεση α, συμβολίζουμε με $\overrightarrow{Q}$ την αμέσως επόμενη κατάσταση της Q στην εκτέλεση α και με $\overleftarrow{Q}$ την αμέσως προηγούμενη κατάσταση της Q στην εκτέλεση α.

Εφόσον δεν είναι δυνατόν να άλλαξουν ούτε οι ρυθμοί μετάδοσης, ούτε οι καταστάσεις των συνόδων αφότου προσεγγιστεί μια κατάσταση Q τέτοια ώστε $\mathcal{D}_Q = \mathcal{S}$ σε μια εκτέλεση α, όποτε στη συνέχεια αναφερόμαστε σε μια τελική κατάσταση Q, θα εννοούμε ότι η Q είναι η *πρώτη* δυνατή τελική κατάσταση που μπορεί να προσεγγιστεί στην α.

Συνεχίζουμε με ένα σύνολο ορισμών που είναι χρήσιμοι αργότερα. Για κάθε εκτέλεση α, και για όλους τους δείκτες l_1 και l_2, $0 \leq l_1 < l_2 < \infty$, ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_{l_1}, Q_{l_2}] \subseteq \mathcal{S}$ να είναι $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_{l_1}, Q_{l_2}] = \{i_l \mid l_1 < l \leq l_2 \text{ και } i_l \in \mathcal{A}_{Q_{l_1}}\}$. Μιλώντας μη αυστηρά, το σύνολο $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_{l_1}, Q_{l_2}]$ περιέχει δείκτες από όλες τις συνόδους που είναι ενεργές στην κατάσταση Q_{l_1} και που ακολουθούν την Q_{l_1} στην α αλλά όχι την Q_{l_2}. Για κάθε εκτέλεση α και για κάθε δείκτη l_1 με $0 \leq l_1 < \infty$, ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_{l_1}, \infty] \subseteq \mathcal{S}$ να είναι $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_{l_1}, \infty] = \{i_l \mid l_1 < l \text{ και } i_l \in \mathcal{A}_{Q_{l_1}}\}$. Μιλώντας άτυπα, το σύνολο $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_{l_1}, \infty]$ περιέχει δείκτες από όλες τις συνόδους που είναι ενεργές στην καταστάση Q_{l_1} και που δρομολογούνται σε οποιαδήποτε κατάσταση που έπεται της Q_{l_1}. Ορίζουμε επίσης τα σύνολα $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_{l_1}, Q_{l_2}] \mid e$ και $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_{l_1}, \infty] \mid e$ με τον προφανή διαισθητικά τρόπο.

Για κάθε εκτέλεση α και για κάθε κατάσταση Q_l, η *ελάχιστη δρομολόγηση για την Q_l στην α*, η οποία συμβολίζεται $\widehat{l}$, είναι ο μικρότερος δυνατός ακέραιος $l' \geq l$ τέτοιος ώστε $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_l, Q_{l'}] = \mathcal{A}_{Q_l}$ αν $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_l, \infty] = \mathcal{A}_{Q_l}$, ή είναι ∞ αν δεν υπάρχει τέτοιος ακέραιος. Διαισθητικά, η ελάχιστη δρομολόγηση για την Q_l στην α είναι ο δείκτης της πρώτης προσεγγίσιμης κατάστασης που ακολουθεί την Q_l, μέχρι την οποία όλες οι ενεργές σύνοδοι στην Q_l έχουν δρομολογηθεί τουλάχιστον μία φορά ή ισούται με άπειρο αν δεν υπάρχει τέτοια κατάσταση. Ορίζουμε το $\widehat{l} \mid e$ με τον προφανή διαισθητικά τρόπο.

Συμβολίζουμε με $\alpha^{(l)} = i_{l+1}, Q_{l+1}, \ldots, i_{\widehat{l}}, Q_{\widehat{l}}$. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που $\widehat{l} = \infty$, το $\alpha^{(l)}$ είναι το πρόσφυμα της ακολουθίας α που έπεται της Q_l. Κάθε εκτέλεση α μπορεί να γραφεί ως $\alpha = Q_0, \alpha^{(l_1)}, \alpha^{(l_2)}, \ldots$, όπου η ακολουθία $l_1, l_2, \ldots$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής. Για τη βάση της επαγωγής έχουμε $l_1 = \widehat{0}$. Ας υποθέσουμε επαγωγικά ότι για κάθε $r \geq 2$, έχουμε ορίσει τα $l_1, \ldots, l_{r-1}$. Για το επαγωγικό βήμα, ορίζουμε το $l_r = \widehat{l_{r-1}}$. Κάθε ένα από τα μέρη εκτέλεσης $\alpha^{(l_r)}$, $r \geq 1$, ονομάζεται *φάση εκτέλεσης στην* α. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που η α είναι άπειρη, ο αριθμός των φάσεων εκτέλεσης στην α μπορεί να είναι πεπερασμένος αν (και μόνο αν) υπάρχει κάποιος δείκτης $r_0 \geq 0$ τέτοιος ώστε $l_{r_0} = \infty$.

Ένα *κλάσμα εκτέλεσης του* Alg *πάνω σε ένα δίκτυο* G *με σύνολο συνόδων* $\mathcal{S}$ είναι μια πεπερασμένη υποακολουθία $\alpha' = Q_{i_0}, i_1, Q_{i_0+1}, \ldots, i_l, Q_{i_0+l}$ κάποιας εκτέλεσης α του Alg πάνω στο G με σύνολο συνόδων $\mathcal{S}$. Λέμε ότι ένας δείκτης συνόδου i *εμφανίζεται* σε ένα κλάσμα εκτέλεσης α', αν $i = i_r$ για κάποιο ακέραιο r τέτοιο ώστε $1 \leq r \leq l$.

3.8 Πολυπλοκότητα

Διαισθητικά, μια πράξη "εκτελείται" σε μια εκτέλεση α κάθε φορά που ισχύει ότι $\mathbf{r}_{Q_l} \neq \mathbf{r}_{Q_{l-1}}$[1], όπου $l \geq 1$ είναι ένας ακέραιος. Αυτό σημαίνει ότι μια πράξη εκτελείται κάθε φορά που γίνονται αλλαγές στους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων.

Φυσικά, ενδιαφερόμαστε για το μικρότερο δυνατό πρόθεμα (αν υπάρχει κάποιο) μιας εκτέλεσης που προσεγγίζει μια τελική κατάσταση. Επομένως, ορίζουμε τον *αριθμό των πράξεων σε μια εκτέλεση* α να είναι ο αριθμός των ακεραίων $l \geq 1$ τέτοιοι ώστε $\mathbf{r}_{Q_l} \neq \mathbf{r}_{Q_{l-1}}$ και καμιά από τις καταστάσεις $Q_0, \ldots, Q_{l-1}$ δεν είναι τελική κατάσταση.

Η *πολυπλοκότητα σύγκλισης του* Alg *πάνω σε ένα δίκτυο* G *με σύνολο συνόδων* $\mathcal{S}$ ορίζεται να είναι ο μέγιστος, πάνω σε όλες τις εκτελέσεις του Alg στο δίκτυο G με σύνολο συνόδων $\mathcal{S}$, των αριθμών των πράξεων που πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης. Η *πολυπλοκότητα σύγκλισης του* Alg ορίζεται να είναι ο μέγιστος, πάνω σε όλα τα ζεύγη ενός δικτύου G και ενός συνόλου συνόδων $\mathcal{S}$ πάνω στο G, της πολυπλοκότητας του Alg πάνω στο G με σύνολο

[1] Από τον ορισμό της εκτέλεσης, αυτό συνεπάγεται ότι η σύνοδος S_{i_l} είναι ενεργή στην κατάσταση Q_{l-1}.

συνόδων $\mathcal{S}$.

Εξετάζουμε τέλος την περίπτωση που ο δρομολογητής Sched είναι πιθανοτικός. Τότε, ο αριθμός των πράξεων σε κάθε εκτέλεση του Alg στο δίκτυο G με σύνολο συνόδων $\mathcal{S}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, που καθορίζεται από τον Sched, ονομάζεται *πολυπλοκότητα σύγκλισης του* Alg *στο δίκτυο G με σύνολο συνόδων $\mathcal{S}$* και συμβολίζεται $\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}(\langle G, \mathcal{S} \rangle)$. Η *πολυπλοκότητα σύγκλισης του* Alg, συμβολίζεται με $\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}$ και ορίζεται με τον προφανή διαισθητικά τρόπο. Σε επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε επίσης την κατανομή πιθανοτήτων του $\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}$.

Κεφάλαιο 4

Αλγόριθμοι Συμφόρησης

Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιούμε την έννοια του ισομεριδίου για να ορίσουμε και να μελετήσουμε τις ακμές συμφόρησης, τις ακμές ελάχιστου ισομεριδίου και τους αλγορίθμους συμφόρησης. Επίσης, αποδεικνύουμε ενδιαφέρουσες ιδιότητες για τους αλγορίθμους συμφόρησης.

4.1 Ακμές Συμφόρησης και Ακμές Ελάχιστου Ισομεριδίου

Για κάθε κατάσταση Q, μια *ακμή συμφόρησης για την* Q [40] είναι μια ακμή $e \in E$ τέτοια ώστε, για κάθε σύνοδο $S \in \mathcal{A}_Q \mid e$,

$$MFS_Q(S) \;\; = \;\; FS_Q(e)\,.$$

Μιλώντας άτυπα, για κάθε ενεργή σύνοδο που χρησιμοποιεί την e, η ακμή e είναι εκείνη μεταξύ όλων των ακμών που χρησιμοποιούνται από τη σύνοδο πάνω στην οποία η σύνοδος λαμβάνει το ελάχιστο ισομερίδιο στην κατάσταση Q.

Παράδειγμα 4.1 *Θεωρούμε το απλό δίκτυο του Σχήματος 3-1 και έστω μια κατάσταση* Q *τέτοια ώστε* $allot_Q(e_1) = allot_Q(e_2) = 0$, *ενώ όλοι οι σύνοδοι είναι ενεργοί στην* Q. *Προφανώς,*

$$FS_Q(e_1) \;\; = \;\; \frac{cap(e_1)}{|\mathcal{A}_Q \mid e_1|}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{126}{3} \\
&= 42\,.
\end{aligned}
$$

Επιπλέον,

$$
\begin{aligned}
FS_Q(e_2) &= \frac{cap(e_2)}{|\mathcal{A}_Q \mid e_2|} \\
&= \frac{100}{2} \\
&= 50\,.
\end{aligned}
$$

Εφόσον η σύνοδος S_3 χρησιμοποιεί και τις δύο ακμές e_1 και e_2, το ελάχιστο ισομερίδιο της συνόδου S_3 στην κατάσταση Q είναι $MFS_Q(S_3) = \min\{42, 50\} = 42$. Εφόσον οι σύνοδοι S_1 και S_2 χρησιμοποιούν μόνο την ακμή e_1, το ελάχιστο ισομερίδιο τους στην κατάσταση Q είναι $MFS_Q(S_1) = MFS_Q(S_2) = FS_Q(e_1) = 42$. Επομένως, η ακμή e_1 είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q. Αντίθετα, η ακμή e_2 δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q, αφού $FS_Q(e_2) = 50$, ενώ η ακμή e_2 χρησιμοποιείται από τη σύνοδο S_3 για την οποία $MFS_Q(S_3) = 42$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι τα ισομερίδια οποιωνδήποτε ακμών συμφόρησης που χρησιμοποιούνται από μια κοινή σύνοδο είναι ίσα.

Λήμμα 4.1 *Έστω ότι οι ακμές e και e' είναι ακμές συμφόρησης για κάποια κατάσταση Q τέτοια ώστε $\mathcal{A}_Q \mid e \cap \mathcal{A}_Q \mid e' \neq \emptyset$. Τότε, $FS_Q(e) = FS_Q(e')$.*

Απόδειξη: Έστω ότι $S \in \mathcal{A}_Q \mid e \cap \mathcal{A}_Q \mid e'$ είναι μια οποιαδήποτε σύνοδος. Εφόσον οι ακμές e και e' είναι ακμές συμφόρησης για την κατάσταση Q, ισχύει ότι $MFS_Q(S) = FS_Q(e)$ και $MFS_Q(S) = FS_Q(e')$. Συνεπώς, $FS_Q(e) = FS_Q(e')$, όπως απαιτείται. ■

Για κάθε σύμπλεγμα συνόδων $\mathcal{S}_j$, το σύνολο των *ακμών με ελάχιστο ισομερίδιο για το σύμπλεγμα* $\mathcal{S}_j$ *στην κατάσταση* Q ορίζεται να είναι

$$
MFSE_Q(\mathcal{S}_j) = \{e \in AE_Q(\mathcal{S}_j) \mid FS_Q(e) \leq FS_Q(e') \text{ για κάθε ακμή } e' \in AE_Q(\mathcal{S}_j)\}\,.
$$

Ο επόμενος απλός ισχυρισμός είναι μια άμεση συνέπεια των ορισμών των ακμών συμφόρησης και των ακμών ελάχιστου ισομεριδίου για κάποιο συγκεκριμμένο σύμπλεγμα συνόδων.

Λήμμα 4.2 *Για κάθε κατάσταση Q και κάθε σύμπλεγμα συνόδων $\mathcal{S}_j$, έστω $e \in MFSE_Q(\mathcal{S}_j)$ μια οποιαδήποτε ακμή. Τότε, η e είναι μια ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q.*

Απόδειξη: Έστω $S \in \mathcal{A}_Q \mid e$ μια οποιαδήποτε σύνοδος. Αφού $e \in MFSE_Q(\mathcal{S}_j)$, για κάθε $e' \in AE_Q(\mathcal{S}_j)$ ισχύει ότι $FS_Q(e) \leq FS_Q(e')$. Πιο συγκεκριμμένα επομένως, για κάθε ακμή e' που χρησιμοποιείται από τη σύνοδο S ισχύει ότι $FS_Q(e) \leq FS_Q(e')$, έτσι ώστε $FS_Q(e) \leq \min_{e' \in S} FS_Q(e')$. Αφού η σύνοδος S χρησιμοποιεί την e έχουμε ότι $FS_Q(e) \geq \min_{e' \in S} FS_Q(e')$. Συνεπάγεται ότι $FS_Q(e) = \min_{e' \in S} FS_Q(e')$. Εφόσον η S έχει επιλεγεί αυθαίρετα, αυτό υποδηλώνει ότι η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q, όπως απαιτείται. ■

Το σύνολο των *ακμών με ελάχιστο ισομερίδιο στην κατάσταση* Q, το οποίο συμβολίζεται $MFSE_Q$, ορίζεται να είναι

$$MFSE_Q = \bigcup_{1 \leq j \leq c} MFSE_Q(\mathcal{S}_j)\,.$$

Συνεπώς, μια ακμή e ανήκει στο σύνολο των ακμών με ελάχιστο ισομερίδιο αν είναι μια ακμή με ελάχιστο ισομερίδιο για κάποιο σύμπλεγμα συνδέσεων.

4.2 Απενεργοποιητές Συμφόρησης

Θεωρήστε έναν οποιονδήποτε απενεργοποιητή Term και έστω ότι S είναι μια σύνοδος τέτοια ώστε $S \in \mathsf{Term}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q)$, για κάποια κατάσταση Q. Η απενεργοποίηση της συνόδου S στην κατάσταση Q *σέβεται τη συνθήκη συμφόρησης* αν υπάρχει μια ακμή $e \in S$ τέτοια ώστε

(1) η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης για την Q, και

(2) $r_Q(S) = FS_Q(e)$.

Ένας απενεργοποιητής Term ονομάζεται απενεργοποιητής *συμφόρησης* [40] αν για κάθε κατάσταση Q και για κάθε σύνοδο S τέτοια ώστε $S \in \mathsf{Term}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q)$, η απενεργοποίηση της S

σέβεται τη συνθήκη συμφόρησης. Αν μια τέτοια ακμή e υπάρχει για κάποια κατάσταση Q και αν ένας απενεργοποιητής συμφόρησης Term αποφασίσει να απενεργοποιήσει μια σύνοδο S που την χρησιμοποιεί, λέμε ότι η ακμή e *προκάλεσε την απενεργοποίηση της συνόδου S στην κατάσταση Q*.

Ένα παράδειγμα απενεργοποιητή συμφόρησης είναι ο απενεργοποιητής GlobalMinTerm, που ορίστηκε από τους Afek *et al.* [1, Ενότητα 4], ο οποίος απενεργοποιεί μια ενεργή συνόδο όταν ο ρυθμός μετάδοσής της είναι ο ελάχιστος μεταξύ όλων των συνόδων του δικτύου και δεν μπορεί να αυξηθεί περισσότερο. Παρότι ο ορισμός του απενεργοποιητή GlobalMinTerm είναι εμφανώς διαφορετικός από τον κλασικό ορισμό ενός απενεργοποιητή συμφόρησης, οι Afek *et al.* [1, Πρόταση 4.1] απέδειξαν ότι ο GlobalMinTerm είναι πράγματι απενεργοποιητής συμφόρησης.

4.3 Ιδιότητες

Σε αυτήν την ενότητα, συνοψίζουμε βασικές ιδιότητες των αλγορίθμων συμφόρησης. Η πρώτη ιδιότητα αποδεικνύει ότι το ισομερίδιο κάθε ακμής αυξάνει κατά τη διάρκεια εκτέλεσης ενός αλγορίθμου συμφόρησης. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ιδιότητες σταθερότητας των ακμών συμφόρησης και των ακμών ελάχιστου ισομεριδίου. Τέλος, επικεντρώνουμε την προσοχή μας σε ιδιότητες τερματισμού των αλγορίθμων συμφόρησης.

4.3.1 Ιδιότητα Αύξουσας Μονοτονίας του Ισομεριδίου

Οι Afek, Mansour και Ostfeld [1] απέδειξαν ότι το ισομερίδιο μιας ακμής δε μειώνεται ενόσω υπάρχουν ενεργές σύνοδοι που χρησιμοποιούν την ακμή, κατά τη διάρκεια εκτέλεσης ενός αλγορίθμου συμφόρησης. Επαναποδεικνύουμε τον ισχυρισμό αυτόν στη συνέχεια.

Πρόταση 4.1 *Έστω ότι ο* Alg *είναι ένας αλγόριθμος ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης. Για κάθε ακέραιο $l \geq 1$, έστω ότι για κάθε σύνοδο $S \in \mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}$ η απενεργοποίηση του S σέβεται τη συνθήκη συμφόρησης. Τότε, για κάθε ακμή $e \in AE_{Q_l}$ ισχύει ότι*

$$FS_{Q_l}(e) \geq FS_{Q_{l-1}}(e)\,.$$

Απόδειξη: Έστω ότι $e \in AE_{Q_l}$ είναι μια οποιαδήποτε ακμή. Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό. Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $FS_{Q_l}(e) < FS_{Q_{l-1}}(e)$. Από τον ορισμό του ισομεριδίου έχουμε ότι

$$FS_{Q_l}(e) \;=\; \frac{cap(e) - allot_{Q_l}(e)}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|}.$$

Από τον Ισχυρισμό 3.1 ισχύει ότι

$$allot_{Q_l}(e) \;=\; allot_{Q_{l-1}}(e) + \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) | e} r_{Q_{l-1}}(S_i)\,.$$

Προφανώς, αν $(\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e = \emptyset$, τότε $FS_{Q_l}(e) = FS_{Q_{l-1}}(e)$, όπως απαιτείται.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $(\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e \neq \emptyset$. Από υπόθεση, για κάθε δείκτη $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e$, η απενεργοποίηση του S_i σέβεται τη συνθήκη συμφόρησης. Συνεπώς, υπάρχει μια ακμή συμφόρησης $e' \in S_i$ τέτοια ώστε $r_{Q_{l-1}}(S_i) = FS_{Q_{l-1}}(e')$. Εφόσον η e' είναι ακμή συμφόρησης και $e \in S_i$, από τον ορισμό της ακμής συμφόρησης έχουμε ότι $FS_{Q_{l-1}}(e') \leq FS_{Q_{l-1}}(e)$. Άρα, $r_{Q_{l-1}}(S_i) \leq FS_{Q_{l-1}}(e)$. Συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} allot_{Q_l}(e) &\leq allot_{Q_{l-1}}(e) + \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) | e} FS_{Q_{l-1}}(e) \\ &= allot_{Q_{l-1}}(e) + |(\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e| \cdot FS_{Q_{l-1}}(e)\,, \end{aligned}$$

έτσι ώστε,

$$\begin{aligned} FS_{Q_l}(e) &\geq \frac{cap(e) - allot_{Q_{l-1}}(e) - |(\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e| \cdot FS_{Q_{l-1}}(e)}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|} \\ &= \frac{FS_{Q_{l-1}}(e) \cdot |\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \mid e| - |(\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e| \cdot FS_{Q_{l-1}}(e)}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|} \\ &= \frac{FS_{Q_{l-1}}(e) \cdot (|\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \mid e| - |(\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e|)}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|} \\ &= \frac{FS_{Q_{l-1}}(e) \cdot |\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|} \end{aligned}$$

$$= \quad FS_{Q_{l-1}}(e)\,.$$

Άτοπο. ■

Η Πρόταση 4.1 άμεσα υποδηλώνει:

Πόρισμα 4.1 *Έστω ότι ο* Alg *είναι αλγόριθμος συμφόρησης. Τότε, για κάθε ακέραιο* $l \geq 1$ *και για κάθε ακμή* $e \in AE_{Q_l}$ *ισχύει ότι*

$$FS_{Q_l}(e) \geq FS_{Q_{l-1}}(e)\,.$$

4.3.2 Ιδιότητα Σταθερότητας των Ακμών Συμφόρησης

Ενισχύουμε το Πόρισμα 4.1 για την ειδική περίπτωση ακμών συμφόρησης. Παρουσιάζουμε μια συλλογή ιδιοτήτων σταθερότητας για κάθε ακμή συμφόρησης κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης ενός αλγορίθμου συμφόρησης. Μιλώντας άτυπα, αποδεικνύουμε ότι το ισομερίδιο μιας ακμής συμφόρησης παραμένει σταθερό όσο η ακμή παραμένει ακμή συμφόρησης, καθώς επίσης και ότι η ακμή παραμένει ακμή συμφόρησης όσο είναι ενεργή. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι ο τελικός ρυθμός μετάδοσης των συνόδων που διατρέχουν μια ακμή συμφόρησης είναι ίσος με το ισομερίδιο της ακμής.

Πρόταση 4.2 *Έστω ότι ο* Alg *είναι αλγόριθμος συμφόρησης. Για κάθε ακέραιο* $l_0 \geq 0$*, έστω ότι* $e \in E$ *είναι μια ακμή συμφόρησης για την κατάσταση* Q_{l_0}*. Τότε, για κάθε ακέραιο* $l \geq l_0$ *τέτοιο ώστε* $e \in AE_{Q_l}$*, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) $FS_{Q_l}(e) = FS_{Q_{l_0}}(e)$,

(2) *η ακμή* e *είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση* Q_l*, και*

(3) *για κάθε* $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l+1}}) \mid e$, $r_{Q_l}(S_i) = FS_{Q_{l_0}}(e)$.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο l. Για τη βάση της επαγωγής. όπου $l = l_0$, η συνθήκη (1) ισχύει τετριμμένα, η (2) ισχύει από υπόθεση, και η (3) ισχύει εξ ορισμού των αλγορίθμων συμφόρησης.

Ας υποθέσουμε επαγωγικά ότι για κάθε ακέραιο $l \geq l_0$, ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε ακέραιο l' τέτοιο ώστε $l_0 \leq l' < l$:

(1) $FS_{Q_{l'}}(e) = FS_{Q_{l_0}}(e)$,

(2) η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_{l'}$, και

(3) για κάθε $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l'+1}}) \mid e$, $r_{Q_{l'}}(S_i) = FS_{Q_{l_0}}(e)$.

Για το επαγωγικό βήμα αποδεικνύουμε ότι:

(1) $FS_{Q_l}(e) = FS_{Q_{l_0}}(e)$,

(2) η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q_l, και

(3) για κάθε $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l+1}}) \mid e$, $r_{Q_l}(S_i) = FS_{Q_{l_0}}(e)$.

Ξεκινάμε με την απόδειξη της συνθήκης (1). Προφανώς,

$$\begin{aligned} FS_{Q_l}(e) &= \frac{cap(e) - allot_{Q_l}(e)}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|} \\ &= \frac{cap(e) - allot_{Q_{l-1}}(e) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_{l-1}}(S_i)}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|} \quad \text{(λόγω Ισχυρισμού 3.1)} \\ &= \frac{|\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \mid e| \, FS_{Q_{l-1}}(e) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_{l-1}}(S_i)}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|}. \end{aligned}$$

Έστω ότι $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e$ είναι ένας οποιοσδήποτε δείκτης συνόδου. Εφόσον $\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \subseteq \mathcal{A}_{Q_{l_0}}$, ισχύει ότι $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e$, έτσι ώστε από επαγωγική υπόθεση (συνθήκη (3)) έχουμε $r_{Q_{l-1}}(S_i) = FS_{Q_{l_0}}(e)$. Συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} FS_{Q_l}(e) &= \frac{|\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \mid e| \, FS_{Q_{l-1}}(e) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} FS_{Q_{l_0}}(e)}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|} \\ &= \frac{|\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \mid e| \, FS_{Q_{l_0}}(e) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} FS_{Q_{l_0}}(e)}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|} \\ & \quad \text{(από επαγωγική υπόθεση (συνθήκη (1)))} \\ &= \frac{|\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \mid e| \, FS_{Q_{l_0}}(e) - |(\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e| \, FS_{Q_{l_0}}(e)}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(|\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \mid e| - |(\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e|)\, FS_{Q_{l_0}}(e)}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|} \\
&= \frac{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|\, FS_{Q_{l_0}}(e)}{|\mathcal{A}_{Q_l} \mid e|} \\
&= FS_{Q_{l_0}}(e)\,,
\end{aligned}$$

το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη της (1).

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (2). Έστω ότι $i \in \mathcal{A}_{Q_l} \mid e$ είναι ένας οποιοσδήποτε δείκτης συνόδου. Προφανώς, $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$. Εφόσον η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης για την Q_{l_0} έχουμε $FS_{Q_{l_0}}(e) = MFS_{Q_{l_0}}(S_i) = \min_{e' \in S_i} FS_{Q_{l_0}}(e')$. Θεωρούμε οποιαδήποτε ακμή $e' \in S_i$. Αφού $S_i \in \mathcal{A}_{Q_l} \mid e$ συνεπάγεται ότι $e' \in AE_{Q_l}$. Επομένως, από το Πόρισμα 4.1 θα πρέπει να είναι $FS_{Q_l}(e') \geq FS_{Q_{l_0}}(e')$, έτσι ώστε $\min_{e' \in S_i} FS_{Q_l}(e') \geq \min_{e' \in S_i} FS_{Q_{l_0}}(e')$. Επομένως, $\min_{e' \in S_i} FS_{Q_l}(e') \geq FS_{Q_{l_0}}(e)$. Λόγω της συνθήκης (1) αυτό υποδηλώνει ότι $\min_{e' \in S_i} FS_{Q_l}(e') \geq FS_{Q_l}(e)$. Εφόσον $e \in S_i$ έχουμε $\min_{e' \in S_i} FS_{Q_l}(e') \leq FS_{Q_l}(e)$. Συνεπώς ισχύει ότι $FS_{Q_l}(e) = \min_{e' \in S_i} FS_{Q_l}(e')$. Επειδή ο δείκτης i έχει επιλεγεί αυθαίρετα, αυτό υποδηλώνει ότι η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q_l, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του (2).

Αποδεικνύουμε τέλος τη συνθήκη (3). Έστω ότι $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l+1}}) \mid e$ είναι ένας οποιοσδήποτε δείκτης συνόδου. Εφόσον $i \notin \mathcal{A}_{Q_{l+1}}$, υπάρχει κάποιος ακέραιος l' με $l_0 < l' \leq l$, τέτοιος ώστε $i \in \mathsf{Term}(Q_{l'})$. Αφού ο Term είναι απενεργοποιητής συμφόρησης, υπάρχει κάποια ακμή $e' \in S_i$, για την οποία ισχύουν τα εξής: *(i)* η ακμή e' είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_{l'}$, και *(ii)* $r_{Q_{l'}}(S_i) = FS_{Q_{l'}}(e')$.

Ισχύει ότι είτε $l_0 < l' < l$ ή $l' = l$. Επομένως, είτε από την επαγωγική υπόθεση (συνθήκη (2)) ή από το (2) συνεπάγεται ότι η e είναι ακμή συμφόρησης για την $Q_{l'}$ σε κάθε περίπτωση. Αυτό και η συνθήκη *(i)* υποδηλώνουν, λόγω του Λήμματος 4.1, ότι $FS_{Q_{l'}}(e) = FS_{Q_{l'}}(e')$. Από αυτό και τη συνθήκη *(ii)* συνεπάγεται ότι

$$r_{Q_{l'}}(S_i) = FS_{Q_{l'}}(e)\,.$$

Εφόσον $l \geq l'$ και $i \in \mathsf{Term}(Q_{l'})$ έχουμε

$$r_{Q_l}(S_i) = r_{Q_{l'}}(S_i)\,.$$

Ισχύει ότι είτε $l_0 < l' < l$ ή $l' = l$. Επομένως, είτε από την επαγωγική υπόθεση (συνθήκη (1)) ή από τη συνθήκη (1) συνεπάγεται ότι

$$FS_{Q_{l'}}(e) \;\; = \;\; FS_{Q_{l_0}}(e)\,.$$

Άρα,

$$r_{Q_l}(S_i) \;\; = \;\; FS_{Q_{l_0}}(e)\,,$$

το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη του (3). ■

4.3.3 Ιδιότητα Σταθερότητας των Ακμών Ελάχιστου Ισομεριδίου

Αποδεικνύουμε μια απλή ιδιότητα σταθερότητας για κάθε ακμή με ελάχιστο ισομερίδιο σε οποιοδήποτε σύμπλεγμα συνόδων. Μιλώντας μη αυστηρά, αποδεικνύουμε ότι η ακμή εξακολουθεί να είναι ακμή ελάχιστου ισομεριδίου στο σύμπλεγμα, όσο είναι ενεργή.

Πρόταση 4.3 *Έστω ότι ο* Alg *είναι αλγόριθμος συμφόρησης. Για κάθε ακέραιο $l_0 \geq 0$, θεωρούμε μια ακμή $e \in MFSE_{Q_{l_0}}(\mathcal{S}_j)$ για κάποιο ενεργό σύμπλεγμα $\mathcal{S}_j$ στην Q_{l_0}. Τότε, για κάθε ακέραιο $l \geq l_0$ τέτοιο ώστε $e \in AE_{Q_l}$ ισχύει ότι $e \in MFSE_{Q_l}(\mathcal{S}_j)$.*

Απόδειξη: Έστω ότι $e' \in AE_{Q_l}(\mathcal{S}_j)$ είναι μια οποιαδήποτε ακμή. Προφανώς, $e' \in AE_{Q_{l_0}}(\mathcal{S}_j)$. Εφόσον $e \in MFSE_{Q_l}(\mathcal{S}_j)$ έχουμε $FS_{Q_{l_0}}(e) \leq FS_{Q_{l_0}}(e')$. Από το Λήμμα 4.2, η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης για την Q_{l_0}. Επομένως, από την Πρόταση 4.2 (2) προκύπτει ότι $FS_{Q_{l'}}(e) = FS_{Q_{l_0}}(e)$. Το Πόρισμα 4.1 υποδηλώνει ότι $FS_{Q_{l_0}}(e') \leq FS_{Q_{l'}}(e')$. Άρα, $FS_{Q_{l'}}(e) \leq FS_{Q_{l'}}(e')$. Εφόσον η ακμή e' έχει επιλεγεί αυθαίρετα, έχουμε ότι $e \in MFSE_{Q_{l'}}(\mathcal{S}_j)$, όπως απαιτείται. ■

4.3.4 Ιδιότητες Τερματισμού των Αλγορίθμων Συμφόρησης

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε ιδιότητες τερματισμού των αλγορίθμων συμφόρησης. Πιο συγκεκριμμένα, αποδεικνύουμε ότι οι αλγόριθμοι συμφόρησης είναι δίκαιοι και άρα το διάνυσμα εξόδου τους είναι ένα δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου.

Η ακόλουθη πρόταση έχει αποδειχθεί από τον Hayden [36] και υπαγορεύει ότι όταν ένας αλγόριθμος συμφόρησης τερματίζει, για κάθε σύνοδο S που υπάρχει στο δίκτυο, υπάρχει μια κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για την S. Επαναποδεικνύουμε την πρόταση στη συνέχεια.

Πρόταση 4.4 *Έστω ότι ο* Alg *είναι αλγόριθμος συμφόρησης. Τότε, για κάθε προσεγγίσιμη τελική κατάσταση* Q *του* Alg*, υπάρχει, για κάθε σύνοδο* S*, μια κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για την* S *στην κατάσταση* Q*.*

Απόδειξη: Έστω μια τελική κατάσταση Q σε μια εκτέλεση α του Alg και έστω S μια οποιαδήποτε σύνοδος. Εφόσον η Q είναι τελική κατάσταση ισχύει ότι $S \in \mathcal{D}_Q$. Επομένως, υπάρχει κάποια κατάσταση Q_{l_0} στην εκτέλεση α τέτοια ώστε $Q_0 \xrightarrow{\alpha} Q_{l_0} \xrightarrow{\alpha} Q$ και $S \in \mathsf{Term}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q_{l_0})$. Δηλαδή, η σύνοδος S απενεργοποιείται στην κατάσταση Q_{l_0}, έτσι ώστε $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l_0+1}}$.

Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, υπάρχει μια ακμή $e \in E$, την οποία χρησιμοποιεί η S, τέτοια ώστε *(i)* η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q_{l_0}, και *(ii)* $r_{Q_{l_0}}(S) = FS_{Q_{l_0}}(e)$. Θα δείξουμε ότι η ακμή e ικανοποιεί τις συνθήκες (1) και (2) του ορισμού μιας κορεσμένης ακμής μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για τη σύνοδο S στην κατάσταση Q. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας τη συνθήκη (1).

Λήμμα 4.3 *Έστω μια σύνοδος* $i \in sessions(e)$*. Τότε,* $r_Q(S) \geq r_Q(S_i)$*.*

Απόδειξη: Εξετάζουμε τις εξής δύο περιπτώσεις.

1. Υποθέτουμε πρώτα ότι $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}$.

   Συμβολίζουμε με Q_l την πιο κοντινή στην Q κατάσταση της α στην οποία $\mathcal{A}_{Q_l} \mid e \neq \emptyset$. Μιλώντας μη αυστηρά, η κατάσταση Q_l είναι η τελευταία κατάσταση στην α στην οποία η ακμή e είναι ακόμα ενεργή. Προφανώς, εφόσον η κατάσταση Q είναι τελική, έτσι ώστε $\mathcal{A}_Q = \emptyset$, ισχύει ότι $Q_l \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} Q$.

Είναι σαφές ότι $S \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l+1}}) \mid e$ και $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l+1}}) \mid e$. Επομένως, η Πρόταση 4.2(3) συνεπάγεται ότι $r_{Q_l}(S) = FS_{Q_{l_0}}(e)$ και $r_{Q_l}(S_i) = FS_{Q_{l_0}}(e)$, έτσι ώστε $r_{Q_l}(S) = r_{Q_l}(S_i)$.

Εξ ορισμού της Q_l, καμιά αλλαγή στους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων που χρησιμοποιούν την e δεν μπορεί να συμβεί στις καταστάσεις που έπονται της Q_l. Εφόσον $Q_l \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} Q$, συνεπάγεται ότι $r_Q(S) = r_Q(S_i)$, όπως απαιτείται.

2. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $i \notin \mathcal{A}_{Q_{l_0}}$.

   Συμβολίζουμε με $Q_{l'}$ την κατάσταση της α στην οποία $i \in \mathsf{Term}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q_{l'})$. Προφανώς, $Q_{l'} \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} Q_{l_0}$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, υπάρχει μια ακμή $e' \in S_i$ τέτοια ώστε *(i)* η ακμή e' είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_{l'}$, και *(ii)* $r_{Q_{l'}}(S_i) = FS_{Q_{l'}}(e')$.

   Εξ ορισμού της ακμής συμφόρησης, είναι $FS_{Q_{l'}}(e') = MFS_{Q_{l'}}(S_i)$. Εφόσον η σύνοδος i χρησιμοποιεί την e, έχουμε

$$FS_{Q_{l'}}(e') \;\; \leq \;\; FS_{Q_{l'}}(e)\,.$$

   Αφού $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, η ακμή e είναι ενεργή στην κατάσταση Q_{l_0}. Συνεπώς, από το Πόρισμα 4.1 συνεπάγεται ότι

$$FS_{Q_{l'}}(e) \;\; \leq \;\; FS_{Q_{l_0}}(e)\,.$$

   Επειδή $i \in \mathsf{Term}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q_{l'})$ και $Q_{l'} \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} Q$ ισχύει ότι

$$r_Q(S_i) \;\; = \;\; r_{Q_{l'}}(S_i)\,.$$

Επομένως,

$$r_Q(S_i) \quad \leq \quad FS_{Q_{l_0}}(e)\,.$$

Εφόσον $S \in \mathsf{Term}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q_{l_0})$ και $Q_{l_0} \xrightarrow{\alpha} Q$ είναι:

$$r_Q(S) \quad = \quad r_{Q_{l_0}}(S)\,.$$

Επίσης, επειδή $r_{Q_{l_0}}(S) = FS_{Q_{l_0}}(e)$, συνεπάγεται ότι

$$r_Q(S_i) \quad \leq \quad r_Q(S)\,,$$

όπως απαιτείται.

■

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (2).

Λήμμα 4.4 *Η ακμή e είναι κορεσμένη στην κατάσταση Q.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την τελευταία κατάσταση Q_l στην εκτέλεση α στην οποία η ακμή e είναι ακόμη ενεργή. Από την Πρόταση 4.2(3), για κάθε σύνοδο $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l+1}}) \mid e = \mathcal{A}_{Q_{l_0}}$ ισχύει ότι $r_{Q_l}(S_i) = FS_{Q_{l_0}}(e)$. Άρα, το Λήμμα 3.1(1) υποδηλώνει ότι η ακμή e είναι κορεσμένη στην Q_l. Ωστόσο, εξ ορισμού της Q_l, δεν γίνονται περαιτέρω αλλαγές στο ρυθμό μετάδοσης των συνόδων που χρησιμοποιούν την e σε καταστάσεις που έπονται της Q_l. Εφόσον έχουμε ότι $Q_l \xrightarrow{\alpha} Q$, συνεπάγεται ότι η ακμή e εξακολουθεί να είναι κορεσμένη στην κατάσταση Q, όπως απαιτείται. ■

Τα Λήμματα 4.3 και 4.4 υποδηλώνουν ότι η ακμή e είναι κορεσμένη ακμή μέγιστου ρυθμού μετάδοσης για τη σύνοδο S στην κατάσταση Q, όπως απαιτείται. ■

Οι Προτάσεις 4.4 και 3.1 υποδηλώνουν άμεσα ότι κάθε αλγόριθμος συμφόρησης είναι δίκαιος και επομένως, το διάνυσμα εξόδου κάθε αλγορίθμου συμφόρησης είναι ένα δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου.

Πρόταση 4.5 (Hayden [36]) *Έστω ότι ο* Alg *είναι αλγόριθμος συμφόρησης. Τότε, για κάθε προσεγγίσιμη τελική κατάσταση Q του* Alg*, το διάνυσμα $\mathbf{r}_Q$ είναι ένα δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου.*

Μέρος II

Οπτιμιστικοί Αλγόριθμοι

Κεφάλαιο 5

Το Οπτιμιστικό Μοντέλο

Σε αυτό το κεφάλαιο, επικεντρώνουμε την προσοχή μας στο οπτιμιστικό μοντέλο. Στην Ενότητα 5.1 περιγράφουμε την πράξη ενημέρωσης με βάση την οποία έχουν "χτιστεί" οι οπτιμιστικοί αλγόριθμοι, ενώ η Ενότητα 5.2 εισάγει την παράλληλη πράξη ενημέρωσης, η οποία επιτρέπει την ταυτόχρονη εκτέλεση περισσότερων της μιας πράξεων ενημέρωσης.

5.1 Η Πράξη Ενημέρωσης Update

Σε αυτήν την παράγραφο, περιγράφουμε όλες τις λεπτομέρειες της πράξης ενημέρωσης `update` Η Ενότητα 5.1.1 παρουσιάζει το μηχανισμό αυξήσεως που χρησιμοποιείται από την πράξη, ενώ η Ενότητα 5.1.2 περιγράφει τον αντίστοιχο μηχανισμό μειώσεων των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων που μοιράζονται ακμές με τη σύνοδο της οποίας ο ρυθμός μετάδοσης αυξάνεται στην τρέχουσα πράξη. Τέλος, η Ενότητα 5.1 εστιάζεται στον τρόπο ενσωμάτωσης των παραπάνω μηχανισμών στην πράξη ενημέρωσης `update`.

5.1.1 Αυξήσεις

Για κάθε σύνοδο S_i, η *αύξηση του* S_i *στην κατάσταση* Q, *η οποία επιβάλλεται από την ακμή* $e \in S_i$ (δείτε [1, Ενότητα 2.1]) και συμβολίζεται $\Delta_Q(i, e)$, είναι είτε 0 αν η σύνοδος S_i δεν είναι ενεργή στην κατάσταση Q, ή ίση με την ανασχηματιστική αύξηση για το διάνυσμα $\langle \mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid$

$e, i, cap(e) - allot_Q(e)\rangle$. Δηλαδή, το $\Delta_Q(i,e)$ είναι ο πραγματικός αριθμός $\Delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$\langle \mathbf{r}', \Delta \rangle \;\; = \;\; \mathtt{iupdate}(\langle \mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid e, i, cap(e) - allot_Q(e)\rangle)\,,$$

για κάποιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης $\mathbf{r}'$. (Παρατηρούμε ότι, εξ ορισμού της συνάρτησης αυξήσεως, το διάνυσμα $\mathbf{r}'$ είναι "συμβατό" με το διάνυσμα $\mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid e$, και επομένως, περιέχει μόνο στοιχεία που αντιστοιχούν σε ενεργές συνόδους στην κατάσταση Q που χρησιμοποιούν την ακμή e.) Πιο λεπτομερειακά, το $\Delta_Q(i,e)$ είναι η *μοναδική* δυνατή αύξηση στο ρυθμό μετάδοσης της συνόδου S_i στην κατάσταση Q που επιφέρει κορεσμό στην ακμή e, ενώ μπορεί ταυτόχρονα να απαιτείται η μείωση του ρυθμού μετάδοσης κάποιων άλλων ενεργών συνόδων που χρησιμοποιούν την e και ο ρυθμός μετάδοσής τους είναι μεγαλύτερος από την τελική τιμή του ρυθμού μετάδοσης της συνόδου S_i, στην οποία και μειώνονται. Ο ρυθμός μετάδοσης συνόδων με μικρότερους ρυθμούς μετάδοσης, που χρησιμοποιούν την e, δεν επηρεάζεται, και φυσικά δεν υπάρχει καμία αλλαγή στο ρυθμό μετάδοσης μη-ενεργών συνόδων ή συνόδων που δεν μοιράζονται ακμές με τη σύνοδο S_i. Διαισθητικά, το $\Delta_Q(i,e)$ είναι η μέγιστη ποσότητα κατά την οποία ο $r_Q(S_i)$ μπορεί να αυξηθεί με δίκαιο τρόπο αν η ακμή e ήταν η μόνη ακμή "περιορισμού" της συνόδου S_i.

Η *αύξηση του S_i στην κατάσταση Q* (δειτε [1, Ενότητα 2.1]), συμβολίζεται $\Delta_Q(i)$ και είναι είτε 0 αν η S_i δεν είναι ενεργή στην κατάσταση Q, ή η *ελάχιστη,* πάνω σε όλες τις ακμές $e \in S_i$, αύξηση της S_i στην κατάσταση Q που επιβάλλεται από την ακμή e. Επομένως,

$$\Delta_Q(i) \;\; = \;\; \min_{e \in S_i} \Delta_Q(i,e)\,.$$

Άρα, υποθέτοντας ότι η S_i είναι ενεργή στην κατάσταση Q, η $\Delta_Q(i)$ είναι η ελάχιστη μεταξύ όλων των δυνατών αυξήσεων στο ρυθμό μετάδοσης της S_i, που επιβάλλεται από τις ακμές που χρησιμοποιεί.

Εφόσον ο ρυθμός μετάδοσης της συνόδου S_i μπορεί να αυξηθεί έστω και ελάχιστα, μόνο αν η αύξηση είναι δυνατή χωρίς να παραβιάζεται η συνθήκη χωρητικότητας πάνω σε όλες τις ακμές που χρησιμοποιεί, συνεπάγεται ότι η $\Delta_Q(i)$ είναι η *μέγιστη* δυνατή αύξηση στο ρυθμό μετάδοσης της S_i στην κατάσταση Q η οποία σέβεται την εφικτότητα. Παρατηρούμε ότι η $\Delta_Q(i)$ μπορεί να υπολογιστεί από πληροφορία που είναι "τοπική" στη σύνοδο S_i (δείτε, π.χ., [41, Ενότητα IV]).

5.1.2 Μειώσεις

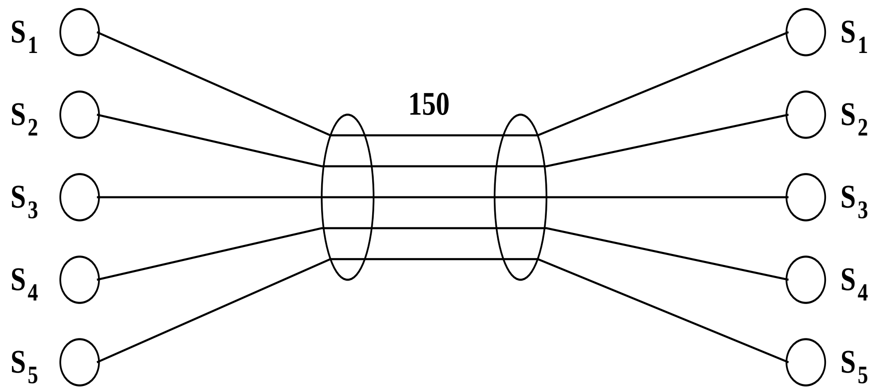
Έστω ότι η S_i είναι η σύνοδος προς ενημέρωση στην κατάσταση Q και έστω ότι $\Delta_Q(i) = \Delta_Q(i, e')$, για κάποια ακμή $e' \in S_i$. Για κάθε ακμή $e \in S_i$, τέτοια ώστε $e \neq e'$ και $\Delta_Q(i) + \sum_{S_j \in \mathcal{A}_Q|e} r_Q(S_j) > cap(e) - allot_Q(e)$, η ανασχηματιστική μείωση $B_Q(e)$ υπολογίζεται για την τετράδα $\langle \mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid e, i, cap(e) - allot_Q(e), \Delta_Q(i) \rangle$. Δηλαδή, η $B_Q(e)$ είναι ένας πραγματικός αριθμός $B \geq 0$ τέτοιος ώστε

$$\langle \mathbf{r}', B \rangle \quad = \quad \texttt{dupdate}(\langle \mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid e, i, cap(e) - allot_Q(e), \Delta_Q(i) \rangle \,,$$

για κάποιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης $\mathbf{r}'$. (Παρατηρούμε ότι, εξ ορισμού της συνάρτησης μειώσεως, το $\mathbf{r}'$ είναι "συμβατό" με το διάνυσμα $\mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid e$. Επομένως, περιέχει μόνο στοιχεία που αντιστοιχούν σε ενεργές συνόδους στην κατάσταση Q και χρησιμοποιούν την ακμή e.) Πιο λεπτομερειακά, η $B_Q(e)$ είναι η μοναδική μειωμένη τιμή του ρυθμού μετάδοσης κάποιας συνόδου που χρησιμοποιεί την e, έτσι ώστε να επιτευχθεί μια αύξηση κατά $\Delta_Q(i)$ στο ρυθμό μετάδοσης της συνόδου S_i, χωρίς να παραβιαστεί η συνθήκη χωρητικότητας πάνω στην ακμή e.

5.1.3 Πράξη

Μιλώντας μη αυστηρά, η πράξη ενημέρωσης `update` ορίζει μια "διαδικασία" υπολογισμού νέων ρυθμών μετάδοσης για ένα σύνολο από συνόδους, με βάση τους τρέχοντες ρυθμούς μετάδοσης. Πιο λεπτομερειακά, μια *πράξη ενημέρωσης* είναι ένα σύνολο από συγκεκριμμένα στιγμιότυπα των συναρτήσεων ενημέρωσης πάνω σε κάποιο συγκεκριμμένο δείκτη συνόδου i και για μια συγκεκριμμένη κατάσταση Q. Επίσης, υπολογίζονται νέοι ρυθμοί μετάδοσης για κάποιες συνόδους. Μια πράξη ενημέρωσης πάνω σε μια σύνοδο S_i συσχετίζει με κάθε ακμή e που χρησιμοποιείται από την S_i ένα στιγμιότυπο των συναρτήσεων αυξήσεως και μειώσεως. Στο στιγμιότυπο της συνάρτησης αυξήσεως που συσχετίζεται με την ακμή e, η αύξηση $\Delta_Q(i, e)$



Σχήμα 5-1: Δίκτυο με έναν σύνδεσμο και πέντε συνόδους.

υπολογίζεται ως

$$\langle \mathbf{r}', \Delta_Q(e,i) \rangle \;=\; \mathtt{iupdate}(\langle \mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid e, i, cap(e) - allot_Q(e) \rangle),$$

για κάποιο διάνυσμα $\mathbf{r}'$.

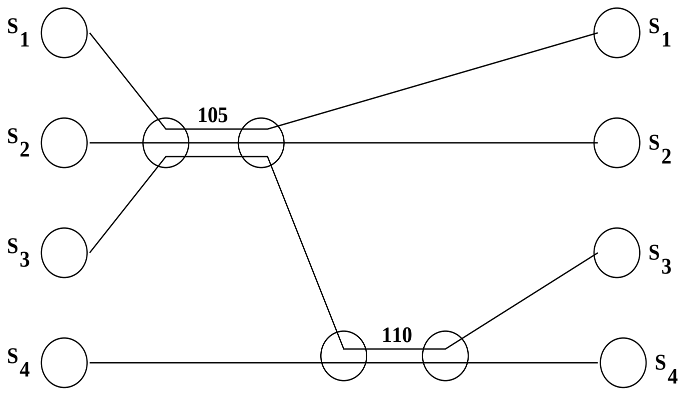
Ας υποθέσουμε ότι $\Delta_Q(i) = \Delta_Q(i, e)$ για κάποια ακμή $e \in S_i$. Οι νέοι ρυθμοί μετάδοσης τόσο της συνόδου S_i, όσο και των ενεργών συνόδων που μοιράζονται ακμές με την S_i υπολογίζονται ως εξής:

(1) $\mathbf{r}_{\mathcal{A}_{\overrightarrow{Q}}} \mid e = \mathbf{r}'$, όπου $\langle \mathbf{r}', \Delta_Q(i) \rangle = \mathtt{iupdate}(\langle \mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid e, i, cap(e) - allot_Q(e) \rangle)$,

(2) για κάθε ακμή $e' \in S_i$ τέτοια ώστε $e' \neq e$ και $\sum_{S_j \in sessions(e')} r_Q(S_j) > cap(e')$ έχουμε ότι $\mathbf{r}_{\mathcal{A}_{\overrightarrow{Q}}} \mid e' = \mathbf{r}'$, όπου $\langle \mathbf{r}', B_Q(e') \rangle = \mathtt{dupdate}(\langle \mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid e', i, cap(e') - allot_Q(e'), \Delta_Q(i) \rangle)$,

(3) οι ρυθμοί μετάδοσης των υπολοίπων συνόδων δεν αλλάζουν.

Παράδειγμα 5.1 *Θεωρούμε το απλό δίκτυο του Σχήματος 5-1, όπου πέντε σύνοδοι μοιράζονται μια ακμή με χωρητικότητα* 150. *Υποθέτουμε ότι το αρχικό διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης είναι* $\langle 10, 20, 30, 40, 50 \rangle$, *έτσι ώστε η ακμή είναι κορεσμένη. Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός μετάδοσης της συνόδου* S_5 *δε μπορεί να αυξηθεί, σε αντίθεση με αυτόν της συνόδου* S_4 *που μπορεί να αυξηθεί μετατρέποντας το διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης σε* $\langle 10, 20, 30, 45, 45 \rangle$. *Εκτελώντας*



Σχήμα 5-2: Παράδειγμα δικτύου στο οποίο η Update εκτελείται.

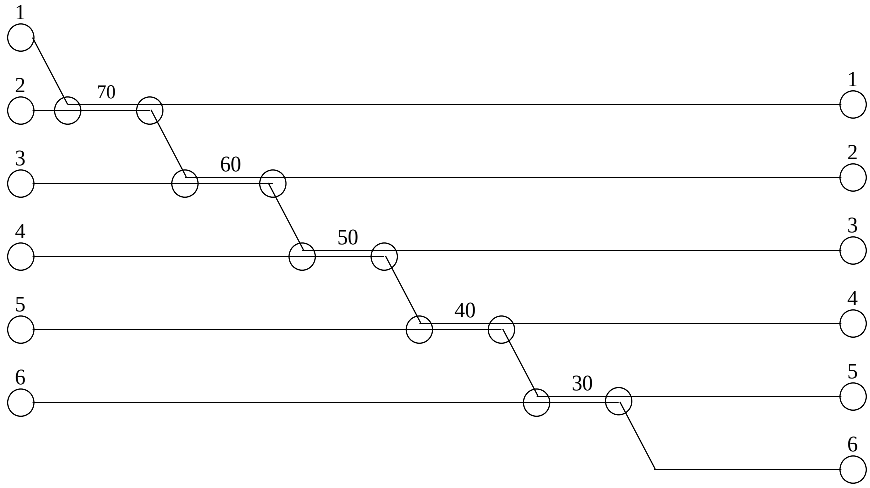
ακόμη μία πράξη ενημέρωσης πάνω στη σύνοδο S_3 το διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης γίνεται $\langle 10, 20, 40, 40, 40 \rangle$.

Θεωρούμε τώρα τη γενικότερη περίπτωση, όπου μια σύνοδος χρησιμοποιεί περισσότερες από μία ακμές, όπως στο Σχήμα 5-2. Προφανώς, ο ρυθμός μετάδοσης κάθε συνόδου μπορεί να αυξηθεί μόνο αν η αύξηση είναι δυνατή πάνω σε κάθε ακμή. Υποθέτουμε ότι το αρχικό διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης είναι $\langle 40, 45, 10, 80 \rangle$. *Μια πράξη ενημέρωσης πάνω στη σύνοδο S_3 επιφέρει αύξηση του ρυθμού μετάδοσής της σε* 35, *οι ρυθμοί μετάδοσης των συνόδων S_1 και S_2 μειώνονται στην ίδια τιμή, ενώ ο νέος ρυθμός μετάδοσης της συνόδου S_4 είναι* 75, *έτσι ώστε το νέο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης είναι* $\langle 35, 35, 35, 75 \rangle$.

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιούμε τη συμβολογραφία `update` για να αναφερόμαστε στην πράξη ενημέρωσης. Ονομάζουμε έναν αλγόριθμο Alg *οπτιμιστικό αλγόριθμο,* αν `operation` = `update`, δηλαδή ένας οπτιμιστικός αλγόριθμος χρησιμοποιεί την (οπτιμιστική) πράξη ενημέρωσης `update` για να διαχειρίζεται τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων.

5.2 Η Παράλληλη Πράξη Ενημέρωσης

Σε αυτήν την ενότητα περιγράφουμε την πράξη `cupdate`, η οποία είναι μια παράλληλη έκδοση της πράξης `update`.



Σχήμα 5-3: Παράδειγμα δικτύου στο οποίο η CUpdate εκτελείται.

Για κάθε σύνοδο S_i, συμβολίζουμε με ν_i τον αριθμό των συνόδων που μοιράζονται ακμές με την S_i. Οι σύνοδοι αυτοί ονομάζονται *γείτονες* της S_i (ή *γειτονικές* σύνοδοι της S_i). Συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_i$ το σύνολο των γειτόνων της S_i. Επομένως,

$$\mathcal{N}_i \; = \; \{S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_{\nu_i}}\}\,.$$

Πάνω στη σύνοδο S_i, καθώς επίσης και σε κάθε σύνοδο $S \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_i$ μπορεί να πραγματοποιηθεί παράλληλα μια πράξη ενημέρωσης ως εξής. Έστω ότι $S_j \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_i$ είναι η σύνοδος προς ενημέρωση. Αν $\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j = \emptyset$, δεν υπάρχει σύγκρουση ή πρόβλημα, εφόσον η πράξη ενημέρωσης πάνω σε οποιαδήποτε σύνοδο επηρεάζει μόνο το ρυθμό μετάδοσης της συνόδου αυτής και των γειτόνων της. Ωστόσο, αν $\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j \neq \emptyset$, μπορεί να υπάρχουν συγκρούσεις και έστω ότι S είναι ένας από τους κοινούς γείτονες των συνόδων S_i και S_j. Η συγκρούση μπορεί να προκληθεί από το γεγονός ότι ο ρυθμός μετάδοσης της συνόδου S μπορεί να πρέπει να μειωθεί λόγω της αύξησης των ρυθμών μετάδοσης και των δύο συνόδων. Σε αυτήν την περίπτωση, ο *κανόνας επίλυσης της σύγκρουσης* που χρησιμοποιείται είναι ότι ο ρυθμός μετάδοσης της συνόδου S μειώνεται στην ελάχιστη από τις δύο τιμές. Προφανώς, μια τρίτη σύνοδος $S_l \in (\mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_i) \cap (\mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_j)$ μπορεί επίσης να ενημερωθεί ταυτόχρονα με τις S_i και S_j, κ.ο.κ.

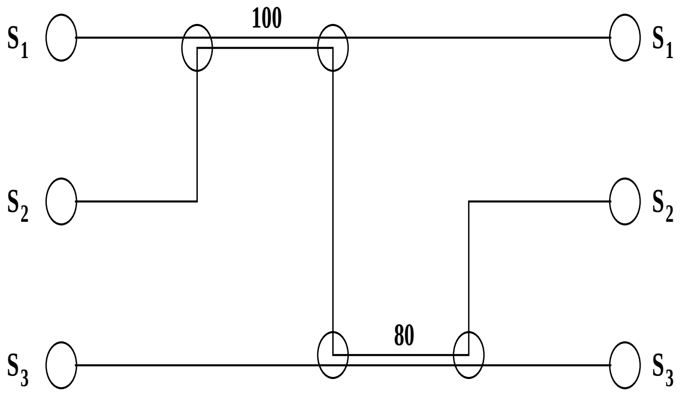
$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{S_4}$	$\mathbf{S_5}$	$\mathbf{S_6}$
0	0	0	0	0	0
70	0	50	0	30	0
40	30	30	20	15	15
40	30	30	20	15	15
40	30	25	25	15	15
40	30	25	25	15	15
35	35	25	25	15	15

Σχήμα 5-4: Εκτέλεση της CUpdate στο δίκτυο του προηγούμενου σχήματος.

Παράδειγμα 5.2 *Θεωρούμε το δίκτυο του Σχήματος 5-3, στο οποίο υπάρχουν έξι σύνοδοι. Προφανώς, οι σύνοδοι S_1, S_3 και S_5 μπορούν να ενημερωθούν παράλληλα. Το ίδιο μπορεί να συμβεί για τις συνόδους S_2, S_4 και S_6. Υποθέτουμε ότι το αρχικό διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης είναι $\mathbf{0}^{(6)}$. Το Σχήμα 5-4 περιγράφει τα βήματα ενός αλγορίθμου που εκτελεί με εναλλασσόμενο τρόπο παράλληλες πράξεις ενημέρωσης στις συνόδους των δύο αυτών συνόλων.*

Η διαφορά της **cupdate** από την κλασική πράξη ενημέρωσης γίνεται αισθητή όταν ο ρυθμός μετάδοσης μιας συνόδου πρέπει να μειωθεί λόγω αυξήσεων στους ρυθμούς μετάδοσης περισσότερων της μιας συνόδων με τις οποίες μοιράζεται ακμές. Σε αυτήν την περίπτωση, κάποιες από τις συνόδους προς ενημέρωση ίσως τελικά αποκομίσουν μικρότερο ρυθμό μετάδοσης από εκείνον που θα τους αποδιδόταν από οποιαδήποτε *αυθαίρετη* σειριακή εκτέλεση κλασικών πράξεων ενημέρωσης πάνω στις ίδιες συνόδους. Το Παράδειγμα 5.3 επεξηγεί καλύτερα το παραπάνω πρόβλημα. Ωστόσο, υπάρχει μια *κατάλληλη* ακολουθία από κλασικές πράξεις ενημέρωσης που οδηγεί στους ίδιους ρυθμούς μετάδοσης με εκείνους που υπολογίζονται από την **cupdate**. Αυτή η ακολουθία αποκομίζεται με την ενημέρωση των συνόδων που επιβάλλουν τις μεγαλύτερες μειώσεις τελευταίων. Επομένως, η **cupdate** είναι σειριοποιήσιμη, έτσι ώστε κάθε παράλληλη πράξη ενημέρωσης πάνω σε οποιοδήποτε σύνολο από συνόδους οδηγεί σε ρυθμούς μετάδοσης που μπορούν να αποκομιστούν και με κάποια προσεκτικά επιλεγμένη σειριακή εκτέλεση κλασικών πράξεων ενημέρωσης πάνω στις συνόδους αυτές.

Παράδειγμα 5.3 *Θεωρούμε το δίκτυο του Σχήματος 5-5. Προφανώς, οι σύνοδοι S_1 και S_3*



Σχήμα 5-5: Παράδειγμα δικτύου στο οποίο η εκτέλεση της CUpdate επιφέρει προβλήματα συγχρονισμού

μπορούν να ενημερωθούν παράλληλα. Αρχικά, έστω ότι ο ρυθμός μετάδοσης όλων των συνόδων είναι 0 και ας υποθέσουμε ότι η σύνοδος S_2 ενημερώνεται πρώτα, αποκτώντας ρυθμό μετάδοσης 80. Η ταυτόχρονη ενημέρωση των συνόδων S_1 και S_3 αλλάζει τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων S_1, S_2 και S_3 σε 50, 40 και 40, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η εκτέλεση κλασικών πράξεων ενημέρωσης πάνω στις ίδιες συνόδους με τη σειρά S_2, S_3 και S_1 δεν οδηγεί στην αποκόμιση των ίδιων ρυθμών μετάδοσης για τις συνόδους αυτές. Ωστόσο, αν ενημερώσουμε τη σύνοδο S_3, η οποία επιβάλλει τη μέγιστη μείωση στο ρυθμό μετάδοσης της συνόδου S_2, τελευταία, οδηγούμαστε σε ρυθμούς μετάδοσης ίδιους με εκείνους που αποκομίζονται από την εκτέλεση της cupdate.

Κεφάλαιο 6

Οπτιμιστικοί Αλγόριθμοι Συμφόρησης

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε βασικές ιδιότητες των οπτιμιστικών αλγορίθμων συμφόρησης. Όλες αυτές οι ιδιότητες αναφέρονται σε κάποια εκτέλεση $\alpha = Q_0, i_1, Q_1, \ldots, i_l, Q_l, \ldots$ ενός οπτιμιστικού αλγορίθμου συμφόρησης. Από εδώ και στο εξής παραλείπουμε την αναφορά στην α όταν είναι προφανής από τα συμφραζόμενα. Ιδιότητες των ακμών ελάχιστου ισομεριδίου παρουσιάζονται στην Ενότητα 6.1. Η Ενότητα 6.2 περιγράφει βασικές ιδιότητες για τον τερματισμό των οπτιμιστικών αλγορίθμων συμφόρησης.

6.1 Ιδιότητες των Ακμών Ελάχιστου Ισομεριδίου

Ξεκινάμε αποδεικνύοντας ιδιότητες σταθερότητας των ακμών ελάχιστου ισομεριδίου. Μιλώντας άτυπα, θεωρούμε κάποια σύνοδο που χρησιμοποιεί μια ακμή ελάχιστου ισομεριδίου και αποδεικνύουμε ότι αν ο ρυθμός μετάδοσης της συνόδου αυτής είναι μεγαλύτερος από το ισομερίδιο της ακμής, τότε δεν μπορεί να μειωθεί σε κάποια τιμή χαμηλότερη από το ισομερίδιο αυτό. Πιο τυπικά αποδεικνύουμε:

Πρόταση 6.1 *Έστω ότι ο* Alg *είναι οπτιμιστικός αλγόριθμος συμφόρησης. Για κάθε ακέραιο $l_0 \geq 0$, υποθέτουμε ότι $e \in MFSE_{Q_{l_0}}(\mathcal{S}_j)$ για κάποιο ενεργό σύμπλεγμα $\mathcal{S}_j$ στην Q_{l_0}. Θεωρούμε οποιαδήποτε σύνοδο $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$ τέτοια ώστε $r_{Q_{l_0}}(S) \geq FS_{Q_{l_0}}(e)$. Τότε, για κάθε ακέραιο*

$l \geq l_0$ *ισχύει ότι*

$$r_{Q_l}(S) \quad \geq \quad FS_{Q_{l_0}}(e)\,.$$

Απόδειξη: Με επαγωγή στο l. Για τη βάση της επαγωγής, όπου $l = l_0$, ο ισχυρισμός ισχύει από υπόθεση. Ας υποθέσουμε επαγωγικά ότι για κάποιο ακέραιο $l > l_0$, $r_{Q_{l-1}}(S) \geq FS_{Q_{l_0}}(e)$. Για το επαγωγικό βήμα αποδεικνύουμε ότι $r_{Q_l}(S) \geq FS_{Q_{l_0}}(e)$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $r_{Q_l}(S) \geq r_{Q_{l-1}}(S)$. Από επαγωγική υπόθεση έχουμε τότε ότι $r_{Q_l}(S) \geq FS_{Q_{l_0}}(e)$, όπως απαιτείται. Υποθέτουμε επομένως ότι $r_{Q_l}(S) < r_{Q_{l-1}}(S)$, δηλαδή ο ρυθμός μετάδοσης της συνόδου S μειώνεται από την κατάσταση Q_{l-1} στην Q_l. Από τους ορισμούς της εκτέλεσης και της πράξης ενημέρωσης, αυτό συνεπάγεται ότι $S \cap S_{i_l} \neq \emptyset$ και $r_{Q_l}(S) = r_{Q_l}(S_{i_l})$. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακμή $e' \in S \cap S_{i_l}$. Έστω ότι e'' είναι ακμή τέτοια ώστε $\Delta_{Q_{l-1}}(i_l) = \Delta_{Q_{l-1}}(i_l, e'')$. Μιλώντας άτυπα, η ακμή e'' “επιβάλλει” την μικρότερη αύξηση στο ρυθμό μετάδοσης της συνόδου S_{i_l} στην κατάσταση Q_{l-1}, μεταξύ όλων των ακμών που χρησιμοποιούνται από τη σύνοδο αυτή. Από τους ορισμούς της εκτέλεσης και της πράξης ενημέρωσης η ακμή e'' είναι κορεσμένη στην Q_l. Συνεχίζουμε με την απόδειξη του εξής ισχυρισμού:

Λήμμα 6.1 $r_{Q_l}(S_{i_l}) \geq FS_{Q_l}(e'')$

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $r_{Q_l}(S_{i_l}) < FS_{Q_l}(e'')$. Από τους ορισμούς της εκτέλεσης και της πράξης ενημέρωσης για κάθε δείκτη συνόδου $k \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e''$ ισχύει ότι $r_{Q_l}(S_{i_l}) \geq r_{Q_l}(S_k)$. Επομένως, $FS_{Q_l}(e'') > r_{Q_l}(S_k)$. Το Λήμμα 3.1 υποδηλώνει ότι η ακμή e'' δεν είναι κορεσμένη στην Q_l. Άτοπο. ■

Εφόσον $r_{Q_l}(S) = r_{Q_l}(S_{i_l})$, το Λήμμα 6.1 συνεπάγεται ότι $r_{Q_l}(S) \geq FS_{Q_l}(e'')$. Από την Πρόταση 4.1 ισχύει ότι $FS_{Q_l}(e'') \geq FS_{Q_{l_0}}(e'')$, έτσι ώστε $r_{Q_l}(S) \geq FS_{Q_{l_0}}(e'')$. Αφού $e \in MFSE_{Q_{l_0}}(\mathcal{S}_j)$ έχουμε ότι $FS_{Q_{l_0}}(e'') \geq FS_{Q_{l_0}}(e)$. Επομένως, συνεπάγεται ότι $r_{Q_l}(S) \geq FS_{Q_{l_0}}(e)$, όπως απαιτείται. ■

Ο επόμενος ισχυρισμός συμπληρώνει την Πρόταση 6.1 αποδεικνύοντας ιδιότητες ύπαρξης για κάθε ακμή ελάχιστου ισομεριδίου σε οποιοδήποτε σύμπλεγμα συνόδων. Μιλώντας άτυπα, θεωρούμε οποιαδήποτε σύνοδο που χρησιμοποιεί μια ακμή ελάχιστου ισομεριδίου και αποδεικνύουμε ότι αν όλες οι σύνοδοι που χρησιμοποιούν την ακμή ενημερωθούν έστω και μια φορά, οι ρυθμοί μετάδοσής τους γίνονται μεγαλύτεροι από το ισομερίδιο της ακμής, ενώ μειώσεις κάτω από την τιμή του ισομεριδίου αυτού δεν είναι δυνατές. Τυπικά αποδεικνύουμε:

Πρόταση 6.2 *Έστω ότι ο* Alg *είναι οπτιμιστικός αλγόριθμος συμφόρησης. Για κάθε ακέραιο* $l_0 \geq 0$*, θεωρούμε μια ακμή* $e \in MFSE_{Q_{l_0}}(\mathcal{S}_j)$ *κάποιου ενεργού συμπλέγματος* $\mathcal{S}_j$ *στην* Q_{l_0} *τέτοια ώστε* $\widehat{l_0} \mid e < \infty$*. Τότε, για κάθε* $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$ *και για κάθε ακέραιο* $l \geq \widehat{l_0} \mid e$ *ισχύει ότι*

$$r_{Q_l}(S) \quad \geq \quad FS_{Q_{l_0}}(e)\,.$$

Απόδειξη: Ξεκινάμε με μια άτυπη περιγραφή της απόδειξης. Θεωρούμε το σημείο της εκτέλεσης στο οποίο η σύνοδος S δρομολογείται και το οποίο προηγείται του σημείου στο οποίο όλες οι σύνοδοι έχουν εκτελεστεί τουλάχιστον μία φορά. Αποδεικνύουμε ότι σε αυτό το σημείο, ο ρυθμός μετάδοσης της S δεν είναι μικρότερος από το ισομερίδιο της ακμής e στην κατάσταση Q_{l_0}. Επιχειρηματολογούμε στη συνέχεια ότι η ακμή e παραμένει ακμή ελάχιστου ισομεριδίου πέραν της κατάστασης Q_{l_0}. Αυτό μας επιτρέπει να εκμεταλευτούμε την ιδιότητα σταθερότητας των ακμών ελάχιστου ισομεριδίου, προκειμένου να επιχειρηματολογήσουμε ότι ο ρυθμός μετάδοσης της συνόδου S θα παραμείνει μεγαλύτερος ή ίσος του ισομεριδίου της ακμής e στην κατάσταση Q_{l_0}. Παρουσιάζουμε στη συνέχεια τις λεπτομέρειες της τυπικής απόδειξης.

Εφόσον $e \in MFSE_{Q_{l_0}}(\mathcal{S}_j)$, το Λήμμα 4.2 συνεπάγεται ότι η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης στην Q_{l_0}. Αφού $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, από τον ορισμό του $\widehat{l_0} \mid e$ έχουμε ότι $S = \mathsf{Sched}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q_{l'}, l')$ για κάποιο ακέραιο l' τέτοιο ώστε $l_0 < l' \leq \widehat{l_0} \mid e$. Από την Πρόταση 4.2 (1) ισχύει ότι $FS_{Q_{l'}}(e) = FS_{Q_{l_0}}(e)$, ενώ από την Πρόταση 4.2(2), η e είναι ακμή συμφόρησης στην $Q_{l'}$. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Λήμμα 6.2 $r_{Q_{l'}}(S) \geq FS_{Q_{l_0}}(e)$

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $r_{Q_{l'}}(S) < FS_{Q_{l_0}}(e)$. Έστω ότι η ακμή e' είναι τέτοια ώστε $\Delta_{Q_{l'}}(S) = \Delta_{Q_{l'}}(S, e')$. Δηλαδή, η ακμή e' "επιβάλλει" την ελάχιστη ανασχηματιστική αύξηση στο ρυθμό μετάδοσης της συνόδου S στην κατάσταση $Q_{l'}$, μεταξύ όλων των ακμών που χρησιμοποιούνται από την S. Από τους ορισμούς της εκτέλεσης και της πράξης ενημέρωσης, η ακμή e' είναι κορεσμένη στην κατάσταση $Q_{l'}$.

Εφόσον η e είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q_{l'}$, και η σύνοδος S χρησιμοποιεί και την e και την e' θα πρέπει να είναι $FS_{Q_{l'}}(e) \leq FS_{Q_{l'}}(e')$. Επειδή $FS_{Q_{l'}}(e) = FS_{Q_{l_0}}(e)$, αυτό συνεπάγεται ότι $FS_{Q_{l_0}}(e) \leq FS_{Q_{l'}}(e')$. Αφού $r_{Q_{l'}}(S) < FS_{Q_{l_0}}(e)$, έχουμε πως $r_{Q_{l'}}(S) < FS_{Q_{l'}}(e')$. Από τους ορισμούς της εκτέλεσης και της πράξης ενημέρωσης, για κάθε δείκτη συνόδου $k \in \mathcal{A}_{Q_{l'}} \mid e$ είναι $r_{Q_{l'}}(S_k) \leq r_{Q_{l'}}(S)$, έτσι ώστε $r_{Q_{l'}}(S_k) < FS_{Q_{l'}}(e')$. Από το Λήμμα 3.1 συνεπάγεται επομένως ότι η ακμή e' δεν είναι κορεσμένη στην κατάσταση $Q_{l'}$. Άτοπο. ■

Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε ακέραιο $l \geq \widehat{l_0} \mid e$. Προφανώς, $l \geq l'$. Λόγω της Πρότασης 6.1, η Πρόταση 4.3 και το Λήμμα 6.2 υποδηλώνουν ότι $r_{Q_l}(S) \geq FS_{Q_{l_0}}(e)$, όπως απαιτείται. ■

6.2 Ιδιότητες Τερματισμού

Σε αυτήν την ενότητα αποδεικνύουμε θεμελιώδεις ιδιότητες τερματισμού των οπτιμιστικών αλγορίθμων συμφόρησης. Η πρώτη ιδιότητα αναφέρεται σε ενεργές συνόδους που χρησιμοποιούν ακμές ελάχιστου ισομεριδίου και αποδεικνύει ότι όταν όλες οι σύνοδοι που χρησιμοποιούν μια τέτοια ακμή δρομολογηθούν για ενημέρωση έστω και για μια φορά, όλες αποκτούν τον τελικό ρυθμό μετάδοσής τους. Τυπικά αποδεικνύουμε το εξής.

Θεώρημα 6.1 *Έστω ότι ο* Alg *είναι οπτιμιστικός αλγόριθμος συμφόρησης. Για κάθε ακέραιο* $l_0 \geq 0$ *τέτοιον ώστε* $\widehat{l_0} < \infty$, *θεωρούμε οποιαδήποτε ακμή* $e \in MFSE_{Q_{l_0}}(\mathcal{S}_j)$ *κάποιου ενεργού συμπλέγματος* $\mathcal{S}_j$ *στην* Q_{l_0} *τέτοια ώστε* $\widehat{l_0} \mid e < \infty$. *Τότε, για κάθε* $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, *ισχύει ότι* $S \in \mathcal{D}_{Q_{\widehat{l_0}|e}}$.

Απόδειξη: Αρχικά, παρουσιάζουμε μια άτυπη περιγραφή της απόδειξης. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ενεργή σύνοδο στην κατάσταση Q_{l_0} και αποδεικνύουμε ότι αφότου όλες οι σύνοδοι θα δρομολογηθούν έστω μια φορά, η σύνοδος αυτή θα έχει αποκτήσει ρυθμό μετάδοσης ίσο με το ισομερίδιο της ακμής e στην Q_{l_0}. Εκμεταλευόμαστε στη συνέχεια την ιδιότητα συμφόρησης της ακμής e στην κατάσταση Q_{l_0}, προκειμένου να επιχειρηματολογήσουμε ότι η e παραμένει ακμή συμφόρησης στη συνέχεια και ότι το ισομερίδιο της διατηρείται σταθερό. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, διεξάγουμε το συμπέρασμα ότι ο ρυθμός μετάδοσης της συνόδου είναι τελικός. Συνεχίζουμε με τις λεπτομέρειες της τυπικής απόδειξης.

Θεωρούμε οποιαδήποτε σύνοδο $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$. Αρχικά αποδεικνύουμε:

Λήμμα 6.3 $r_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S) = FS_{Q_{l_0}}(e)$

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $r_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S) \neq FS_{Q_{l_0}}(e)$. Από την Πρόταση 6.2 έχουμε ότι $r_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S) \geq FS_{Q_{l_0}}(e)$. Επομένως, $r_{Q_{\widehat{l_0}}|e}(S) > FS_{Q_{l_0}}(e)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e} r_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_i) &= r_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S) + \sum_{\substack{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e, \\ S_i \neq S}} r_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_i) \\
&> FS_{Q_{l_0}}(e) + \sum_{\substack{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e, \\ S_i \neq S}} r_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_i) \\
&\geq FS_{Q_{l_0}}(e) + \sum_{\substack{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e, \\ S_i \neq S}} FS_{Q_{l_0}}(e) \quad \text{(λόγω της Πρότασης 6.2)} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e} FS_{Q_{l_0}}(e) \\
&= |\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e| \, FS_{Q_{l_0}}(e) \\
&= cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e),
\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι η συνθήκη χωρητικότητας παραβιάζεται. Άτοπο. ∎

Εφόσον $e \in MFSE_{Q_{l_0}}(\mathcal{S}_j)$, το Λήμμα 4.2 υποδηλώνει ότι η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης στην Q_{l_0}. Από τον ορισμό του $\widehat{l_0} \mid e$ συνεπάγεται ότι $e \in AE_{Q_{\widehat{l_0}|e}}$. Συνεπώς, η Πρόταση 4.2(2) υποδηλώνει ότι η e είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q_{\widehat{l_0}|e}$. Ωστόσο, από την Πρόταση 4.2(1) έχουμε ότι $FS_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(e) = FS_{Q_{l_0}}(e)$, έτσι ώστε, από το Λήμμα 6.3 συνεπάγεται ότι

$r_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(e) = FS_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(e)$. Επειδή ο Term είναι απενεργοποιητής συμφόρησης, αυτό υποδηλώνει ότι $S \in \mathcal{D}_{Q_{\widehat{l_0}|e}}$. ■

Η τελευταία ιδιότητα τερματισμού που παρουσιάζουμε στη συνέχεια, είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.1. Μιλώντας μη αυστηρά, αποδεικνύουμε ότι η δρομολόγηση οποιασδήποτε ακολουθίας συνόδων που συμπεριλαμβάνει όλες τις ενεργές συνόδους, οδηγεί στην απενεργοποίηση τουλάχιστον ενός εξ αυτών.

Θεώρημα 6.2 *Έστω ότι ο* Alg *είναι οπτιμιστικός αλγόριθμος συμφόρησης. Για κάθε ακέραιο $l_0 \geq 0$, θεωρούμε ένα οποιοδήποτε ενεργό σύμπλεγμα $\mathcal{S}_j$ στην Q_{l_0}. Τότε, υπάρχει κάποια σύνοδος $S \in \mathcal{S}_j \cap \mathcal{A}_{Q_{l_0}}$ τέτοια ώστε $S \in \mathcal{D}_{Q_{\widehat{l_0}}}$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε οποιαδήποτε ακμή $e \in MFSE_{Q_{l_0}}(\mathcal{S}_j)$, και υποθέτουμε ότι $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$ είναι μια οποιαδήποτε σύνοδος. Προφανώς, $S \in \mathcal{S}_j \cap \mathcal{A}_{Q_{l_0}}$. Από το Θεώρημα 6.1 έχουμε ότι $S \in \mathcal{D}_{Q_{\widehat{l_0}}}$, όπως απαιτείται. ■

Παρατηρούμε ότι όλες οι αποδείξεις των ιδιοτήτων των οπτιμιστικών αλγορίθμων συμφόρησης που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα δεν κάνουν καμιά υπόθεση για το είδος του δρομολογητή. Επομένως αυτές οι ιδιότητες ισχύουν για όλα τα είδη δρομολογητών, ντετερμινιστικών ή μη.

Κεφάλαιο 7

Κάτω Ορια

7.1 Μια Γενική Κατασκευή Δικτύου

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε μια γενική κατασκευή δικτύου που συσχετίζεται με οποιαδήποτε (πεπερασμένη ή άπειρη) ακολουθία $\mathsf{Seq} = \sigma_1, \sigma_2, \ldots$, όπου για κάθε $i \geq 1$ είναι $\sigma_i \in [n]$. Έστω ότι d είναι ένας οποιοσδήποτε άρτιος ακέραιος και n ένα οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του d.[1] Κατασκευάζουμε ένα δίκτυο $G = G(\mathsf{Seq}) = (V(\mathsf{Seq}), E(\mathsf{Seq}))$, σαν συνάρτηση του Seq, πάνω στο οποίο εξαπλώνεται ένα σύνολο από συνόδους $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$.

Στην κατασκευή μας χρησιμοποιούμε δύο (πεπερασμένες) ακολουθίες πραγματικών αριθμών b και p, κάθε μια με μήκος $d/2$, προκειμένου να αποδώσουμε χωρητικότητες στις ακμές. Οι ακολουθίες αυτές ορίζονται αναδρομικά ως εξής.

- $b_1 = 0$ και $p_1 = 2^p$ για κάποιο ακέραιο $p \geq 2d$,
- για κάθε δείκτη r, $1 < r \leq d/2$, $b_r = b_{r-1} + p_{r-1}/2$ και $p_r = p_{r-1}/4$.

Ο επόμενος ισχυρισμός αναφέρεται σε μια συνδυαστική ιδιότητα των ακολουθιών b_r και p_r που θα είναι χρήσιμη αργότερα στις αποδείξεις μας .

[1] Γνωστές τεχνικές "padding" μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση που το n δεν είναι πολλαπλάσιο του d.

Πρόταση 7.1 *Για κάθε δείκτη $r \geq 1$ ισχύει ότι*

$$b_r + \frac{p_r}{4} \quad < \quad b_{r-1} + \frac{3}{4} \cdot p_{r-1}$$

Απόδειξη: Προφανώς,

$$\begin{aligned}
b_r + \frac{p_r}{4} &= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{p_{r-1}}{4} \\
&\quad \text{(λόγω αναδρομικού ορισμού των } b_r \text{ και } p_r\text{)} \\
&= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{16} \\
&= b_{r-1} + \frac{9}{16} \cdot p_{r-1} \\
&< b_{r-1} + \frac{3}{4} \cdot p_{r-1} \,,
\end{aligned}$$

όπως απαιτείται. ■

Το υπολειπόμενο μέρος της ενότητας αυτής είναι οργανωμένο ως εξής. Η περιγραφή της κατασκευής παρουσιάζεται στην Ενότητα 7.1.1, ενώ η Ενότητα 7.1.2 περιγράφει ένα παράδειγμα. Τέλος, η Ενότητα 7.1.3 αποδεικνύει απλές ιδιότητες που σχετίζονται με την κατασκευή.

7.1.1 Κατασκευή

Χωρίζουμε το σύνολο συνόδων $\mathcal{S}$ σε n/d συμπλέγματα $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_{n/d}$ τέτοια ώστε για κάθε j, $1 \leq j \leq n/d$,

$$\mathcal{S}_j \quad = \quad \{S_{(j-1)d+1}, S_{(j-1)d+2}, \ldots, S_{(j-1)d+d}\} \,.$$

Παρατηρούμε ότι $|\mathcal{S}_j| = d$.

Για κάθε σύμπλεγμα $\mathcal{S}_j$, κατασκευάζουμε ένα δίκτυο

$$G_j \quad = \quad G_j(\mathsf{Seq} \mid \mathcal{S}_j) \;=\; (V_j(\mathsf{Seq} \mid \mathcal{S}_j), E_j(\mathsf{Seq} \mid \mathcal{S}_j)) \,,$$

με το σύνολο συνόδων $\mathcal{S}_j$ να εκτελούνται στο $G_j(\mathsf{Seq} \mid \mathcal{S}_j)$. Έχουμε:

$$G(\mathsf{Seq}) \quad = \quad (\cup_{1 \leq j \leq n/d} V_j(\mathsf{Seq} \mid \mathcal{S}_j), \cup_{1 \leq j \leq n/d} E_j(\mathsf{Seq} \mid \mathcal{S}_j))\,.$$

Επομένως, κάθε ανεξάρτητο δίκτυο G_j είναι μια συνάρτηση της ακολουθίας $\mathsf{Seq} \mid \mathcal{S}_j$, ενώ το δίκτυο G είναι η "παράλληλη σύνθεση" των διαφόρων υποδικτύων.

Η κατασκευή του υποδικτύου G_j πραγματοποιείται μέσω μιας ακολουθίας των $d/2$ το πολύ *φάσεων*. Στη φάση r, $1 \leq r \leq d/2$, το δίκτυο $G_j^{(r)} = (V_j^{(r)}, E_j^{(r)})$ κατασκευάζεται, έτσι ώστε

$$G_j \quad = \quad (\cup_{1 \leq r \leq d/2} V_j^{(r)}, \cup_{1 \leq r \leq d/2} E_j^{(r)})\,.$$

Επομένως, το δίκτυο G_j είναι η "παράλληλη σύνθεση" των διαφόρων υποδικτύων $G_j^{(r)}$.

Για κάθε r, $1 \leq r \leq d/2$, η κατασκευή του δικτύου $G_j^{(r)}$ χρησιμοποιεί τους b_r και p_r ως παραμέτρους. Επίσης χρησιμοποιεί τα ακόλουθα σύνολα και ακολουθίες:

- ένα σύνολο από δείκτες $\mathcal{I}_j^{(r)} \subseteq \mathcal{S}_j$ τέτοιο ώστε $|\mathcal{I}_j^{(r)}| = d - 2(r-1)$
- μια ακολουθία $\mathsf{Seq}_j^{(r)}$, η οποία είναι πρόσφυμα της $\mathsf{Seq} \mid \mathcal{S}_j$,
- ένα σύνολο $\{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\} \subseteq \mathcal{I}_j^{(r)}$. Διαισθητικά, τα $i_f^{(r)}$ και $i_l^{(r)}$ θα οριστούν να είναι ο πρώτος και ο τελευταίος δείκτης αντίστοιχα, της $\mathsf{Seq}_j^{(r)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(r)}$, ή αυθαίρετοι δείκτες από το σύνολο $\mathcal{I}_j^{(r)}$, στην περίπτωση που $|\mathsf{Seq}_j^{(r)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(r)}| < 2$.

Αυτά τα σύνολα και οι ακολουθίες ορίζονται ως εξής.

Για τη βάση της επαγωγής, όπου $r = 1$ ισχύει ότι $\mathcal{I}_j^{(1)} := \mathcal{S}_j$, $\mathsf{Seq}_j^{(1)} := \mathsf{Seq} \mid \mathcal{S}_j$, ενώ το σύνολο $\{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$ ορίζεται εξετάζοντας τις ακόλουθες περιπτώσεις.

1. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\mathsf{Seq}_j^{(1)} = \lambda$, έτσι ώστε $\mathsf{Seq}_j^{(1)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(1)} = \lambda$. Τότε, τα $i_f^{(1)}$ και $i_l^{(1)}$ είναι οποιοιδήποτε δείκτες στο $\mathcal{I}_j^{(1)}$.

2. Υποθέτουμε τώρα ότι $\mathsf{Seq}_j^{(1)} \neq \lambda$, έτσι ώστε $\mathsf{Seq}_j^{(1)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(1)} \neq \lambda$. Εξετάζουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

α. έστω ότι $|\mathsf{Seq}_j^{(1)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(1)}| < |\mathcal{I}_j^{(1)}|$. Τότε, ο $i_f^{(1)}$ είναι ο πρώτος δείκτης της ακολουθίας $\mathsf{Seq}_j^{(1)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(1)}$, ενώ ο $i_l^{(1)}$ είναι οποιοσδήποτε δείκτης του $\mathcal{I}_j^{(1)}$ που δεν περιέχεται στην ακολουθία $\mathsf{Seq}_j^{(1)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(1)}$,

β. έστω ότι $|\mathsf{Seq}_j^{(1)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(1)}| = |\mathcal{I}_j^{(1)}|$, και έστω $\mathsf{Seq}_j^{(1)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(1)} = i_f \dots i_l$. Τότε, $i_f^{(1)} := i_f$ και $i_l^{(1)} := i_l$.

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι έχουμε ορίσει το σύνολο $\mathcal{I}_j^{(r-1)}$, την ακολουθία $\mathsf{Seq}_j^{(r-1)}$ και το σύνολο $\{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}$, για κάθε ακέραιο r τέτοιον ώστε $2 \leq r < d/2$. Για το επαγωγικό βήμα, περιγράφουμε πως κατασκευάζονται τα $\mathcal{I}_j^{(r)}$, $\mathsf{Seq}_j^{(r)}$ και $\{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Ορίζουμε $\mathcal{I}_j^{(r)} := \mathcal{I}_j^{(r-1)} \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}$, $\mathsf{Seq}_j^{(r)} := (\mathsf{Seq}_j^{(r-1)} \downarrow \mathcal{I}_j^{(r-1)}) \mid \mathcal{I}_j^{(r)}$, ενώ το σύνολο $\{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$ ορίζεται εξετάζοντας τις ακόλουθες περιπτώσεις.

1. Έστω ότι $\mathsf{Seq}_j^{(r)} = \lambda$, έτσι ώστε $\mathsf{Seq}_j^{(r)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(r)} = \lambda$. Τότε, τα $i_f^{(r)}, i_l^{(r)}$ είναι οποιοιδήποτε δείκτες στο σύνολο $\mathcal{I}_j^{(r)}$.

2. Έστω τώρα ότι $\mathsf{Seq}_j^{(r)} \neq \lambda$, έτσι ώστε $\mathsf{Seq}_j^{(r)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(r)} \neq \lambda$. Εξετάζουμε ξανά τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

   α. έστω ότι $|\mathsf{Seq}_j^{(r)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(r)}| < |\mathcal{I}_j^{(r)}|$. Τότε, ο $i_f^{(r)}$ είναι ο πρώτος δείκτης της ακολουθίας $\mathsf{Seq}_j^{(r)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(r)}$, ενώ ο $i_l^{(r)}$ είναι οποιοσδήποτε δείκτης του συνόλου $\mathcal{I}_j^{(r)}$ που δεν περιέχεται στην ακολουθία $\mathsf{Seq}_j^{(r)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(r)}$,

   β. έστω ότι $|\mathsf{Seq}_j^{(r)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(r)}| = |\mathcal{I}_j^{(r)}|$, και έστω $\mathsf{Seq}_j^{(r)} \uparrow \mathcal{I}_j^{(r)} = i_f \dots i_l$. Τότε, $i_f^{(r)} := i_f$ και $i_l^{(r)} := i_l$.

Συνεχίζουμε με την περιγραφή της κατασκευής του δικτύου $G_j^{(r)}$, για κάθε ακέραιο r, $1 \leq r \leq d/2$.

- Οι σύνοδοι $i_f^{(r)}$ και $i_l^{(r)}$ μοιράζονται μια ακμή $e_{i_l}^{(r)}$ με χωρητικότητα $cap(e_{i_l}^{(r)}) = 2b_r + p_r/2$,
- για κάθε $i \in \mathcal{I}_j^{(r)} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, οι σύνοδοι $i_f^{(r)}$ και i μοιράζονται μια ακμή $e_i^{(r)}$ με χωρητικότητα $cap(e_i^{(r)}) = 2b_r + p_r$.

Παρατηρούμε ότι αφού δύο σύνοδοι εξάγονται από το $\mathcal{S}_j$ σε κάθε μια από τις $d/2$ φάσεις, όλες οι σύνοδοι του $\mathcal{S}_j$ θα συμμετέχουν τελικώς στην κατασκευή.

7.1.2 Παράδειγμα

Περιγράφουμε ένα αναλυτικό παράδειγμα προκειμένου να επιδείξουμε τον τρόπο κατασκευής του γενικού δικτύου. Έστω ότι $d = 6$ και $n = 12$. Θεωρούμε την (άπειρη) ακολουθία

$$\mathsf{Elev} = 1, 2, \ldots, 11, 12, 12, 11, \ldots, 2, 1, 1, 2, \ldots, 11, 12, 12, 11, \ldots, 2, 1, \ldots.$$

Κατασκευάζουμε το δίκτυο $G = G(\mathsf{Elev}) = (V(\mathsf{Elev}), E(\mathsf{Elev}))$, σαν συνάρτηση της ακολουθίας Elev με σύνολο συνόδων $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_{12}\}$ στο G. Διαιρούμε την $\mathcal{S}$ σε $12/6 = 2$ συμπλέγματα $\mathcal{S}_1$ και $\mathcal{S}_2$, που το καθένα περιέχει έξι συνόδους, έτσι ώστε $\mathcal{S}_1 = \{S_1, \ldots, S_6\}$ και $\mathcal{S}_2 = \{S_7, \ldots, S_{12}\}$. Έστω $p = 10$, έτσι ώστε $b_1 = 0$ και $p_1 = 2^{10} = 1024$.

Για την πρώτη φάση, όπου $r = 1$ έχουμε ότι $\mathcal{I}_1^{(1)} = \mathcal{S}_1$, και

$$\begin{aligned} \mathsf{Elev}_1^{(1)} &= \mathsf{Elev} \mid \mathcal{S}_1 \\ &= 1, 2, \ldots, 6, 6, 5, \ldots, 1, 1, 2, \ldots, 6, 6, 5, \ldots, 1, \ldots, 1, 2, \ldots, 6, 6, 5, \ldots, 1, \ldots. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\mathsf{Elev}_1^{(1)} \downarrow \mathcal{S}_1^{(1)} = 1, 2, \ldots, 6$, έτσι ώστε $f_1^{(1)} = 1$ και $l_1^{(1)} = 6$. Στη συνέχεια περιγράφουμε την κατασκευή του υποδικτύου $G_1^{(1)}$:

- οι σύνοδοι 1 και 6 μοιράζονται την ακμή $e_6^{(1)}$ με χωρητικότητα $cap(e_6^{(1)}) = 2b_1 + p_1/2 = 512$.
- για κάθε $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, οι σύνοδοι 1 και i μοιράζονται την ακμή $e_i^{(1)}$ με χωρητικότητα $cap(e_i^{(1)}) = 2b_1 + p_1 = 1024$.

Επιπρόσθετα, $\mathcal{I}_2^{(1)} = \mathcal{S}_2$ και

$$\begin{aligned} \mathsf{Elev}_2^{(1)} &= \mathsf{Elev} \mid \mathcal{S}_2 \\ &= 7, 8, \ldots, 12, 12, 11, \ldots, 7, 7, 8, \ldots, 12, 12, 11, \ldots, 7, \ldots, 7, 8, \ldots, 12, \ldots. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\mathsf{Elev}_2^{(1)} \downarrow \mathcal{S}_2^{(1)} = 7, 8, \ldots, 12$, έτσι ώστε $f_2^{(1)} = 7$ και $l_2^{(1)} = 12$. Η κατασκευή του υποδικτύου $G_2^{(1)}$ γίνεται με παρόμοιο τρόπο:

- οι σύνοδοι 7 και 12 μοιράζονται την ακμή $e_{12}^{(1)}$ με χωρητικότητα $cap(e_{12}^{(1)}) = 2b_1 + p_1/2 = 512$.
- για κάθε $i \in \{8, 9, 10, 11\}$, οι σύνοδοι 7 και i μοιράζονται την ακμή $e_i^{(1)}$ με χωρητικότητα $cap(e_i^{(1)}) = 2b_1 + p_1 = 1024$.

Συνεχίζουμε με την περιγραφή της δεύτερης φάσης, όπου $r = 2$. Προφανώς, $\mathcal{I}_1^{(2)} = \mathcal{I}_1^{(1)} \setminus \{1, 6\} = \{2, 3, 4, 5\}$ και

$$\begin{aligned} \mathsf{Elev}_1^{(2)} &= (\mathsf{Elev}_1^{(1)} \downarrow \mathcal{I}_1^{(1)}) \mid \mathcal{I}_1^{(2)} \\ &= 5,4,3,2,2,3,4,5,5,4,3,2,2,3,4,5,\ldots,5,4,3,2,2,3,4,5,\ldots. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\mathsf{Elev}_1^{(2)} \uparrow \mathcal{I}_1^{(2)} = 5, 4, 3, 2$, έτσι ώστε $f_1^{(2)} = 5$ και $l_1^{(2)} = 2$. Συνεχίζουμε με την περιγραφή της κατασκευής του υποδικτύου $G_1^{(2)}$:

- οι σύνοδοι 5 και 2 μοιράζονται μια ακμή $e_2^{(2)}$ με χωρητικότητα $cap(e_2^{(2)}) = 2b_2 + p_2/2 = 1152$.
- για κάθε $i \in \{3, 4\}$, οι σύνοδοι 5 και i μοιράζονται μια ακμή $e_i^{(2)}$ με χωρητικότητα $cap(e_i^{(2)}) = 2b_2 + p_2 = 1280$.

Επιπρόσθετα, $\mathcal{I}_2^{(2)} = \mathcal{I}_2^{(1)} \setminus \{7, 12\} = \{8, 9, 10, 11\}$ και

$$\begin{aligned} \mathsf{Elev}_2^{(2)} &= (\mathsf{Elev}_2^{(1)} \downarrow \mathcal{I}_2^{(1)}) \mid \mathcal{I}_2^{(2)} \\ &= 11,10,9,8,8,9,10,11,11,10,9,8,8,9,10,11,\ldots,11,10,9,8,8,9,10,11,\ldots. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\mathsf{Elev}_2^{(2)} \uparrow \mathcal{I}_2^{(2)} = 11, 10, 9, 8$, έτσι ώστε $f_2^{(2)} = 11$ και $l_2^{(2)} = 8$. Συνεχίζουμε με την περιγραφή της κατασκευής του υποδικτύου $G_2^{(2)}$:

- οι σύνοδοι 11 και 8 μοιράζονται μια ακμή $e_8^{(2)}$ με χωρητικότητα $cap(e_8^{(2)}) = 2b_2 + p_2/2 = 1152$.
- για κάθε $i \in \{9, 10\}$, οι σύνοδοι 11 και i μοιράζονται μια ακμή $e_i^{(2)}$ με χωρητικότητα $cap(e_i^{(2)}) = 2b_2 + p_2 = 1280$.

Συνεχίζουμε με την τρίτη φάση στην οποία $r = 3$. Προφανώς, $\mathcal{I}_1^{(3)} = \mathcal{I}_1^{(2)} \setminus \{2, 5\} = \{3, 4\}$ και

$$\begin{aligned}\mathsf{Elev}_1^{(3)} &= (\mathsf{Elev}_1^{(2)} \downarrow \mathcal{I}_1^{(2)}) \mid \mathcal{I}_1^{(3)} \\ &= 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 3, \ldots, 3, 4, 4, 3, \ldots.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\mathsf{Elev}_1^{(3)} \uparrow \mathcal{I}_1^{(3)} = 3, 4$, έτσι ώστε $f_1^{(3)} = 3$ και $l_1^{(3)} = 4$. Συνεχίζουμε με την περιγραφή της κατασκευής του υποδικτύου $G_1^{(3)}$:

- οι σύνοδοι 3 και 4 μοιράζονται μια ακμή $e_4^{(3)}$ με χωρητικότητα $cap(e_4^{(3)}) = 2b_3 + p_3/2 = 2 \cdot 640 + 64/2 = 1312$.

Επιπρόσθετα, $\mathcal{I}_2^{(3)} = \mathcal{I}_2^{(2)} \setminus \{8, 11\} = \{9, 10\}$, και

$$\begin{aligned}\mathsf{Elev}_2^{(3)} &= (\mathsf{Elev}_2^{(2)} \downarrow \mathcal{I}_2^{(2)}) \mid \mathcal{I}_2^{(3)} \\ &= 9, 10, 10, 9, 9, 10, 10, 9, \ldots, 9, 10, 10, 9, \ldots.\end{aligned}$$

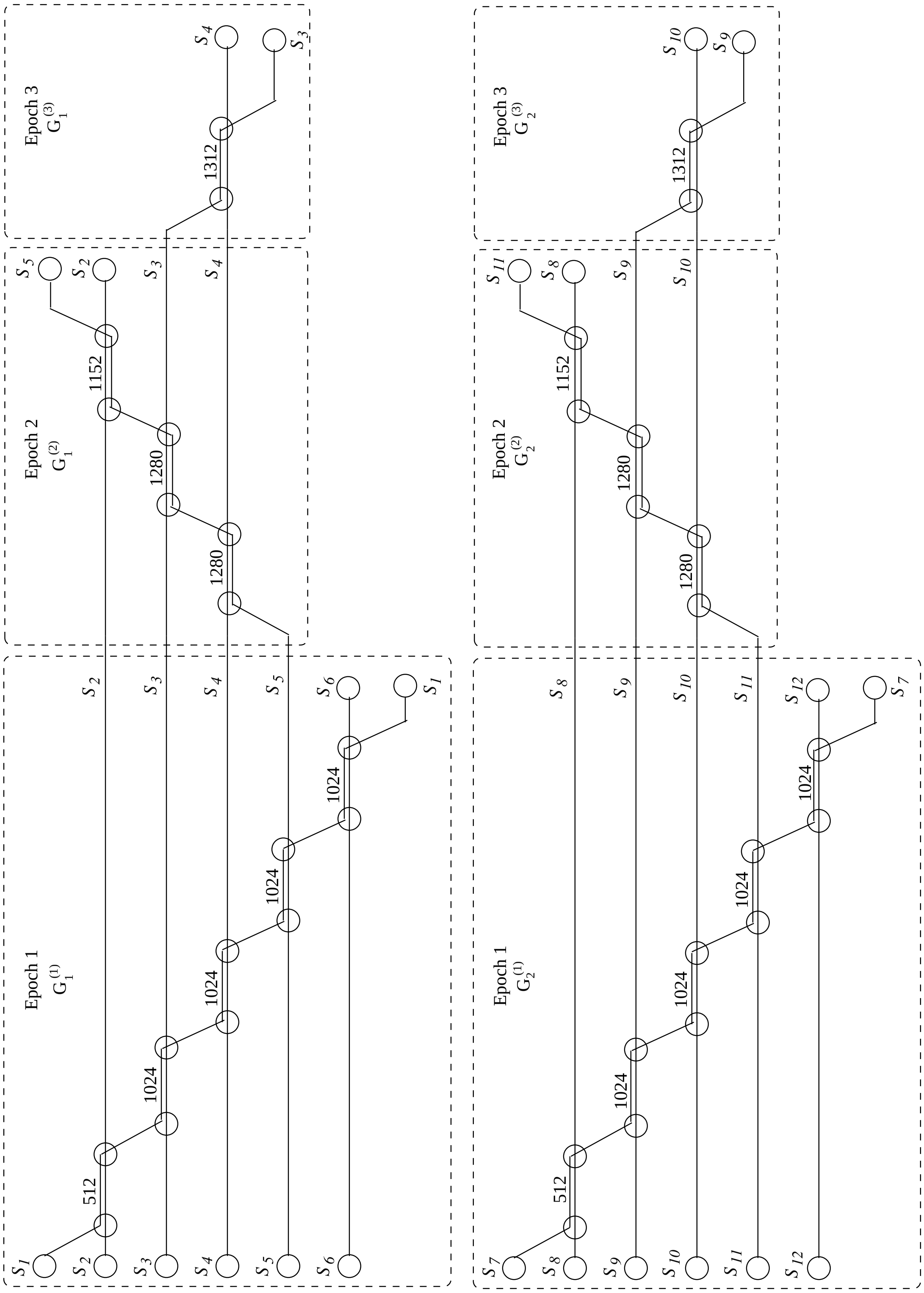
Συνεπώς, $\mathsf{Elev}_2^{(3)} \uparrow \mathcal{I}_2^{(3)} = 9, 10$. Συνεχίζουμε με την περιγραφή της κατασκευής του υποδικτύου $G_2^{(3)}$:

- οι σύνοδοι 9 και 10 μοιράζονται μια ακμή $e_{10}^{(3)}$ με χωρητικότητα $cap(e_{10}^{(3)}) = 2b_3 + p_3/2 = 2 \cdot 640 + 64/2 = 1312$.

Το δίκτυο $G(\mathsf{Elev})$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 7-1.

7.1.3 Απλές Ιδιότητες

Προφανώς, για κάθε δείκτη r, $1 < r \leq d/2$, το σύνολο $\mathcal{I}_j^{(r)}$ δεν περιέχει ούτε το $i_f^{(r-1)}$ ούτε το $i_l^{(r-1)}$. Εφόσον $\mathcal{I}_j^{(d/2)} \subset \mathcal{I}_j^{(d/2-1)} \subset \ldots \subset \mathcal{I}_j^{(1)}$, συνεπάγεται ότι για κάθε δείκτη r', $r < r' \leq d/2$, το σύνολο $\mathcal{I}_j^{(r')}$ δεν περιέχει ούτε το $i_f^{(r-1)}$ ούτε το $i_l^{(r-1)}$. Επομένως, λόγω του τρόπου κατασκευής του δικτύου $G_j^{(r')}$, $r \leq r' \leq d/2$, έχουμε άμεσα:



Σχήμα 7-1: Το δίκτυο $G(\mathsf{Elev})$

Πρόταση 7.2 *Για κάθε δείκτη r, όπου $1 < r \leq d/2$, και κάθε δείκτη r' τέτοιον ώστε $r \leq r' \leq d/2$, ούτε το $i_f^{(r-1)}$ ούτε το $i_l^{(r-1)}$ χρησιμοποιούν οποιαδήποτε ακμή του συνόλου $E_j^{(r')}$.*

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι η χωρητικότητα *κάθε* ακμής στο $E_j^{(r)}$ ξεπερνά την χωρητικότητα *οποιασδήποτε* ακμής στο $E_j^{(r-1)}$.

Πρόταση 7.3 *Έστω ότι $e^{(r)}$ και $e^{(r-1)}$ είναι οποιεσδήποτε ακμές στο $E_j^{(r)}$ και $E_j^{(r-1)}$, αντίστοιχα. Τότε,*

$$cap(e^{(r)}) \quad > \quad cap(e^{(r-1)}) \, .$$

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του δικτύου, ισχύει ότι $cap(e^{(r)}) \geq 2b_r + p_r/2$ και $cap(e^{(r-1)}) \leq 2b_{r-1} + p_{r-1}$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι $2\,b_r + p_r/2 > 2\,b_{r-1} + p_{r-1}$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} 2b_r + \frac{p_r}{2} &= 2\left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) + \frac{p_r}{2} && (\text{εξ ορισμού του } b_r) \\ &= 2b_{r-1} + p_{r-1} + \frac{p_r}{2} \\ &> 2b_{r-1} + p_{r-1} && (\text{επειδή } p_r \geq 0)\,, \end{aligned}$$

όπως απαιτείται. ∎

7.2 Ντετερμινιστικοί Αλγόριθμοι Χωρίς Γνώση

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε ένα κάτω όριο ίσο με $\Omega(dn)$ στην πολυπλοκότητα σύγκλισης κάθε ντετερμινιστικού αλγορίθμου συμφόρησης που λειτουργεί χωρίς γνώση και υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου. Η απόδειξη χρησιμοποιεί το δίκτυο του οποίου η κατασκευή περιγράφτηκε στην Ενότητα 7.1.

Θεώρημα 7.1 *Έστω ότι ο* Alg *είναι ντετερμινιστικός, οπτιμιστικός αλγόριθμος συμφόρησης που λειτουργεί χωρίς γνώση και υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-*

ελαχίστου. Τότε,

$$\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}} \ \geq \ \frac{dn}{4} + \frac{n}{2}\,.$$

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε ότι

$$\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle) \ = \ dn/4 + n/2\,.$$

Για να το αποδείξουμε, υπολογίζουμε την πολυπλοκότητα $\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}_j\rangle)$ για κάθε σύμπλεγμα $\mathcal{S}_j$, $j \geq 1$, και αθροίζουμε τα αποτελέσματα για όλα τα συμπλέγματα. Για το λόγο αυτό, επικεντρώνουμε την προσοχή μας στην εκτέλεση α του Alg στο δίκτυο $G_j(\mathsf{Sched} \mid \mathcal{S}_j)$. Ωστόσο, για λόγους απλότητας, παραλείπουμε κατά μήκος της απόδειξής μας, το δείκτη j του συμπλέγματος.

Ορίζουμε την ακολουθία από καταστάσεις $Q^{(0)}, Q^{(1)}, \ldots$ ως ακολούθως. $Q^{(0)} = Q_0$ και για κάθε δείκτη $r \geq 1$ τέτοιον ώστε $l_r < \infty$, $Q^{(r)} = Q_{l_r}$. Μιλώντας μη αυστηρά, η $Q^{(r)}$ είναι η τελευταία κατάσταση στην φάση εκτέλεσης $\alpha^{(l_r)}$ της α. Για κάθε δείκτη $r \geq 1$ τέτοιον ώστε $l_r < \infty$, ορίζουμε την κατάσταση $Q_f^{(r)}$ να είναι η πρώτη κατάσταση στη φάση εκτέλεσης $\alpha^{(l_r)}$ στην οποία η σύνοδος που δρομολογείται μπροστά από την $Q_f^{(r)}$ είναι ενεργή σύνοδος στην κατάσταση $\overrightarrow{Q^{(r-1)}}$. Παρατηρούμε ότι ο τρόπος κατασκευής του δκτύου $G(\mathsf{Sched})$ υποδηλώνει ότι για κάθε φάση εκτέλεσης $\alpha^{(l_r)}$, η σύνοδος $i_f^{(r)}$ δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση $Q_f^{(r)}$.

Το βασικότερο μέρος της απόδειξης αποτελείται από το ακόλουθο τεχνικό λήμμα.

Λήμμα 7.1 *Για κάθε ακέραιο r, $1 \leq r \leq d/2$, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) $l_r < \infty$,

(2) *για κάθε σύνοδο* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$,

  (α) *αν* $i \in \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, *τότε* $r_{Q^{(r)}}(S_i) = b_r + p_r/4$, *και*

  (β) *αν* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, *τότε* $r_{Q^{(r)}}(S_i) = b_r + p_r/2$,

(3) *για κάθε σύνοδο* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ *ισχύει ότι* $i \in \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$ *αν και μόνο αν*

$$i \in \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(r)}),$$

(4) *για κάθε σύνοδο* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, *κάθε ακέραιο* r' *τέτοιον ώστε* $1 \leq r' \leq r$, *και κάθε ακμή* $e_i^{(r')}$,

   (α) $residual_{Q^{(r)}}(e_i^{(r')}) \geq p_r/4$, *και*

   (β) $FS_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}(e_i^{(r')}) \geq b_r + 3p_r/4$.

Το Λήμμα 7.1 αποδεικνύει ότι η κατάσταση $\overrightarrow{Q^{(r-1)}}$ ορίζεται για κάθε δείκτη r τέτοιον ώστε $1 \leq r \leq d/2$, ενώ παράλληλα αναφέρεται στις ενεργές συνόδους της κατάστασης $\overrightarrow{Q^{(r-1)}}$. Μιλώντας άτυπα, η συνθήκη (1) τονίζει ότι όλες αυτές οι σύνοδοι δρομολογούνται για ενημέρωση κατά τη διάρκεια της φάσης εκτέλεσης $\alpha^{(l_r)}$, ενώ η συνθήκη (2) καθορίζει τους ρυθμούς μετάδοσής τους στο τέλος της φάσης $\alpha^{(l_r)}$. Επιπρόσθετα, η συνθήκη (3) επιδεικνύει τις συνόδους που απενεργοποιούνται στη φάση εκτέλεσης $\alpha^{(l_r)}$, ενώ η συνθήκη (4) παρέχει ένα κάτω όριο στην ελεύθερη χωρητικότητα και το ισομερίδιο κάθε ακμής. Παρέχουμε στη συνέχεια την απόδειξη του Λήμματος 7.1.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο r. Ξεκινάμε με τη βάση της επαγωγής, όπου $r = 1$.

Βάση Επαγωγής (Λήμμα 7.1)

Αποδεικνύουμε πρώτα τη συνθήκη (1). Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $l_1 = \infty$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του δικτύου $G(\mathsf{Sched})$, για κάθε ακμή $e \in E(\mathsf{Sched})$ ισχύει ότι $cap(e) > 0$. Εξ ορισμού του l_1, υπάρχει κάποια σύνοδος $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$, τέτοια ώστε ο δείκτης i δεν εμφανίζεται στην α. Συνεπώς, η σύνοδος S_i δε δρομολογείται για ενημέρωση στην α. Εξ ορισμού της πράξης ενημέρωσης, αυτό υποδηλώνει ότι ο τελικός ρυθμός μετάδοσης της S_i παραμένει μηδέν στην α, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου. Συνεπάγεται επομένως ότι $l_1 < \infty$, όπως απαιτείται.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη των υπόλοιπων συνθηκών. Αποδεικνύουμε πρώτα τον ακόλουθο ισχυρισμό που αναφέρεται στην κατάσταση $Q_f^{(1)}$.

Λήμμα 7.2 *Για την κατάσταση $Q_f^{(1)}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) $r_{Q_f^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) = 2b_1 + p_1/2$,

(2) *για κάθε σύνοδο* $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}\}$, $r_{Q_f^{(1)}}(S_i) = 0$,

(3) $FS_{Q_f^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) = b_1 + p_1/4$,

(4) *για κάθε σύνοδο* $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, $FS_{Q_f^{(1)}}(e_i^{(1)}) = b_1 + p_1/2$,

(5) *η ακμή* $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$ *είναι ακμή συμφόρησης στην* $Q_f^{(1)}$,

(6) *για κάθε σύνοδο* $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$, $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q_f^{(1)})$.

Μιλώντας άτυπα, οι συνθήκες (1) και (2) καθορίζουν τους ρυθμούς μετάδοσης των ενεργών συνόδων στην κατάσταση $Q_f^{(1)}$, ενώ οι συνθήκες (3) και (4) καθορίζουν τα αντίστοιχα ισομερίδια των ακμών που χρησιμοποιούνται από αυτές τις συνόδους στη φάση 1. Η συνθήκη (5) εγγυάται ότι η ακμή $e_{i_f^{(1)}}^{(1)}$ είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q_f^{(1)}$, ενώ η συνθήκη (6) υποδηλώνει ότι δε συμβαίνει καμιά απενεργοποίηση στο σύνολο των συνόδων αυτών. Παρατηρήστε ότι εφόσον όλες οι σύνοδοι είναι ενεργές στην αρχική κατάσταση Q_0, η πρώτη σύνοδος προς δρομολόγηση είναι ενεργή, έτσι ώστε $Q_f^{(1)} = Q_1$. Συνεχίζουμε με την απόδειξη του Λήμματος 7.2.

Απόδειξη: Αρχικά αποδεικνύουμε τη συνθήκη (1). Λόγω κατασκευής του δικτύου $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i_f^{(1)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$, ενώ, για κάθε δείκτη $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, χρησιμοποιεί επίσης την ακμή $e_i^{(1)}$. Επιπλέον, από το Πόρισμα 7.2, η $i_f^{(1)}$ δε χρησιμοποιεί καμιά άλλη ακμή του δικτύου. Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των ανασχηματιστικών αυξήσεων για τη σύνοδο $i_f^{(1)}$ στην κατάσταση Q_0, που επιβάλλονται από τις ακμές που χρησιμοποιεί.

Προφανώς,

$$\begin{aligned} \Delta_{Q_0}(i_f^{(1)}, e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) &= cap(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) \\ &= 2b_1 + p_1/2\,, \end{aligned}$$

ενώ για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\Delta_{Q_0}(i_f^{(1)}, e_i^{(1)}) &= cap(e_i^{(1)}) \\ &= 2b_1 + p_1\,.\end{aligned}$$

Συνεπώς, από τον ορισμό του $\Delta_{Q_0}(i_f^{(1)})$ έχουμε ότι $\Delta_{Q_0}(i_f^{(1)}) = \min\{2b_1 + p_1/2, 2b_1 + p_1\} = 2b_1 + p_1/2$. Άρα, ο ορισμός της πράξης ενημέρωσης συνεπάγεται ότι $r_{Q_f^{(1)}}(i_f^{(1)}) = r_{Q_0}(i_f^{(1)}) + \Delta_{Q_0}(i_f^{(1)}) = 0 + 2b_1 + p_1/2 = 2b_1 + p_1/2$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της συνθήκης (1).

Για με την απόδειξη της (2), θεωρούμε μια οποιαδήποτε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}\}$. Από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, προκύπτει ότι $r_{Q_f^{(1)}}(i) = \min\{r_{Q_0}(i), r_{Q_f^{(1)}}(i_f^{(1)})\} = \min\{0, 2b_1 + p_1/2\} = 0$, όπως απαιτείται.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της (3). Προφανώς,

$$\begin{aligned}FS_{Q_f^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) &= \frac{cap(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) - allot_{Q_f^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)})}{|\mathcal{A}_{Q_f^{(1)}} \mid e_{i_l^{(1)}}^{(1)}|} \\ &= \frac{cap(e_{i_l^{(1)}}^{(1)})}{|\mathcal{A}_{Q_0} \mid e_{i_l^{(1)}}^{(1)}|} \\ &\quad (\text{επειδή } \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q_0) = \emptyset) \\ &= \frac{2b_1 + p_1/2}{2} \\ &\quad (\text{λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})) \\ &= b_1 + \frac{p_1}{4}\,,\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει την (3).

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια την (4). Θεωρούμε μια οποιαδήποτε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$. Προφανώς,

$$FS_{Q_f^{(1)}}(e_i^{(1)}) = \frac{cap(e_i^{(1)}) - allot_{Q_f^{(1)}}(e_i^{(1)})}{|\mathcal{A}_{Q_f^{(1)}} \mid e_i^{(1)}|}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{cap(e_i^{(1)})}{|\mathcal{A}_{Q_0} \mid e_i^{(1)}|} \\
&\quad (\text{επειδή } \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q_0) = \emptyset) \\
&= \frac{2b_1 + p_1}{2} \\
&\quad (\text{λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})) \\
&= b_1 + \frac{p_1}{2},
\end{aligned}
$$

το οποίο αποδεικνύει την (4).

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια την (5). Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, οι σύνοδοι $i_f^{(1)}$ και $i_l^{(1)}$ χρησιμοποιούν την ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$. Εξετάζουμε αρχικά τη σύνοδο $i_f^{(1)}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, εκτός από την ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$, η σύνοδος $i_f^{(1)}$ χρησιμοποιεί, για κάθε δείκτη $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, την ακμή $e_i^{(1)}$. Προφανώς,

$$
\begin{aligned}
MFS_{Q_f^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) &= \min\{FS_{Q_f^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}), \min \bigcup_{i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}} \{FS_{Q_f^{(1)}}(e_i^{(1)})\}\} \\
&= \min\{b_1 + \frac{p_1}{4}, b_1 + \frac{p_1}{2}\} \\
&\quad (\text{λόγω συνθηκών (3) και (4)}) \\
&= b_1 + \frac{p_1}{4},
\end{aligned}
$$

έτσι ώστε $MFS_{Q_f^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) = FS_{Q_f^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)})$.

Εξετάζουμε τώρα τη σύνοδο $i_l^{(1)}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η $i_l^{(1)}$ χρησιμοποιεί μόνο την ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$, έτσι ώστε $MFS_{Q_f^{(1)}}(S_{i_l^{(1)}}) = FS_{Q_f^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)})$.

Αφού $MFS_{Q_f^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) = FS_{Q_f^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)})$ και $MFS_{Q_f^{(1)}}(S_{i_l^{(1)}}) = FS_{Q_f^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)})$, συνεπάγεται ότι η ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$ είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_f^{(1)}$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη της συνθήκης (5).

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (6). Αρχικά επαληθεύουμε ότι καμιά ακμή από αυτές που χρησιμοποιεί η σύνοδος $i_f^{(1)}$ δεν προκαλεί τον τερματισμό της στην κατάσταση $Q_f^{(1)}$.

Εξετάζουμε αρχικά την ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$. Από τη συνθήκη (1) ισχύει ότι $r_{Q_f^{(1)}}(i_f^{(1)}) = 2b_1 + p_1/2$, ενώ από τη συνθήκη (3) έχουμε $FS_{Q_f^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) = b_1 + p_1/4$. Συνεπώς, $r_{Q_f^{(1)}}(i_f^{(1)}) - FS_{Q_f^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) = b_1 + p_1/2$. Εφόσον $b_1 \neq 0$ και $p_1 \neq 0$, ισχύει ότι $r_{Q_f^{(1)}}(i_f^{(1)}) \neq FS_{Q_f^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)})$. Επειδή ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, αυτό υποδηλώνει ότι η ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $i_f^{(1)}$ στην κατάσταση $Q_f^{(1)}$.

Εξετάζουμε τώρα την ακμή $e_i^{(1)}$, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$. Ισχύει ότι $MFS_{Q_f^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) = b_1 + p_1/4$, ενώ από τη συνθήκη (4) είναι $FS_{Q_f^{(1)}}(e_i^{(1)}) = b_1 + p_1/2$. Αφού $p_1 \neq 0$, αυτό συνεπάγεται πως $MFS_{Q_f^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) \neq FS_{Q_f^{(1)}}(e_i^{(1)})$. Από τον ορισμό μιας ακμής συμφόρησης, έχουμε επομένως ότι η ακμή $e_i^{(1)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q_f^{(1)}$. Επειδή ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, η ακμή $e_i^{(1)}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $i_f^{(1)}$ στην κατάσταση $Q_f^{(1)}$.

Ωστόσο, το Πόρισμα 7.2 εγγυάται ότι η σύνοδος $i_f^{(1)}$ δεν χρησιμοποιεί καμιά άλλη ακμή. Άρα, ισχύει ότι $i_f^{(1)} \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q_f^{(1)})$.

Η συνθήκη (2) εγγυάται ότι οι ρυθμοί μετάδοσης των υπολοίπων συνόδων παραμένουν 0 στην κατάσταση $Q_f^{(1)}$. Άρα, καμιά από αυτές τις συνόδους δεν απενεργοποιείται στην κατάσταση $Q_f^{(1)}$, αφού διαφορετικά θα διατηρούσε το ρυθμό μετάδοσής της ίσο με μηδέν που έρχεται σε αντίφαση με τον ορισμό της δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της συνθήκης (6). ■

Επιστρέφουμε στην απόδειξη του Λήμματος 7.1.

Ορίζουμε την κατάσταση $Q_{ff}^{(1)}$ να είναι η πρώτη κατάσταση στην οποία κάποια ενεργή σύνοδος στην αρχική κατάσταση Q_0, διαφορετική από την $i_f^{(1)}$, δρομολογείται για ενημέρωση μπροστά από την $Q_{ff}^{(1)}$ στην εκτέλεση α. Παρατηρούμε ότι εφόσον $l_1 < \infty$, η $Q_{ff}^{(1)}$ προηγείται της $Q^{(1)}$ στη φάση εκτέλεσης $\alpha^{(l_1)}$. Επιπρόσθετα, η $Q_f^{(1)}$ προηγείται της $Q_{ff}^{(1)}$ στη φάση εκτέλεσης $\alpha^{(l_1)}$. Ο επόμενος απλός ισχυρισμός αποδεικνύει ότι ξεκινώντας από την κατάσταση $Q_f^{(1)}$ και μέχρι την $Q_{ff}^{(1)}$, καμιά αλλαγή στους ρυθμούς μετάδοσης και στην κατάσταση των συνόδων δεν είναι δυνατή.

Λήμμα 7.3 *Έστω ότι S_i είναι μια οποιαδήποτε σύνοδος. Τότε, για κάθε κατάσταση Q τέτοια ώστε $Q_f^{(1)} \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\alpha} Q_{ff}^{(1)}$ ισχύει ότι $r_Q(S_i) = r_{Q_f^{(1)}}(S_i)$, και $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$.*

Απόδειξη: Από τον ορισμό της $Q_{ff}^{(1)}$, η σύνοδος που δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση Q είναι η $S_{i_f^{(1)}}$. Συνεχίζουμε με επαγωγή στην Q.

Για τη βάση της επαγωγής έχουμε ότι $Q = \overrightarrow{Q_f^{(1)}}$. Το Λήμμα 7.2(1) εγγυάται ότι $r_{Q_f^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) = 2b_1 + p_1/2$. Επιπλέον, λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$ είναι $cap(e^{(1)}_{i_l^{(1)}}) = 2b_1 + p_1/2$. Επομένως, από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως (συνθήκες (1) και (2)), συνεπάγεται ότι $\Delta_{Q_f^{(1)}}(i_f^{(1)}, e^{(1)}_{i_l^{(1)}}) = 0$, έτσι ώστε $\Delta_{Q_f^{(1)}}(i_f^{(1)}) = 0$. Άρα, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_f^{(1)}}$, ισχύει ότι $r_Q(S_i) = r_{Q_f^{(1)}}(S_i)$, όπως απαιτείται. Επιπλέον, αφού ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης και η συνθήκη απενεργοποίησης των αλγορίθμων συμφόρησης εξαρτάται αποκλειστικά από τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων, το Λήμμα 7.2(6) υποδηλώνει άμεσα ότι $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$, όπως απαιτείται.

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάθε κατάσταση Q τέτοια ώστε $Q_f^{(1)} \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\alpha} \overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}$ ισχύει ότι $r_Q(S_i) = r_{Q_f^{(1)}}(S_i)$ και $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$. Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε την κατάσταση $\overrightarrow{Q}$.

Από την επαγωγική υπόθεση και το Λήμμα 7.2 (1) έχουμε ότι $r_Q(S_{i_f^{(1)}}) = r_{Q_f^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) = 2b_1 + p_1/2$. Επιπλέον, λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, είναι $cap(e^{(1)}_{i_l^{(1)}}) = 2b_1 + p_1/2$. Επομένως, ο ορισμός της πράξης ενημέρωσης (συνθήκες (1) και (2)), συνεπάγεται ότι $\Delta_Q(i_f^{(1)}, e^{(1)}_{i_l^{(1)}}) = 0$, έτσι ώστε $\Delta_Q(i_f^{(1)}) = 0$. Επίσης, για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_Q$ είναι $r_{\overrightarrow{Q}}(S_i) = r_Q(S_i)$. Ωστόσο, από την επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $\mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_{Q_f^{(1)}}$ και $r_Q(S_i) = r_{Q_f^{(1)}}(S_i)$. Άρα, για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_f^{(1)}}$ έχουμε $r_{\overrightarrow{Q}}(S_i) = r_{Q_f^{(1)}}(S_i)$, όπως απαιτείται. Επιπρόσθετα, αφού ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης και η συνθήκη απενεργοποίησης των αλγορίθμων αυτών εξαρτάται αποκλειστικά από τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων, το Λήμμα 7.2 (6) υποδηλώνει άμεσα ότι $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, \overrightarrow{Q})$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του επαγωγικού βήματος. ∎

Άτυπα, ο επόμενος ισχυρισμός περιγράφει το κλάσμα της φάσης εκτέλεσης $\alpha^{(l_1)}$ το οποίο ξεκινά με το δείκτη της συνόδου που δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση $Q_{ff}^{(1)}$ και τελειώνει με την αμέσως προηγούμενη κατάσταση από την $Q^{(1)}$.

Λήμμα 7.4 *Έστω ότι η κατάσταση Q είναι τέτοια ώστε $\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}} \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\alpha} Q^{(1)}$. Τότε, τα* *ακόλουθα ισχύουν για την κατάσταση Q:*

(1) *για κάθε σύνοδο* $i \in \mathcal{S}\mid_\alpha (Q_0, Q)$, $r_Q(S_i) = b_1 + p_1/2$,

(2) *για κάθε σύνοδο* $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S}\mid_\alpha (Q_0, Q)$, $r_Q(S_i) = 0$,

(3) *η ακμή* $e^{(1)}_{i^{(1)}_l}$ *είναι ακμή συμφόρησης στην* Q,

(4) *για κάθε σύνοδο* $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i^{(1)}_f, i^{(1)}_l\}$, *η ακμή* $e^{(1)}_i$ *δεν είναι ακμή συμφόρησης στην* Q,

(5) *για κάθε ακέραιο* $r' > 1$ *και ακμή* $e^{(r')} \in E^{(r')}$, *η* $e^{(r')}$ *δεν είναι ακμή συμφόρησης στην* Q, *και*

(6) *για κάθε σύνοδο* $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$, $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$.

Μιλώντας άτυπα, οι συνθήκες (1) και (2) καθορίζουν τους ρυθμούς μετάδοσης των ενεργών συνόδων στην κατάσταση Q. Οι συνθήκες (3), (4) και (5) εγγυώνται ότι η ακμή $e^{(1)}_{i^{(1)}_l}$ είναι η μόνη ακμή συμφόρησης στην κατάσταση Q, ενώ η συνθήκη (6) υποδηλώνει ότι δεν πραγματοποιούνται απενεργοποιήσεις των ενεργών συνόδων. Παραθέτουμε στη συνέχεια την απόδειξη του Λήμματος 7.4.

Απόδειξη: Με επαγωγή στην Q. Για τη βάση της επαγωγής έχουμε ότι $Q = Q^{(1)}_{ff}$.

Βάση Επαγωγής (Λήμμα 7.4)

Αρχικά, καθορίζουμε το ρυθμό μετάδοσης και την κατάσταη κάθε συνόδου στην κατάσταση $Q^{(1)}_{ff}$.

Συμβολίζουμε με $i^{(1)}_{ff}$ τη σύνοδο που δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση $Q^{(1)}_{ff}$. Από τον ορισμό της κατάστασης $Q^{(1)}_{ff}$ συνεπάγεται ότι $i^{(1)}_{ff} \neq i^{(1)}_f$, ενώ από τον ορισμό της κατάστασης $Q^{(1)}$, είναι $i^{(1)}_{ff} \neq i^{(1)}_l$.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η $i^{(1)}_{ff}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(1)}_{i^{(1)}_{ff}}$, η οποία χρησιμοποιείται επίσης από τη σύνοδο $i^{(1)}_f$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$ είναι $cap(e^{(1)}_{i^{(1)}_{ff}}) = 2b_1 + p_1$. Από το Λήμμα 7.3, ισχύει ότι $r_{\overleftarrow{Q^{(1)}_{ff}}}(S_{i^{(1)}_f}) = r_{Q^{(1)}_f}(S_{i^{(1)}_f})$ και $r_{\overleftarrow{Q^{(1)}_{ff}}}(S_{i^{(1)}_{ff}}) =$

$r_{Q_f^{(1)}}(S_{i_{ff}^{(1)}})$. Το Λήμμα 7.2 (1) και (2) υποδηλώνει ότι $r_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(S_{i_f^{(1)}}) = 2b_1 + p_1/2$ και $r_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(S_{i_{ff}^{(1)}}) = 0$. Συνεπώς, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης έχουμε

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(i_{ff}^{(1)}, e_{i_{ff}^{(1)}}^{(1)}) &= \frac{1}{2}\, cap(e_{i_{ff}^{(1)}}) - r_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(S_{i_{ff}^{(1)}}) \\
&= \frac{1}{2}\, cap(e_{i_{ff}^{(1)}}) - 0 \\
&= \frac{1}{2}\,(2\, b_1 + p_1) \\
&\quad \text{(λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\textsf{Sched})\text{)} \\
&= b_1 + \frac{p_1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\textsf{Sched})$, η $S_{i_{ff}^{(1)}}$ χρησιμοποιεί επίσης, σε κάποια φάση r', την ακμή $e^{(r')} \in E^{(r')}$, για κάθε ακέραιο $r' > 1$. Επιπρόσθετα, λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\textsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r')}$ χρησιμοποιείται επίσης από κάποια άλλη σύνοδο $i \notin \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$. Από το Λήμμα 7.3 ισχύει ότι $r_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(S_i) = r_{Q_f^{(1)}}(S_i)$, ενώ από τον Λήμμα 7.2 (2) έχουμε $r_{Q_f^{(1)}}(S_i) = 0$. Συνεπάγεται ότι $r_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(S_i) = 0$. Επομένως, από τον ορισμό της ανασχηματιστικής αύξησης για την S_i στην κατάσταση $\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}$, που επιβάλλεται από την ακμή $e^{(r')}$ και από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως συνεπάγεται ότι $\Delta_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(i_{ff}^{(1)}, e^{(r')}) = cap(e^{(r')}) - r_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(S_{i_{ff}^{(1)}}) = cap(e^{(r')})$. Από την Πρόταση 7.3 είναι $cap(e^{(r')}) > cap(e_{i_{ff}^{(1)}}^{(1)}) = 2b_1 + p_1$. Συνεπώς, $\Delta_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(i_{ff}^{(1)}, e^{(r')}) > 2b_1 + p_1$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(i_{ff}^{(1)}, e^{(r')}) - \Delta_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(i_{ff}^{(1)}, e_{i_{ff}^{(1)}}^{(1)}) &> 2b_1 + p_1 - (b_1 + \frac{p_1}{2}) \\
&= b_1 + \frac{p_1}{2} \\
&= 2^{p-1} \\
&\quad \text{(από τον ορισμό των } b_1 \text{ και } p_1\text{)} \\
&> 0\,.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\Delta_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(i_{ff}^{(1)}) = \Delta_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(i_{ff}^{(1)}, e_{i_{ff}^{(1)}}^{(1)}) = b_1 + p_1/2$. Άρα, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης,

$$\begin{aligned} r_{Q_{ff}^{(1)}}(S_{i_{ff}^{(1)}}) &= r_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(S_{i_{ff}^{(1)}}) + \Delta_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(i_{ff}^{(1)}) \\ &= 0 + b_1 + \frac{p_1}{2} \\ &= b_1 + \frac{p_1}{2}\,. \end{aligned}$$

Επιπρόσθετα, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης έχουμε

$$r_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(S_{i_{f}^{(1)}}) \;=\; r_{Q_{ff}^{(1)}}(S_{i_{ff}^{(1)}})\,,$$

έτσι ώστε,

$$r_{Q_{ff}^{(1)}}(S_{i_{f}^{(1)}}) \;=\; b_1 + \frac{p_1}{2}\,.$$

Προφανώς, από τον ορισμό των καταστάσεων $Q_f^{(1)}$ και $Q_{ff}^{(1)}$ προκύπτει ότι $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(1)}, Q_{ff}^{(1)}) = \{i_f^{(1)}, i_{ff}^{(1)}\}$, έτσι ώστε για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(1)}, Q_{ff}^{(1)})$ ισχύει ότι $r_{Q_{ff}^{(1)}}(S_i) = b_1 + p_1/2$, όπως απαιτείται από τη συνθήκη (1).

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (2). Θεωρούμε μία οποιαδήποτε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(1)}, Q_{ff}^{(1)}) = \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_{ff}^{(1)}\}$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} r_{\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}}}(S_i) &= r_{Q_f^{(1)}}(S_i) && \text{(λόγω του Λήμματος 7.3)} \\ &= 0 && \text{(λόγω του Λήμματος 7.2)}. \end{aligned}$$

Εφόσον $i \neq i_{ff}^{(1)}$, ο ορισμός της πράξης ενημέρωσης υποδηλώνει άμεσα ότι $r_{Q_{ff}^{(1)}}(S_i) = 0$, όπως απαιτείται από την (2).

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την (3).

Ισχυρισμός 7.1 *Η ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$ είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q_{ff}^{(1)}$.*

Απόδειξη: Το Λήμμα 7.2 (6) συνεπάγεται ότι $\mathcal{A}_{\overrightarrow{Q_f^{(1)}}} = \mathcal{A}_{Q_0}$. Λόγω του Λήμματος 7.3, για κάθε κατάσταση Q τέτοια ώστε $Q_f^{(1)} \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\alpha} Q_{ff}^{(1)}$, και κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$ ισχύει ότι $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q_f^{(1)}}} = \mathcal{A}_{Q_0}$. Επομένως, $i_l^{(1)} \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}}$. Αφού, λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η $i_l^{(1)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$, προκύπτει ότι $e_{i_l^{(1)}} \in AE_{Q_{ff}^{(1)}}$. Ωστόσο, λόγω του Λήμματος 7.2, η ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$ είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q_f^{(1)}$. Συνεπώς, η Πρόταση 4.2(2) υποδηλώνει ότι η ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$ είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_{ff}^{(1)}$, όπως απαιτείται από την (3). ■

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια τη συνθήκη (4).

Ισχυρισμός 7.2 *Για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, η ακμή $e_i^{(1)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q_{ff}^{(1)}$.*

Απόδειξη: Το Λήμμα 7.2 (6) συνεπάγεται ότι $\mathcal{A}_{\overrightarrow{Q_f^{(1)}}} = \mathcal{A}_{Q_0}$. Λόγω του Λήμματος 7.3, για κάθε κατάσταση Q τέτοια ώστε $Q_f^{(1)} \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\alpha} Q_{ff}^{(1)}$ και κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$ ισχύει ότι $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q_f^{(1)}}} = \mathcal{A}_{Q_0}$. Επομένως, ισχύει ότι $i \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}}$ και $i_f^{(1)} \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_i^{(1)}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους S_i και $S_{i_f^{(1)}}$. Συνεπώς, $\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} \mid e_i^{(1)} = \{i, i_f^{(1)}\}$, έτσι ώστε

$$
\begin{aligned}
FS_{Q_{ff}^{(1)}}(e_i^{(1)}) &= \frac{cap(e_i^{(1)}) - allot_{Q_{ff}^{(1)}}(e_i^{(1)})}{|\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} \mid e_i^{(1)}|} \\
&= \frac{cap(e_i^{(1)}) - 0}{2} \\
&\quad (\text{επειδή } \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} = \mathcal{A}_{Q_0}) \\
&= b_1 + \frac{p_1}{2} \\
&\quad (\text{λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})).
\end{aligned}
$$

Εφόσον $\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} = \mathcal{A}_{Q_0}$, έχουμε ότι $i_f^{(1)} \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}}$ και $i_l^{(1)} \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $S_{i_f^{(1)}}$ και $S_{i_l^{(1)}}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} \mid e_{i_l^{(1)}}^{(1)} = \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, έτσι ώστε

$$
\begin{aligned}
FS_{Q_{ff}^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) &= \frac{cap(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) - allot_{Q_{ff}^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)})}{|\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} \mid e_{i_l^{(1)}}^{(1)}|} \\
&= \frac{cap(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) - 0}{2} \\
&\quad (\text{επειδή } \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} = \mathcal{A}_{Q_0}) \\
&= b_1 + \frac{p_1}{4} \\
&\quad (\text{λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched}))\,.
\end{aligned}
$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i_f^{(1)}$ χρησιμοποιεί κάθε ακμή $e_i^{(1)}$, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$ και καμιά άλλη ακμή. Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
MFS_{Q_{ff}^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) &= \min\{FS_{Q_{ff}^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}), \bigcup_{i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}} FS_{Q_{ff}^{(1)}}(e_i^{(1)})\} \\
&= \min\{b_1 + \frac{p_1}{4}, b_1 + \frac{p_1}{2}\} \\
&= b_1 + \frac{p_1}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως, $S_{i_f^{(1)}} \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} \mid e_i^{(1)}$ ενώ

$$
\begin{aligned}
FS_{Q_{ff}^{(1)}}(e_i^{(1)}) - MFS_{Q_{ff}^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) &= b_1 + \frac{p_1}{2} - (b_1 + \frac{p_1}{4}) \\
&= \frac{p_1}{4} \\
&= 2^{p-2} \qquad\qquad (\text{λόγω του ορισμού του } p_1) \\
&\neq 0\,,
\end{aligned}
$$

το οποίο συνεπάγεται ότι η ακμή $e_i^{(1)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q_{ff}^{(1)}$, όπως απαιτείται. ∎

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια τη συνθήκη (5).

Ισχυρισμός 7.3 *Για κάθε ακέραιο $r' > 1$ και κάθε ακμή $e^{(r')} \in E^{(r')}$, η $e^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q_{ff}^{(1)}$.*

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r')}$ χρησιμοποιείται από κάποια σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, η οποία χρησιμοποιεί επίσης την ακμή $e_i^{(1)}$. Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα ισομερίδια των ακμών $e_i^{(1)}$ και $e^{(r')}$.

Το Λήμμα 7.2 (6) υποδηλώνει ότι $\mathcal{A}_{\overrightarrow{Q_f^{(1)}}} = \mathcal{A}_{Q_0}$. Από το Λήμμα 7.3, για κάθε κατάσταση Q τέτοια ώστε $Q_f^{(1)} \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\alpha} Q_{ff}^{(1)}$ και κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$ ισχύει ότι

$$i \quad \notin \quad \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)\,.$$

Επομένως, $\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q_f^{(1)}}} = \mathcal{A}_{Q_0}$. Άρα ισχύει ότι $i \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}}$ και $i_f^{(1)} \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_i^{(1)}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους S_i και $S_{i_f^{(1)}}$. Συνεπώς, $\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} \mid e_i^{(1)} = \{i, i_f^{(1)}\}$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} FS_{Q_{ff}^{(1)}}(e_i^{(1)}) &= \frac{cap(e_i^{(1)}) - allot_{Q_{ff}^{(1)}}(e_i^{(1)})}{|\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} \mid e_i^{(1)}|} \\ &= \frac{cap(e_i^{(1)}) - 0}{2} \qquad\qquad (\text{επειδή } \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}} = \mathcal{A}_{Q_0}) \\ &= \frac{cap(e_i^{(1)})}{2}\,. \end{aligned}$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r')}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους S_i και $S_{i'}$, για κάθε δείκτη συνόδου i'. Προφανώς, $i \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}}$ και $i' \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(1)}}$, έτσι ώστε

$\mathcal{A}_{Q^{(1)}_{ff}} \mid e^{(r')} = \{i, i'\}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} FS_{Q^{(1)}_{ff}}(e') &= \frac{cap(e') - allot_{Q^{(1)}_{ff}}(e')}{|\mathcal{A}_{Q^{(1)}_{ff}} \mid e^{(\prime)}|} \\ &= \frac{cap(e' - 0}{2} \qquad\qquad (\text{επειδή } \mathcal{A}_{Q^{(1)}_{ff}} = \mathcal{A}_{Q_0}) \\ &= \frac{cap(e')}{2}. \end{aligned}$$

Λόγω της Πρότασης 7.3 είναι $cap(e^{(1)}_i) < cap(e^{(r')})$. Επομένως,

$$FS_{Q^{(1)}_{ff}}(e^{(1)}_i) \;<\; FS_{Q^{(1)}_{ff}}(e^{(r')}).$$

Από τον ορισμό του ελάχιστου ισομεριδίου, συνεπάγεται ότι $MFS_{Q^{(1)}_{ff}}(S_i) < FS_{Q^{(1)}_{ff}}(e^{(r')})$, έτσι ώστε η ακμή $e^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q^{(1)}_{ff}$, όπως απαιτείται από τη συνθήκη (5). ■

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της (6). Εξετάζουμε ξεχωριστά κάθε μια από τις ενεργές συνόδους στην Q_0. Ξεκινάμε με τη σύνοδο $S_{i^{(1)}_f}$.

Ισχυρισμός 7.4 $i^{(1)}_f \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(1)}_{ff})$.

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i^{(1)}_f$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(1)}_{i^{(1)}_l}$. Επιπλέον, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i^{(1)}_f, i^{(1)}_l\}$, η σύνοδος $i^{(1)}_f$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(1)}_i$ και καμιά άλλη ακμή. Εξετάζουμε κάθε μια από αυτές τις ακμές ξεχωριστά.

Εξετάζουμε πρώτα την ακμή $e^{(1)}_{i^{(1)}_l}$. Εφόσον $\mathcal{A}_{Q^{(1)}_{ff}} = \mathcal{A}_{Q_0}$ έχουμε $i^{(1)}_f \in \mathcal{A}_{Q^{(1)}_{ff}}$ και $i^{(1)}_l \in \mathcal{A}_{Q^{(1)}_{ff}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(1)}_{i^{(1)}_l}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $S_{i^{(1)}_f}$ και $S_{i^{(1)}_l}$. Επομένως, $\mathcal{A}_{Q^{(1)}_{ff}} \mid e^{(1)}_{i^{(1)}_l} = \{i^{(1)}_f, i^{(1)}_l\}$, έτσι ώστε

$$FS_{Q^{(1)}_{ff}}(e^{(1)}_{i^{(1)}_l}) \;=\; \frac{cap(e^{(1)}_{i^{(1)}_l}) - allot_{Q^{(1)}_{ff}}(e^{(1)}_{i^{(1)}_l})}{|\mathcal{A}_{Q^{(1)}_{ff}} \mid e^{(1)}_{i^{(1)}_l}|}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{cap(e^{(1)}_{i^{(1)}_l}) - 0}{2} \\
&\quad (\text{επειδή } \mathcal{A}_{Q^{(1)}_{ff}} = \mathcal{A}_{Q_0}) \\
&= b_1 + \frac{p_1}{4} \\
&\quad (\text{λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched}))\,.
\end{aligned}
$$

Ωστόσο, λόγω της (1), είναι $r_{Q^{(1)}_{ff}}(S_{i^{(1)}_f}) = b_1 + p_1/2$, έτσι ώστε

$$
\begin{aligned}
r_{Q^{(1)}_{ff}}(S_{i^{(1)}_f}) - FS_{Q^{(1)}_{ff}}(e^{(1)}_{i^{(1)}_l}) &= b_1 + \frac{p_1}{2} - (b_1 + \frac{p_1}{4}) \\
&= \frac{p_1}{4} \\
&= 2^{p-2} \qquad\qquad (\text{από τον ορισμό του } p_1) \\
&\neq 0\,.
\end{aligned}
$$

Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, η ακμή $e^{(1)}_{i^{(1)}_l}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i^{(1)}_f}$ στην κατάσταση $Q^{(1)}_{ff}$.

Εξετάζουμε τώρα την ακμή $e^{(1)}_i$ για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i^{(1)}_f, i^{(1)}_l\}$. Το Πόρισμα 7.2 εγγυάται ότι η ακμή $e^{(1)}_i$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q^{(1)}_{ff}$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, συνεπάγεται ότι η ακμή $e^{(1)}_i$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i^{(1)}_f}$ στην κατάσταση $Q^{(1)}_{ff}$.

Αφού καμιά από τις ακμές που χρησιμοποιεί η σύνοδος $S_{i^{(1)}_f}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίησή της στην κατάσταση $Q^{(1)}_{ff}$, συνεπάγεται ότι $i^{(1)}_f \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(1)}_{ff})$, όπως απαιτείται. ∎

Συνεχίζουμε με τη σύνοδο $S_{i^{(1)}_l}$.

Από τον ορισμό της $S_{i^{(1)}_l}$ συνεπάγεται ότι $i^{(1)}_l \notin \mathcal{S} \mid_\alpha (Q^{(1)}_f, Q^{(1)}_{ff})$, έτσι ώστε από τη συνθήκη (2) έχουμε $r_{Q^{(1)}_{ff}}(S_{i^{(1)}_l}) = 0$. Συνεχίζουμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $i^{(1)}_l \in \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(1)}_{ff})$. Από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, συνεπάγεται ότι ο τελικός ρυθμός μετάδοσης της $S_{i^{(1)}_l}$ παραμένει μηδέν στην α, το οποίο είναι αντιφατικό στην υπόθεση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου. Συνεπώς, $i_l^{(1)} \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q_{ff}^{(1)})$, όπως απαιτείται.

Εξετάζουμε στη συνέχεια όλες τις υπόλοιπες συνόδους. Θεωρούμε οποιονδήποτε δείκτη $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(1)}$ καθώς επίσης κάποια ακμή $e^{(r')} \in E^{(r')}$, όπου $r' > 1$ είναι ακέραιος. Από τους Ισχυρισμούς 7.2 και 7.3 αντίστοιχα, ούτε η ακμή $e_i^{(1)}$ ούτε η $e^{(r')}$ είναι ακμές συμφόρησης στην κατάσταση $Q_{ff}^{(1)}$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, αυτό συνεπάγεται ότι ούτε η $e_i^{(1)}$ ούτε η $e^{(r')}$ προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου S_i στην κατάσταση $Q_{ff}^{(1)}$. Εφόσον καμιά από τις ακμές που χρησιμοποιεί η σύνοδος S_i δεν προκαλεί την απενεργοποίησή της στην κατάσταση $Q_{ff}^{(1)}$, ισχύει ότι $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q_{ff}^{(1)})$.

Η απόδειξη της βάσης της επαγωγής για το Λήμμα 7.4 είναι σε αυτό το σημείο πλήρης.

Επαγωγική Υπόθεση (Λήμμα 7.4)

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάποια κατάσταση Q τέτοια ώστε $Q_{ff}^{(1)} \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\alpha} Q^{(1)}$ ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε κατάσταση Q' τέτοια ώστε $\overleftarrow{Q_{ff}^{(1)}} \xrightarrow{\alpha} Q' \xrightarrow{\alpha} Q$:

(1) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q')$, $r_{Q'}(S_i) = b_1 + p_1/2$,

(2) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q')$, $r_{Q'}(S_i) = 0$,

(3) η ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$ είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση Q',

(4) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, η ακμή $e_i^{(1)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση Q',

(5) για κάθε ακέραιο $r' > 1$ και κάθε ακμή $e^{(r')} \in E^{(r')}$, η $e^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση Q',

(6) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$, $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q')$.

Μιλώντας άτυπα, υποθέτουμε ότι οι ισχυρισμοί ισχύουν για κάθε κατάσταση, ξεκινώντας από την $Q_{ff}^{(1)}$ και καταλήγοντας στην προηγούμενη από κάποια συγκεκριμμένη κατάσταση $Q \neq Q_{ff}^{(1)}$.

Επαγωγικό Βήμα (Λήμμα 7.4)

Αποδεικνύουμε ότι οι ισχυρισμοί ισχύουν για την κατάσταση Q:

(1) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q)$, $r_Q(S_i) = b_1 + p_1/2$,

(2) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q)$, $r_Q(S_i) = 0$,

(3) η ακμή $e^{(1)}_{i^{(1)}_l}$ είναι ακμή συμφόρησης στην Q,

(4) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i^{(1)}_f, i^{(1)}_l\}$, η ακμή $e^{(1)}_i$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην Q,

(5) για κάθε ακέραιο $r' > 1$ και κάθε ακμή $e^{(r')} \in E^{(r')}$, η $e^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην Q,

(6) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$, $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$.

Αποδεικνύουμε παράλληλα τις συνθήκες (1) και (2).

Ισχυρισμός 7.5 *Ισχύουν τα εξής:*

(1) *για κάθε σύνοδο* $i \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q)$, $r_Q(S_i) = b_1 + p_1/2$,

(2) *για κάθε σύνοδο* $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q)$, $r_Q(S_i) = 0$.

Απόδειξη: Συμβολίζουμε με i_Q τη σύνοδο που δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση Q. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για την i_Q.

1. Υποθέτουμε αρχικά ότι $i_Q = i^{(1)}_f$.

   Εφόσον η $i^{(1)}_f$ δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση $Q^{(1)}_f$ και $Q^{(1)}_f \xrightarrow{\alpha} Q$, συνεπάγεται ότι $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q) = \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$, έτσι ώστε ισχύει επίσης $\mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q) = \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$. Θεωρούμε τη σύνοδο $i^{(1)}_{ff}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η $i^{(1)}_{ff}$ και η $i^{(1)}_f$ μοιράζονται την ακμή $e^{(1)}_{i^{(1)}_{ff}}$ με $cap(e^{(1)}_{i^{(1)}_{ff}}) = 2b_1 + p_1$. Προφανώς, $i^{(1)}_{ff} \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$ και $i^{(1)}_f \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση (1), έχουμε ότι $r_Q(S_{i^{(1)}_{ff}}) = b_1 + p_1/2$ και $r_Q(S_{i^{(1)}_f}) = b_1 + p_1/2$, έτσι ώστε

$r_Q(S_{i_{ff}^{(1)}}) + r_Q(S_{i_f^{(1)}}) = 2b_1 + p_1 = cap(e^{(1)}_{i_{ff}^{(1)}})$. Από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης συνεπάγεται ότι $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_{ff}^{(1)}, e^{(1)}_{i_{ff}^{(1)}}) = 0$, έτσι ώστε ισχύει επίσης πως $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_{ff}^{(1)}) = 0$. Από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$, $r_Q(S_i) = r_{\overleftarrow{Q}}(S_i)$. Συνεπώς, η επαγωγική υπόθεση (1) και (2) υποδηλώνει ότι για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$ είναι $r_Q(S_i) = b_1 + p_1/2$ αν $i \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q}) = \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q)$, ή είναι 0 αν $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q}) = \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q)$, όπως απαιτείται από τις συνθήκες (1) και (2).

2. Έστω τώρα ότι $i_Q \neq i_f^{(1)}$.

   Εφόσον $Q \xrightarrow{\alpha} Q^{(1)}$, συνεπάγεται, από τον ορισμό της $Q^{(1)}$, ότι $i_Q \neq i_l^{(1)}$. Εξετάζουμε τις εξής δύο περιπτώσεις.

   Έστω ότι $i_Q \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$ (ενώ ισχύει επίσης $i_Q \neq i_f^{(1)}$). Δηλαδή, υπάρχει τουλάχιστον μία κατάσταση που προηγείται της $\overleftarrow{Q}$, μπροστά από την οποία η i_Q δρομολογείται προς ενημέρωση. Επομένως, $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q) = \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$, έτσι ώστε έχουμε επίσης $\mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q) = \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$.

   Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, οι σύνοδοι i_Q και $i_f^{(1)}$ μοιράζονται την ακμή $e^{(1)}_{i_Q}$ με $cap(e^{(1)}_{i_Q}) = 2b_1 + p_1$. Προφανώς, $i_Q \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$ και $i_f^{(1)} \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση (1) ισχύει ότι $r_Q(S_{i_Q}) = b_1 + p_1/2$ και $r_Q(S_{i_f^{(1)}}) = b_1 + p_1/2$, έτσι ώστε $r_Q(S_{i_Q}) + r_Q(S_{i_f^{(1)}}) = 2b_1 + p_1 = cap(e^{(1)}_{i_Q})$. Από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης συνεπάγεται ότι $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_Q, e^{(1)}_{i_Q}) = 0$, έτσι ώστε $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_Q) = 0$. Επίσης, αυτό υποδηλώνει ότι για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$ ισχύει ότι $r_Q(S_i) = r_{\overleftarrow{Q}}(S_i)$. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση (1) και (2) προκύπτει ότι για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$ είναι $r_Q(S_i) = b_1 + p_1/2$ αν $i \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q}) = \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q)$, ή είναι 0 αν $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q}) = \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q)$, όπως απαιτείται από τις συνθήκες (1) και (2).

3. Έστω τέλος ότι $i_Q \notin \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, οι σύνοδοι i_Q και $i_f^{(1)}$ μοιράζονται την ακμή $e^{(1)}_{i_Q}$ με $cap(e^{(1)}_{i_Q}) = 2b_1 + p_1$. Εφόσον $i_Q \notin \mathcal{S} \mid_\alpha$

$(Q_0, \overleftarrow{Q})$ ενώ $i_f^{(1)} \in \mathcal{S}\mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$, από την επαγωγική υπόθεση (1) και (2) προκύπτει ότι $r_Q(S_{i_Q}) = 0$ και $r_Q(S_{i_f^{(1)}}) = b_1 + p_1/2$, αντίστοιχα.

Συνεπώς, από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_Q, e_{i_Q^{(1)}}) &= cap(e_{i_Q}^{(1)}) - r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_f^{(1)}}) - r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q}) \\
&= 2b_1 + p_1 - (b_1 + \frac{p_1}{2}) - 0 \\
&= b_1 + \frac{p_1}{2}.
\end{aligned}$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_{i_Q} χρησιμοποιεί επίσης σε κάποια φάση r' την ακμή $e^{(r')}$, όπου $r' > 1$ είναι κάποιος ακέραιος. Επιπρόσθετα, λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r')}$ χρησιμοποιείται επίσης από κάποια άλλη σύνοδο $i \notin \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$. Από την επαγωγική υπόθεση (1) και (2), ισχύει πως είτε $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) = b_1 + p_1/2$ ή $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) = 0$. Συνεπώς, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης έχουμε

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_Q, e^{(r')}) &= cap(e^{(r')}) - r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q}) - r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) \\
&\geq cap(e^{(r')}) - 0 - (b_1 + \frac{p_1}{2}) \\
&\ \text{(λόγω της επαγωγικής υπόθεσης (1) και (2))} \\
&> cap(e_{i_Q}^{(1)}) - (b_1 + \frac{p_1}{2}) \\
&\ \text{(λόγω της Πρότασης 7.3)} \\
&= 2b_1 + p_1 - (b_1 + \frac{p_1}{2}) \\
&\ \text{(λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})\text{)} \\
&= b_1 + \frac{p_1}{2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_Q) = \Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_Q, e_{i_Q}^{(1)}) = b_1 + p_1/2$. Άρα, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης έχουμε

$$r_Q(S_{i_Q}) = r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q}) + \Delta_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q})$$

$$\begin{aligned} &= 0 + b_1 + \frac{p_1}{2} \\ &= b_1 + \frac{p_1}{2}. \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση (1) και (2), για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$ ισχύει ότι $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) \leq b_1 + p_1/2$. Επομένως, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$ έχουμε $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) \leq r_Q(S_i)$, έτσι ώστε, λόγω της πράξης ενημέρωσης, είναι $r_Q(S_i) = r_{\overleftarrow{Q}}(S_i)$. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση (1) και (2) συνεπάγεται ότι, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$, $r_Q(S_i) = b_1 + p_1/2$ αν $i \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$, ή είναι 0 αν $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q})$. Εφόσον $\mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q) = \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, \overleftarrow{Q}) \cup \{i_Q\}$ και $r_Q(S_{i_Q}) = b_1 + p_1/2$, ισχύει ότι για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$, $r_Q(S_i) = b_1 + p_1/2$ αν $i \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q)$, ή είναι 0 αν $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0, Q)$, όπως απαιτείται από τις συνθήκες (1) και (2).

■

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια τη συνθήκη (3).

Ισχυρισμός 7.6 *Η ακμή $e^{(1)}_{i_l^{(1)}}$ είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση Q.*

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(1)}_{i_l^{(1)}}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i_f^{(1)}$ και $i_l^{(1)}$. Από την επαγωγική υπόθεση (6), προκύπτει ότι $\mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_{Q_0}$, έτσι ώστε $i_f^{(1)} \in \mathcal{A}_Q$ και $i_l^{(1)} \in \mathcal{A}_Q$. Επομένως, $e^{(1)}_{i_l^{(1)}} \in AE_Q$.

Από την επαγωγική υπόθεση (3), η ακμή $e^{(1)}_{i_l^{(1)}}$ είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $\overleftarrow{Q}$. Συνεπώς, η Πρόταση 4.2 (2) υποδηλώνει ότι η ακμή $e^{(1)}_{i_l^{(1)}}$ είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση Q, όπως απαιτείται. ■

Υπολογίζουμε στη συνέχεια το ισομερίδιο της ακμής $e^{(1)}_{i_l}$ για την κατάσταση Q.

Λήμμα 7.5 $FS_Q(e^{(1)}_{i_l^{(1)}}) = b_1 + p_1/4$.

Απόδειξη: Η επαγωγική υπόθεση (7) εγγυάται ότι $\mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_{Q_0}$. Συνεπώς, $i_f^{(1)} \in \mathcal{A}_Q$ και $i_l^{(r)} \in \mathcal{A}_Q$. Επομένως, $\mathcal{A}_Q \mid e^{(1)}_{i_l^{(1)}} = \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} FS_Q(e^{(1)}_{i_l^{(1)}}) &= \frac{cap(e^{(1)}_{i_l^{(1)}}) - allot_Q(e^{(1)}_{i_l^{(1)}})}{|\mathcal{A}_Q \mid e^{(1)}_{i_l^{(1)}}|} \\ &= \frac{cap(e^{(1)}_{i_l^{(1)}})}{2} \\ &= b_1 + \frac{p_1}{4} \qquad (\text{ λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})\,, \end{aligned}$$

όπως απαιτείται. ■

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των ισομεριδίων των υπολοίπων ακμών της πρώτης φάσης για την κατάσταση Q.

Λήμμα 7.6 *Για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$ ισχύει ότι*

$$FS_Q(e_i^{(1)}) \;=\; b_1 + \frac{p_1}{2}\,.$$

Απόδειξη: Από την επαγωγική υπόθεση (7) προκύπτει ότι $\mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_{Q_0}$. Συνεπώς, $i \in \mathcal{A}_Q$ και $i_f^{(1)} \in \mathcal{A}_Q$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_i^{(1)}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους S_i και $S_{i_f^{(1)}}$. Επομένως, $\mathcal{A}_Q \mid e_i^{(1)} = \{i, i_f^{(1)}\}$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} FS_Q(e_i^{(1)}) &= \frac{cap(e_i^{(1)}) - allot_Q(e_i^{(1)})}{|\mathcal{A}_Q \mid e_i^{(1)}|} \\ &= \frac{cap(e_i^{(1)})}{2} \\ &= b_1 + \frac{p_1}{2} \qquad (\text{λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})\,, \end{aligned}$$

όπως απαιτείται. ■

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (4).

Ισχυρισμός 7.7 *Για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, η ακμή $e_i^{(1)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην Q.*

Απόδειξη: Από το Λήμμα 7.6 προκύπτει ότι $FS_Q(e_i^{(1)}) = b_1 + p_1/2$, ενώ το Λήμμα 7.5 εγγυάται ότι $FS_Q(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) = b_1 + p_1/4$.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i_f^{(1)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(1)}$, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}\}$ και καμιά άλλη ακμή μεγαλύτερων φάσεων. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} MFS_Q(S_{i_f^{(1)}}) &\leq \min\{FS_Q(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}), \bigcup_{i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}} \{FS_Q(e_i^{(1)})\}\} \\ &= \min\{b_1 + \frac{p_1}{4}, b_1 + \frac{p_1}{2}\} \\ &= b_1 + \frac{p_1}{4}\,. \end{aligned}$$

Επομένως, $S_{i_f^{(1)}} \in \mathcal{A}_Q \mid e_i^{(1)}$ ενώ

$$\begin{aligned} FS_Q(e_i^{(1)}) - MFS_Q(S_{i_f^{(1)}}) &= b_1 + \frac{p_1}{2} - (b_1 + \frac{p_1}{4}) \\ &= \frac{p_1}{4} \\ &\neq 0\,, \end{aligned}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι η ακμή $e_i^{(1)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση Q, όπως απαιτείται. ∎

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια τη συνθήκη (5).

Ισχυρισμός 7.8 *Για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 < r' \leq d/2$, η ακμή $e^{(r')} \in E^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση Q.*

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r')}$ χρησιμοποιείται από κάποια σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, η οποία επίσης χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(1)}$.

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα ισομερίδια των ακμών $e_i^{(1)}$ και $e^{(r')}$. Το Λήμμα 7.6 υποδηλώνει ότι

$$\begin{aligned} FS_Q(e_i^{(1)}) &= b_1 + p_1/2 \\ &= \frac{cap(e_i^{(1)})}{2} \qquad \text{(λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})\text{)}. \end{aligned}$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r')}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους S_i και $S_{i'}$, για κάποιον ακέραιο $i' \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$. Από την επαγωγική υπόθεση (7) προκύπτει ότι $\mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_{Q_0}$. Άρα, $i \in \mathcal{A}_Q$ και $i' \in \mathcal{A}_Q$, έτσι ώστε $\mathcal{A}_Q \mid e^{(r')} = \{i, i'\}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} FS_Q(e^{(r')}) &= \frac{cap(e^{r'}) - allot_Q(e^{(r')})}{|\mathcal{A}_Q \mid e^{(r')}|} \\ &= \frac{cap(e^{(r')})}{2}. \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 7.3 συνεπάγεται ότι $cap(e_i^{(1)}) < cap(e^{(r')})$. Επομένως, $FS_Q(e_i^{(1)}) < FS_Q(e^{(r')})$. Από τον ορισμό του ελάχιστου ισομεριδίου, αυτό υποδηλώνει πως $MFS_Q(S_i) < FS_Q(e^{(r')})$, έτσι ώστε η ακμή $e^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση Q, όπως απαιτείται. ■

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (7). Εξετάζουμε κάθε μια ενεργή σύνοδο στην Q_0 ξεχωριστά, αρχίζοντας από την $S_{i_f^{(1)}}$.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i_f^{(1)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$, καθώς επίσης, για κάθε δείκτη $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, η $i_f^{(1)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(1)}$. Εξετάζουμε κάθε μια από αυτές τις ακμές.

Αρχικά θεωρούμε την ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $S_{i_f^{(1)}}$ και $S_{i_l^{(1)}}$. Το Λήμμα 7.5 υποδηλώνει ότι $FS_Q(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) = b_1 + p_1/4$.

Από τη συνθήκη (1) προκύπτει ότι $r_Q(S_{i_f^{(1)}}) = b_1 + p_1/2$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} r_Q(S_{i_f^{(1)}}) - FS_Q(e^{(1)}_{i_l^{(1)}}) &= b_1 + \frac{p_1}{2} - (b_1 + \frac{p_1}{4}) \\ &= \frac{p_1}{4} \\ &\neq 0 \qquad \text{(από τον ορισμό του } p_1\text{)}. \end{aligned}$$

Εφόσον ο **Alg** είναι αλγόριθμος συμφόρησης, συνεπάγεται ότι η ακμή $e^{(1)}_{i_l^{(1)}}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_f^{(1)}}$ στην κατάσταση Q.

Θεωρούμε τώρα την ακμή $e_i^{(1)}$, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$. Ο Ισχυρισμός 7.7 εγγυάται ότι η ακμή $e_i^{(1)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση Q. Εφόσον ο **Alg** είναι αλγόριθμος συμφόρησης, η ακμή $e_i^{(1)}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_f^{(1)}}$ στην κατάσταση Q.

Εφόσον καμιά από τις ακμές που χρησιμοποιεί η σύνοδος $S_{i_f^{(1)}}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίησή της στην κατάσταση Q, συνεπάγεται ότι $i_f^{(1)} \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$, όπως απαιτείται.

Εξετάζουμε τώρα τη σύνοδο $S_{i_l^{(1)}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $S_{i_l^{(1)}}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(1)}_{i_l^{(1)}}$ και καμιά άλλη ακμή. Το Λήμμα 7.5 υποδηλώνει ότι $FS_Q(e^{(1)}_{i_l^{(1)}}) = b_1 + p_1/4 > 0$. Από τη συνθήκη (2) έχουμε ότι $r_Q(S_{i_l^{(1)}}) = 0$. Συνεπώς,

$$FS_Q(e^{(1)}_{i_l^{(1)}}) \neq r_Q(S_{i_l^{(1)}}).$$

Εφόσον ο **Alg** είναι αλγόριθμος συμφόρησης, η ακμή $e^{(1)}_{i_l^{(1)}}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_l^{(1)}}$ στην κατάσταση Q.

Εφόσον η σύνοδος $S_{i_l^{(1)}}$ δε χρησιμοποιεί καμιά άλλη ακμή, συνεπάγεται ότι

$$i_l^{(1)} \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q),$$

όπως απαιτείται.

Στη συνέχεια εξετάζουμε όλες τις υπόλοιπες συνόδους. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(1)}$, καθώς επίσης και τουλάχιστον μία ακμή

$e^{(r')} \in E^{(r')}$, για κάποιο ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 < r' \leq d/2$.

Από τους Ισχυρισμούς 7.7 και 7.8, καμιά από τις ακμές $e_i^{(1)}$ και $e^{(r')}$ αντίστοιχα, δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q. Εφόσον ο **Alg** είναι αλγόριθμος συμφόρησης, καμιά από τις ακμές αυτές δεν προκαλεί επομένως, την απενεργοποίηση της συνόδου S_i στην κατάσταση Q, το οποίο συνεπάγεται ότι $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$, όπως απαιτείται.

Η απόδειξη του Λήμματος 7.4 έχει στο σημείο αυτό ολοκληρωθεί. ■

Μέχρι τώρα έχουμε καθορίσει το ρυθμό μετάδοσης και την κατάσταση κάθε συνόδου μέχρι την κατάσταση $\overleftarrow{Q}^{(1)}$. Εξετάζουμε τέλος την κατάσταση $Q^{(1)}$. Προφανώς, η σύνοδος $S_{i_l^{(1)}}$ δρομολογείται για ενημέρωση μπροστά από την $Q^{(1)}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του G, η $S_{i_l^{(1)}}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_{i_l^{(1)}}$ με $cap(e^{(1)}_{i_l^{(1)}}) = 2b_1 + p_1/2$, η οποία χρησιμοποιείται επίσης από τη σύνοδο $S_{i_f^{(1)}}$. Από το Λήμμα 7.4 (1) και (2) προκύπτει ότι $r_{\overleftarrow{Q}^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) = b_1 + p_1/2$ και $r_{\overleftarrow{Q}^{(1)}}(S_{i_l^{(1)}}) = 0$. Επομένως, από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\overleftarrow{Q}^{(1)}}(e^{(1)}_{i_l^{(1)}}, i_l^{(1)}) &= \Delta_{\overleftarrow{Q}^{(1)}}(i_l^{(1)}) \\
&= \frac{1}{2}\, cap(e^{(1)}_{i_l^{(1)}}) - r_{\overleftarrow{Q}^{(1)}}(S_{i_l^{(1)}}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2b_1 + \frac{p_1}{4}) - 0 \\
&= b_1 + \frac{p_1}{4}\,,
\end{aligned}
$$

έτσι ώστε

$$
\begin{aligned}
r_{Q^{(1)}}(S_{i_l^{(1)}}) &= r_{\overleftarrow{Q}^{(1)}}(S_{i_l^{(1)}}) + \Delta_{\overleftarrow{Q}^{(1)}} \\
&= 0 + b_1 + \frac{p_1}{4} \\
&\quad \text{(λόγω της επαγωγικής υπόθεσης)} \\
&= b_1 + \frac{p_1}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Επιπλέον, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} r_{Q^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) &= r_{Q^{(1)}}(S_{i_l^{(1)}}) \\ &= b_1 + \frac{p_1}{4}\,, \end{aligned}$$

όπως απαιτείται από τη συνθήκη (2α).

Επίσης, για κάθε δείκτη $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, η σύνοδος S_i δε μοιράζεται καμιά ακμή με τη σύνοδο $S_{i_l}^{(1)}$, το οποίο, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, υποδηλώνει ότι

$$\begin{aligned} r_{Q^{(1)}}(S_i) &= r_{\overleftarrow{Q^{(1)}}}(S_i) \\ &= b_1 + \frac{p_1}{2}\,, \end{aligned}$$

όπως απαιτείται από τη συνθήκη (2β).

Καθορίζουμε στη συνέχεια την κατάσταση κάθε συνόδου στην κατάσταση $Q^{(1)}$.

Ισχυρισμός 7.9 *Για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$ ισχύει ότι $i \in \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$ αν και μόνο αν*

$$i \in \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(1)})\,.$$

Απόδειξη: Το Λήμμα 7.4 (3), (4) και (5) υποδηλώνει ότι η μόνη ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $\overleftarrow{Q^{(1)}}$ είναι η ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$). Από το Λήμμα 7.4 (6) προκύπτει ότι $\mathcal{A}_{\overleftarrow{Q^{(1)}}} = \mathcal{A}_{Q^{(1)}}$. Επομένως, η μοναδική ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q^{(1)}$ είναι η $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_{i_l^{(1)}}^{(1)}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i_f^{(1)}$ και $i_l^{(1)}$. Το Λήμμα 7.4(6) υποδηλώνει ότι $i_f^{(1)} \in \mathcal{A}_{Q^{(1)}}$ και $i_l^{(1)} \in \mathcal{A}_{Q^{(1)}}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} FS_{Q^{(1)}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) &= \frac{cap(e_{i_l^{(1)}}^{(1)}) - allot_{\overrightarrow{Q^{(1)}}}(e_{i_l^{(1)}}^{(1)})}{|\mathcal{A}_{Q^{(1)}} \mid e_{i_l^{(1)}}^{(1)}|} \\ &= \frac{2b_1 + p_1/2}{2} \\ &= b_1 + \frac{p_1}{4}\,. \end{aligned}$$

Επίσης, από τη συνθήκη (1) προκύπτει ότι $r_{Q^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) = r_{Q^{(1)}}(S_{i_l^{(1)}}) = b_1 + p_1/4$, έτσι ώστε $r_{Q^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) = r_{Q^{(1)}}(S_{i_l^{(1)}}) = FS_{Q^{(1)}}(e^{(1)}_{i_l^{(1)}})$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, συνεπάγεται ότι $i_f^{(1)} \in \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(1)})$ και $i_l^{(1)} \in \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(1)})$. Επιπρόσθετα, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, η σύνοδος S_i δεν χρησιμοποιεί καμιά ακμή συμφόρησης. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, η σύνοδος S_i δεν απενεργοποιείται στην κατάσταση $Q^{(1)}$. Συνεπώς, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0}$ ισχύει ότι $i \in \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, αν και μόνο αν $i \in \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(1)})$, όπως απαιτείται. ■

Έχουμε αποδείξει ότι οι συνθήκες (1), (2) και (3) του Λήμματος 7.1 ισχύουν για τη βάση της επαγωγής, όπου $r = 1$. Αποδεικνύουμε στη συνέχεια τη συνθήκη (4).

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, η ακμή $e_i^{(1)}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $S_{i_f^{(1)}}$ και S_i. Υπενθυμίζουμε ότι $r_{Q^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) = b_1 + p_1/4$, ενώ $r_{Q^{(1)}}(S_i) = b_1 + p_1/2$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
residual_{Q^{(1)}}(e_i^{(1)}) &= cap(e_i^{(1)}) - \sum_{S \in \mathcal{A}_{Q^{(1)}} | e} r_{Q^{(1)}}(S) \\
&= cap(e) - r_{Q^{(1)}}(S_{i_f^{(1)}}) - r_{Q^{(1)}}(S_i) \\
&= 2b_1 + p_1 - (b_1 + \frac{p_1}{4}) - (b_1 + \frac{p_1}{2}) \\
&= \frac{p_1}{4},
\end{aligned}
$$

όπως χρειάζεται από τη συνθήκη (4α).

Από το Λήμμα 7.9 προκύπτει ότι $i_f^{(1)} \notin \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q}^{(1)}}$, ενώ για κάθε δείκτη $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$, $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q}^{(1)}}$. Συνεπώς, για κάθε δείκτη $i \in \mathcal{A}_{Q_0} \setminus \{i_f^{(1)}, i_l^{(1)}\}$ ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
FS_{\overrightarrow{Q}^{(1)}}(e_i^{(1)}) &= \frac{cap(e_i^{(1)}) - allot_{\overrightarrow{Q}^{(1)}}(e_i^{(1)})}{|\mathcal{A}_{\overrightarrow{Q}^{(1)}} \mid e_i^{(1)}|} \\
&= \frac{2b_1 + p_1 - (b_1 + p_1/4)}{1} \\
&= b_1 + \frac{3}{4}p_1,
\end{aligned}
$$

όπως απαιτείται από την (4β).

Η απόδειξη της βάσης της επαγωγής για το Λήμμα 7.1 έχει σε αυτό το σημείο ολοκληρωθεί.

Επαγωγική Υπόθεση (Λήμμα 7.1)

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάθε ακέραιο r τέτοιον ώστε $1 < r \leq d/2$, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί ισχύουν για κάθε ακέραιο r'' τέτοιον ώστε $1 \leq r'' < r$:

(1) $l_{r''} < \infty$;

(2) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r''-1)}}}$,

(α) αν $i \in \{i_f^{(r'')}, i_l^{(r'')}\}$, τότε $r_{Q^{(r'')}}(S_i) = b_{r''} + p_{r''}/4$,

(β) αν $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q_{(r''-1)}}} \setminus \{i_f^{(r'')}, i_l^{(r'')}\}$, τότε $r_{Q^{(r'')}}(S_i) = b_{r''} + p_{r''}/2$,

(3) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r''-1)}}}$ ισχύει ότι $i \in \{i_f^{(r'')}, i_l^{(r'')}\}$, αν και μόνο αν

$$i \in \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(r'')}) ,$$

(4) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r''-1)}}} \setminus \{i_f^{(r'')}, i_l^{(r'')}\}$, κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' \leq r''$ και κάθε ακμή $e_i^{(r')}$,

(α) $residual_{Q^{(r'')}}(e_i^{(r')}) \geq p_{r''}/4$,

(β) $FS_{\overrightarrow{Q^{(r'')}}}(e_i^{(r')}) \geq b_{r''} + 3\,p_{r''}/4$.

Επαγωγικό Βήμα (Λήμμα 7.1)

Για το επαγωγικό βήμα αποδεικνύουμε τα εξής:

(1) $l_r < \infty$,

(2) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$,

(α) αν $i \in \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, τότε $r_{Q^{(r)}}(S_i) = b_r + p_r/4$, (β) αν $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, τότε $r_{Q^{(r)}}(S_i) = b_r + p_r/2$,

(3) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ ισχύει ότι $i \in \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, αν και μόνο αν

$$i \in \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(r)}),$$

(4) για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' \leq r$ και κάθε ακμή $e_i^{(r')}$,

(α) $residual_{Q^{(r)}}(e_i^{(r')}) \geq p_r/4$,

(β) $FS_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}(e_i^{(r')}) \geq b_r + 3p_r/4$.

Αρχικά, παρουσιάζουμε ένα τεχνικό λήμμα που αποδεικνύει ότι η διαθέσιμη χωρητικότητα σε κάθε ακμή που ανήκει σε μεγαλύτερη φάση από την τρέχουσα είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

Λήμμα 7.7 *Έστω ότι r' είναι ακέραιος τέτοιος ώστε $r \leq r' \leq d/2$ και $e^{(r')} \in E^{(r')}$ είναι μια ακμή. Τότε,*

$$residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r')}) \quad \geq \quad \frac{p_{r-1}}{8}.$$

Απόδειξη: Με επαγωγή στο r'. Για τη βάση της επαγωγής έχουμε $r' = r$.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r')}$ χρησιμοποιείται από δύο συνόδους i και j τέτοιες ώστε $\{i, j\} \subseteq \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Προφανώς,

$$residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r')}) \quad = \quad cap(e^{(r')}) - r_{Q^{(r-1)}}(S_i) - r_{Q^{(r-1)}}(S_j).$$

Από την Πρόταση 7.3 προκύπτει ότι $cap(e^{(r')}) \geq cap(e^{(r)})$ για κάθε ακμή $e^{(r)} \in E^{(r)}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, είτε $cap(e^{(r)}) = 2\,b_r + p_r/2$ ή $cap(e^{(r)}) = 2\,b_r + p_r$, έτσι ώστε $cap(e^{(r)}) \geq 2\,b_r + p_r/2$. Συνεπώς, $cap(e^{(r')}) \geq 2\,b_r + p_r/2$. Άρα,

$$residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r')}) \quad \geq \quad 2\,b_r + \frac{p_r}{2} - r_{Q^{(r-1)}}(S_i) - r_{Q^{(r-1)}}(S_j)$$

$$\begin{aligned}
&= 2\,b_r + \frac{p_r}{2} - \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) - \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) \\
&\quad \text{(λόγω της επαγωγικής υπόθεσης (2β))} \\
&= 2 \cdot \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{p_{r-1}}{4} - 2\,b_{r-1} - p_{r-1} \\
&\quad \text{(λόγω του αναδρομικού ορισμού των } b_r \text{ και } p_r\text{)} \\
&= \frac{p_{r-1}}{8}\,,
\end{aligned}$$

όπως απαιτείται.

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάποιον ακέραιο r' τέτοιον ώστε $r \leq r' \leq d/2$ ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε ακέραιο r'' τέτοιον ώστε $r \leq r'' < r'$ και κάθε ακμή $e^{(r'')} \in E^{(r'')}$:

$$residual_{Q(r-1)}(e^{(r'')}) \geq \frac{p_{r-1}}{8}\,.$$

Για το επαγωγικό βήμα αποδεικνύουμε ότι

$$residual_{Q(r-1)}(e^{(r')}) \geq \frac{p_{r-1}}{8}\,.$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r')}$ χρησιμοποιείται από δύο συνόδους S_i και S_j τέτοιες ώστε $S_i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q(r-1)}}$ και $S_j \in \mathcal{A}_{\overleftarrow{Q(r-1)}}$. Προφανώς, $residual_{Q(r-1)}(e^{(r')}) = cap(e^{(r')}) - r_{Q(r-1)}(S_i) - r_{Q(r-1)}(S_j)$. Επιπλέον, λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r'-1)}$, η οποία χρησιμοποιείται επίσης από τη σύνοδο $i_f^{(r'-1)}$. Εφόσον $r' > r$, ισχύει ότι $r'-1 \geq r$, έτσι ώστε η επαγωγική υπόθεση (3) υποδηλώνει ότι $i_f^{(r'-1)} \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q(r-1)}}$. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση (2β) συνεπάγεται ότι $r_{Q(r-1)}(S_{i_f^{(r'-1)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Επίσης, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης (2β), προκύπτει ότι $r_{Q(r-1)}(S_j) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, έτσι ώστε $r_{Q(r-1)}(S_{i_f^{(r'-1)}}) = r_{Q(r-1)}(S_i)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
residual_{Q(r-1)}(e^{(r'-1)}) &= cap(e^{(r'-1)}) - r_{Q(r-1)}(S_i) - r_{Q(r-1)}(S_{i_f^{(r'-1)}}) \\
&= cap(e^{(r'-1)}) - r_{Q(r-1)}(S_i) - r_{Q(r-1)}(S_j)\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
& residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r')}) - residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r'-1)}) \\
= \; & (cap(e^{(r')}) - r_{Q^{(r-1)}}(S_i) - r_{Q^{(r-1)}}(S_j)) - (cap(e^{(r'-1)}) - r_{Q^{(r-1)}}(S_i) - r_{Q^{(r-1)}}(S_j)) \\
= \; & cap(e^{(r')}) - cap(e^{(r'-1)}) .
\end{aligned}
$$

Από την Πρόταση 7.3 έχουμε ότι $cap(e^{(r')}) > cap(e^{(r'-1)})$. Συνεπώς,

$$residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r')}) \quad > \quad residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r'-1)}) .$$

Η επαγωγική υπόθεση (4α) υποδηλώνει ότι $residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r'-1)}) \geq p_{r-1}/8$, έτσι ώστε

$$residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r')}) \geq p_{r-1}/8 ,$$

όπως απαιτείται. ■

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (1). Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $l_r = \infty$. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Υποθέτουμε αρχικά ότι $S \mid_\alpha (Q^{(r-1)}, \infty) \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\} = \emptyset$. Από την επαγωγική υπόθεση (3), για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q^{(r-1)}}$ μόνο οι σύνοδοι $i_f^{(r-1)}$ και $i_l^{(r-1)}$ απενεργοποιούνται στην κατάσταση $Q^{(r-1)}$. 'Ολες οι υπόλοιπες σύνοδοι παραμένουν ενεργές. Ωστόσο, καμιά από αυτές δε θα δρομολογηθεί για ενημέρωση ξανά. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $|\mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}| > 0$, ενώ ταυτόχρονα τουλάχιστον μία σύνοδος $i \in \mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}$ δεν έχει ακόμη αποκτήσει τον τελικό δίκαιο ρυθμό μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου.

Από την επαγωγική υπόθεση (3) προκύπτει ότι για κάθε ακέραιο $r' \leq r-1$, μόνο οι δύο σύνοδοι $i_f^{(r')}$ και $i_l^{(r')}$ απενεργοποιούνται σε κάποια κατάσταση μεταξύ των $Q^{(r')}$ και $Q^{(r'+1)}$. Αυτές οι δύο σύνοδοι είναι απενεργοποιημένες σε όλες τις καταστάσεις που έπονται της κατάστασης $\overrightarrow{Q^{(r')}}$. Επομένως, $|\mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}| = d - 2\,(r-1)$. Εφόσον $r \leq d/2$, έχουμε ότι $|\mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}| \geq d - 2\,(d/2-1)$, έτσι ώστε $|\mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}| \geq 2$. Άρα, το σύνολο $\mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}$ περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε αυθαίρετο ακέραιο $i \in \mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r')}$ για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$. Από την επαγωγική υπόθεση (4α) συνεπάγεται ότι $residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r')}) \geq p_{r-1}/4$. Συνεπώς, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης προκύπτει ότι $\Delta_{Q^{(r-1)}}(i, e_i^{(r')}) > 0$.

Επίσης, λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί τουλάχιστον μία ακμή $e^{(r'')} \in E^{(r'')}$, όπου r'' είναι ένας ακέραιος τέτοιος ώστε $r \leq r'' \leq d/2$. Από το Λήμμα 7.7 έχουμε $residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r'')}) \geq p_{r-1}/8$. Επομένως, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης προκύπτει ότι $\Delta_{Q^{(r-1)}}(i, e_i^{(r'')}) > 0$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η S_i δεν χρησιμοποιεί άλλες ακμές, έτσι ώστε $\Delta_{Q^{(r-1)}}(i) > 0$. Επομένως, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, ο $r_{Q^{(r-1)}}(S_i)$ μπορεί να αυξηθεί χωρίς να προκαλέσει μείωση στο ρυθμό μετάδοσης οποιασδήποτε άλλης συνόδου, ενώ παράλληλα δεν παραβιάζεται η εφικτότητα. Αντίφαση λόγω της υπόθεσης δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου.

Υποθέτουμε τώρα ότι $S \mid_\alpha (Q^{(r-1)}, \infty) \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\} \neq \emptyset$. Προφανώς, τουλάχιστον μία σύνοδος $i_f^{(r)} \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{r-1}}}$ δρομολογείται προς ενημέρωση κατά τη διάρκεια της φάσης εκτέλεσης $\alpha^{(l_r)}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i_f^{(r)}$ μοιράζεται με κάποια άλλη σύνοδο $i_l^{(r)} \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{r-1}}}$ την ακμή $e_{i_l^{(r)}}$ με $cap(e_{i_l^{(r)}}) = 2\,b_r + p_r/2$. Επιπρόσθετα, η σύνοδος $S_{i_f^{(r)}}$ μοιράζεται την ακμή $e_i^{(r)}$ με τη σύνοδο S_i, όπου i είναι οποιοσδήποτε δείκτης τέτοιος ώστε $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{r-1}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$.

Από τον ορισμό της $Q_f^{(r)}$ δεν υπάρχει ενεργή σύνοδος στην $\overrightarrow{Q^{(r-1)}}$ που να δρομολογείται για ενημέρωση μεταξύ των καταστάσεων $Q^{(r-1)}$ και $\overleftarrow{Q_f^{(r)}}$. Μια άμεση συνέπεια αυτού είναι ότι οι ρυθμοί μετάδοσης και η κατάσταση των συνόδων δεν αλλάζει μεταξύ των δύο αυτών καταστάσεων.

Παρατήρηση 7.1 *Για την κατάσταση* $\overleftarrow{Q_f^{(r)}}$ *ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) *για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, $r_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(S_i) = r_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(S_i)$;

(2) *για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, \overleftarrow{Q_f^{(r)}})$

(3) *για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}\}$, $residual_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(e_i^{(r)}) = residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r)})$.

Άτυπα μιλώντας, ο ισχυρισμός (1) υποδηλώνει ότι οι ρυθμοί μετάδοσης των ενεργών συνόδων δεν αλλάζουν μεταξύ των καταστάσεων $\overrightarrow{Q^{(r-1)}}$ και $\overleftarrow{Q_f^{(r)}}$, ενώ ο ισχυρισμός (2) εγγυάται ότι καμιά σύνοδος δεν απενεργοποιείται σε οποιαδήποτε κατάσταση μεταξύ των δύο αυτών καταστάσεων. Επίσης, η ελεύθερη χωρητικότητα των ακμών που ανήκουν στη φάση r παραμένει αναλλοίωτη μεταξύ των καταστάσεων $\overrightarrow{Q^{(r-1)}}$ και $\overleftarrow{Q_f^{(r)}}$.

Συνεχίζουμε με τον ακόλουθο ισχυρισμό που περιγράφει την κατάσταση $Q_f^{(r)}$.

Λήμμα 7.8 *Για την κατάσταση* $Q_f^{(r)}$ *ισχύουν τα εξής:*

(1) $r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_{r-1} + 5p_{r-1}/8$,

(2) *για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}\}$, $r_{Q_f^{(r)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$,

(3) $FS_{Q_f^{(r)}}(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) = b_r + p_r/4$,

(4) *για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, $FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r)}) = b_r + p_r/2$,

(5) *η ακμή* $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$ *είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση* $Q_f^{(r)}$,

(6) *για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, *η ακμή* $e_i^{(r)}$ *δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση* $Q_f^{(r)}$,

(7) *για κάθε ακέραιο* r', *τέτοιον ώστε* $r < r' \leq d/2$ *και κάθε ακμή* $e^{(r')} \in E^{(r')}$, *η* $e^{(r')}$ *δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση* $Q_f^{(r)}$,

(8) *για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ *και κάθε ακέραιο* r' *τέτοιον ώστε* $1 \leq r' < r$, *η ακμή* $e_i^{(r')}$ *δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση* $Q_f^{(r)}$,

(9) *για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ *ισχύει ότι* $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q_f^{(r)})$.

Μιλώντας άτυπα, οι ισχυρισμοί (1) και (2) καθορίζουν τους ρυθμούς μετάδοσης των ενεργών συνόδων στην κατάσταση $Q_f^{(r)}$, ενώ οι ισχυρισμοί (3) και (4) καθορίζουν τα ισομερίδια των ακμών που χρησιμοποιούνται από αυτές τις συνόδους στην $Q_f^{(r)}$. Ο ισχυρισμός (5) υποδηλώνει ότι η ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$ είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_f^{(r)}$, ενώ οι ισχυρισμοί (6), (7) και (8) εγγυούνται ότι καμιά άλλη ενεργή ακμή του δικτύου δεν είναι ακμή συμφόρησης για την $Q_f^{(r)}$. Τελικά, ο ισχυρισμός (10) αποδεικνύει ότι καμιά σύνοδος δεν απενεργοποιείται. Συνεχίζουμε με την απόδειξη του Λήμματος 7.8.

Απόδειξη: Ξεκινάμε με την απόδειξη του (1). Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i_f^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Επίσης, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q}^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, η $S_{i_f^{(r)}}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r)}$, ενώ η $S_{i_f^{(r)}}$ χρησιμοποιεί τις ακμές $e^{(r')}_{i_f^{(r)}}$ για κάθε δείκτη r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$ και καμιά άλλη ακμή. Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των ανασχηματιστικών αυξήσεων για τη σύνοδο $i_f^{(r)}$ στην κατάσταση $\overleftarrow{Q}_f^{(r)}$. Εξετάζουμε ξεχωριστά κάθε μία ακμή που χρησιμοποιείται από την $i_f^{(r)}$.

Εξετάζουμε αρχικά την ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $S_{i_f^{(r)}}$ και $S_{i_l^{(r)}}$, ενώ $cap(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) = 2b_r + p_r/2$. Από το Πόρισμα 7.1, προκύπτει ότι $r_{\overleftarrow{Q}_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) = r_{\overrightarrow{Q}^{(r-1)}}(S_{i_f^{(r)}})$ και $r_{\overleftarrow{Q}_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) = r_{\overrightarrow{Q}^{(r-1)}}(S_{i_l^{(r)}})$. Από την επαγωγική υπόθεση (2β) συνεπάγεται ότι

$$
\begin{aligned}
r_{\overrightarrow{Q}^{(r-1)}}(S_{i_f^{(r)}}) &= r_{\overrightarrow{Q}^{(r-1)}}(S_{i_l^{(r)}}) \\
&= b_{r-1} + p_{r-1}/2\,,
\end{aligned}
$$

έτσι ώστε $r_{\overleftarrow{Q}_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$ και $r_{\overleftarrow{Q}_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$.

Συνεπώς, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης έχουμε

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\overleftarrow{Q}_f^{(r)}}(i_f^{(r)}, e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) &= cap(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) - r_{\overleftarrow{Q}_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) - r_{\overleftarrow{Q}_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) \\
&= 2b_r + \frac{p_r}{2} - 2\,(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}) \\
&\quad \text{(λόγω του Πορίσματος 7.1 και της επαγωγικής υπόθεσης (2β))} \\
&= 2\,(b_r - b_{r-1}) + \frac{p_r}{2} - p_{r-1} \\
&= 2\,\frac{p_{r-1}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p_{r-1}}{4} - p_{r-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \text{(λόγω του αναδρομικού ορισμού των } b_r \text{ και } p_r\text{)} \\
= \; & \frac{p_{r-1}}{8}\,.
\end{aligned}
$$

Εξετάζουμε στη συνέχεια μια οποιαδήποτε ακμή $e_i^{(r)}$, όπου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_i^{(r)}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $S_{i_f^{(r)}}$ και S_i. Από το Πόρισμα 7.1 έχουμε $r_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(S_{i_f^{(r)}}) = r_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(S_{i_f^{(r)}})$ και $r_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(S_i) = r_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(S_i)$. Από την επαγωγική υπόθεση (2β) συνεπάγεται ότι $r_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(S_{i_f^{(r)}}) = r_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, έτσι ώστε $r_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$ και $r_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Επομένως, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(i_f^{(r)}, e_i^{(r)}) \; &= \; cap(e_i^{(r)}) - r_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(S_{i_f^{(r)}}) - r_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(S_i) \\
&= \; 2b_r + p_r - 2\,(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}) \\
& \quad\; \text{(λόγω του Πορίσματος 7.1 και της επαγωγικής υπόθεσης (2β))} \\
&= \; 2\,(b_r - b_{r-1}) + p_r - p_{r-1} \\
&= \; 2\,\frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{4} - p_{r-1} \\
& \quad\; \text{(λόγω του αναδρομικού ορισμού των } b_r \text{ και } p_r\text{)} \\
&= \; \frac{p_{r-1}}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Εξετάζουμε τώρα τις ακμές $e_{i_f^{(r)}}^{(r')}$, για κάθε ακέραιο r', τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$. Το Πόρισμα 7.1 (3) υποδηλώνει ότι $residual_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(e_{i_f^{(r)}}^{(r')}) = residual_{Q^{(r-1)}}(e_{i_f^{(r)}}^{(r')})$, έτσι ώστε από την επαγωγική υπόθεση (4α) προκύπτει ότι $residual_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(e_{i_f^{(r)}}^{(r')}) \geq p_{r-1}/4$. Επομένως, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης έχουμε

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(i_f^{(r)}) \; &= \; \min\{p_{r-1}/8, p_{r-1}/4\} \\
&= \; p_{r-1}/8\,.
\end{aligned}
$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) &= r_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(S_{i_f^{(r)}}) + \Delta_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(i_f^{(r)}) \\ & b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{8} \\ & \text{(λόγω της Παρατήρησης 7.1 και της επαγωγικής υπόθεσης (2β))} \\ &= b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8}\,. \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη της (1).

Για να αποδείξουμε τη συνθήκη (2), θεωρούμε μια οποιαδήποτε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}\}$. Από το Πόρισμα 7.8 ισχύει ότι $r_{\overleftarrow{Q_f^{(r)}}}(S_i) = r_{Q^{(r-1)}}(S_i)$. Από την επαγωγική υπόθεση (2β) προκύπτει ότι $r_{Q^{(r-1)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) - r_{Q_f^{(r)}}(S_i) &= b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8} - b_{r-1} - \frac{p_{r-1}}{2} \\ &= \frac{p_{r-1}}{8} \\ &> 0\,. \end{aligned}$$

Επομένως, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης έχουμε $r_{Q_f^{(r)}}(S_i) = r_{Q^{(r-1)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, όπως απαιτείται.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της (3).

Ισχυρισμός 7.10 $FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) = b_r + p_r/4$.

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i_f^{(r)}$ και $i_l^{(r)}$. Το Πόρισμα 7.1 (2) υποδηλώνει ότι $\mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} = \mathcal{A}_{Q_f^{(r)}}$. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση (3) προκύπτει ότι $i_f^{(r)} \in \mathcal{A}_{Q_f^{(r)}}$ και $i_l^{(r)} \in \mathcal{A}_{Q_f^{(r)}}$, έτσι ώστε $\mathcal{A}_{Q_f^{(r)}} \mid e^{(r)}_{i_l^{(r)}} = \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Επομένως,

$$FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) = \frac{cap(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) - allot_{Q_f^{(r)}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}})}{|\mathcal{A}_{Q_f^{(r)}} \mid e^{(r)}_{i_l^{(r)}}|}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{cap(e^{(r)}_{i^{(r)}_l})}{2} \\
&\quad \text{(λόγω του Πορίσματος 7.1 και της επαγωγικής υπόθεσης (3))} \\
&= \frac{2b_r + p_r/2}{2} \\
&\quad \text{(λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})\text{)} \\
&= b_r + \frac{p_r}{4}\,,
\end{aligned}
$$

όπως απαιτείται. ■

Σε αυτό το σημείο η απόδειξη της συνθήκης (3) έχει ολοκληρωθεί. Αποδεικνύουμε στη συνέχεια την (4).

Ισχυρισμός 7.11 *Για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\}$ *ισχύει ότι*

$$
FS_{Q^{(r)}_f}(e^{(r)}_i) \;=\; b_r + \frac{p_r}{2}\,.
$$

Απόδειξη: Έστω ένας οποιοσδήποτε δείκτης συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r)}_i$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i^{(r)}_f$ και i. Το Πόρισμα 7.1 (2) υποδηλώνει ότι $\mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} = \mathcal{A}_{Q^{(r)}_f}$. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση (3) προκύπτει ότι $i^{(r)}_f \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}_f}$ και $i \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}_f}$, έτσι ώστε $\mathcal{A}_{Q^{(r)}_f} \mid e^{(r)}_i = \{i^{(r)}_f, i\}$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
FS_{Q^{(r)}_f}(e^{(r)}_i) &= \frac{cap(e^{(r)}_i) - allot_{Q^{(r)}_f}(e^{(r)}_i)}{|\mathcal{A}_{Q^{(r)}_f} \mid e^{(r)}_i|} \\
&= \frac{cap(e^{(r)}_i)}{2} \\
&\quad \text{(λόγω του Πορίσματος 7.1 και της επαγωγικής υπόθεσης (3))} \\
&= \frac{2b_r + p_r}{2} \\
&\quad \text{(λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})\text{)} \\
&= b_r + \frac{p_r}{2}\,,
\end{aligned}
$$

όπως απαιτείται. ■

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια τη συνθήκη (5). Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i^{(r)}_f$ και $i^{(r)}_l$. Εξετάζουμε τις δύο αυτές συνόδους ξεχωριστά.

Ξεκινάμε με τη σύνοδο $i^{(r)}_f$. Ο επόμενος τεχνικός ισχυρισμός αποδεικνύει ότι η σύνοδος $i^{(r)}_f$ απολαμβάνει το ελάχιστο ισομερίδιό της πάνω στην ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ στην κατάσταση $Q^{(r)}_f$.

Λήμμα 7.9 $MFS_{Q^{(r)}_f}(S_{i^{(r)}_f}) = FS_{Q^{(r)}_f}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l})$.

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, επιπρόσθετα της ακμής $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$, η σύνοδος $i^{(r)}_f$ χρησιμοποιεί, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\}$, την ακμή $e^{(r)}_i$. Επίσης, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η σύνοδος $i^{(r)}_f$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r')}_{i^{(r)}_f}$.

Από τον Ισχυρισμό 7.10, ισχύει ότι $FS_{Q^{(r)}_f}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) = b_r + p_r/4$, ενώ ο Ισχυρισμός 7.11 υποδηλώνει ότι, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\}$, ισχύει ότι $FS_{Q^{(r)}_f}(e^{(r)}_i) = b_r + p_r/2$.

Εξετάζουμε στη συνέχεια την ακμή $e^{(r')}_{i^{(r)}_f}$, για κάποιο αυθαίρετο ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$. Το Πόρισμα 7.1 (2) υποδηλώνει ότι $\mathcal{A}_{Q^{(r)}_f} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Επομένως, $FS_{Q^{(r)}_f}(e^{(r')}_{i^{(r)}_f}) = FS_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e^{(r')}_{i^{(r)}_f})$. Από την επαγωγική υπόθεση (4β) έχουμε $FS_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e^{(r')}_{i^{(r)}_f}) \geq p_{r-1} + 3p_{r-1}/4$, έτσι ώστε $FS_{Q^{(r)}_f}(e^{(r')}_{i^{(r)}_f}) \geq p_{r-1} + 3p_{r-1}/4$. Συνεπώς, από τον ορισμό του ελάχιστου ισομεριδίου για κάποια σύνοδο συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} MFS_{Q^{(r)}_f}(S_{i^{(r)}_f}) &= \min\{b_r + \frac{p_r}{4}, b_r + \frac{p_r}{2}, b_{r-1} + \frac{3}{4}p_{r-1}\} \\ &= b_r + \frac{p_r}{4}, \end{aligned}$$

έτσι ώστε $MFS_{Q^{(r)}_f}(S_{i^{(r)}_f}) = FS_{Q^{(r)}_f}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l})$, όπως απαιτείται. ■

Εξετάζουμε στη συνέχεια τη σύνοδο $i^{(r)}_l$. Ο επόμενος τεχνικός ισχυρισμός αποδεικνύει ότι η σύνοδος $i^{(r)}_l$ λαμβάνει το ελάχιστο ισομερίδιο της πάνω στην ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ για την κατάσταση $Q^{(r)}_f$.

Λήμμα 7.10 $MFS_{Q_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) = FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}})$.

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i_l^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Επίσης, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η $i_l^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r')}_{i_l^{(r)}}$. Εξετάζουμε κάθε μια από αυτές τις ακμές ξεχωριστά, ξεκινώντας από την $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Από τον Ισχυρισμό 7.10 συνεπάγεται ότι $FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) = b_r + p_r/4$.

Εξετάζουμε στη συνέχεια την ακμή $e^{(r')}_{i_l^{(r)}}$, για κάποιο ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$. Η Παρατήρηση 7.1 (2) υποδηλώνει ότι όλες οι ενεργές σύνοδοι του συνόλου $\mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ είναι επίσης ενεργές στην κατάσταση $Q_f^{(r)}$, έτσι ώστε $\mathcal{A}_{Q_f^{(r)}} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Επομένως, από τον ορισμό του ισομεριδίου έχουμε $FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r')}_{i_l^{(r)}}) = FS_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e^{(r')}_{i_l^{(r)}})$. Από την επαγωγική υπόθεση (4β) συνεπάγεται ότι $FS_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e^{(r')}_{i_l^{(r)}}) \geq p_{r-1} + 3p_{r-1}/4$, έτσι ώστε $FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r')}_{i_l^{(r)}}) \geq p_{r-1} + 3p_{r-1}/4$. Συνεπώς, από τον ορισμό του ελάχιστου ισομεριδίου μιας συνόδου έχουμε

$$\begin{aligned} MFS_{Q_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) &= \min\{b_r + \frac{p_r}{4}, b_{r-1} + \frac{3}{4}\, p_{r-1}\} \\ &= b_r + \frac{p_r}{4}\,, \end{aligned}$$

έτσι ώστε $MFS_{Q_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) = FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}})$, όπως απαιτείται. ■

Τα Λήμματα 7.9 και 7.10 υποδηλώνουν ότι και οι δύο σύνοδοι $i_f^{(r)}$ και $i_l^{(r)}$, που χρησιμοποιούν την ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$, λαμβάνουν το ελάχιστο ισομερίδιό τους στην ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Ο ορισμός των ακμών συμφόρησης συνεπάγεται επομένως πως η ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$ είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_f^{(r)}$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη της συνθήκης (5).

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της (6). Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, η ακμή $e_i^{(r)}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i_f^{(r)}$ και i. Από τον Ισχυρισμό 7.11 έχουμε $FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r)}) = b_r + p_r/2$. Ο Ισχυρισμός 7.9 υποδηλώνει ότι $MFS_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) = FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}})$, ενώ από τον Ισχυρισμό 7.10 είναι $FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) = b_r + p_r/4$. Εφόσον $b_r \neq 0$ και $p_r \neq 0$, συνεπάγεται ότι $b_r + p_r/4 < b_r + p_r/2$, έτσι ώστε $MFS_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) < FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r)})$. Από τον ορισμό μιας ακμής συμφόρησης προκύπτει επομένως ότι η ακμή $e_i^{(r)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_f^{(r)}$. Στο σημείο αυτό η απόδειξη της συνθήκης (6) έχει ολοκληρωθεί.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της (7). Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $r < r' \leq d/2$, κάθε ακμή $e^{(r')} \in E^{(r')}$ χρησιμοποιείται από δύο συνόδους S_i και S_j, για τις οποίες ισχύει $\{i,j\} \subseteq \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Από το Πόρισμα 7.1 (2) είναι $\{i,j\} \subseteq \mathcal{A}_{Q_f^{(r)}}$. Συνεπώς, από τον ορισμό του ισομεριδίου έχουμε, $FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r')}) = cap(e^{(r')})/2$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί επίσης την ακμή $e_i^{(r)}$ με $cap(e_i^{(r)}) = 2b_r + p_r$. Λόγω του Ισχυρισμού 7.11 ισχύει ότι $FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r)}) = b_r + p_r/2$. Προφανώς, $FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r)}) = cap(e_i^{(r)})/2$. Η Πρόταση 7.3 υποδηλώνει ότι $cap(e_i^{(r)}) < cap(e^{(r')})$, έτσι ώστε

$$cap(e_i^{(r)})/2 < cap(e^{(r')})/2\,.$$

Συνεπώς, $FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r)}) < FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r')})$, έτσι ώστε, από τον ορισμό του ισομεριδίου, ισχύει ότι

$$MFS_{Q_f^{(r)}}(S_i) \quad < \quad FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r')})\,.$$

Άρα, η ακμή $e^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_f^{(r)}$, όπως απαιτείται από την (7).

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (8). Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r')}$. Από την επαγωγική υπόθεση (4β) έχουμε $FS_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e_i^{(r')}) \geq b_{r-1} + 3p_{r-1}/4$. Λόγω του Πορίσματος 7.1 ισχύει ότι $\mathcal{A}_{Q_f^{(r)}} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ έτσι ώστε ο ορισμός του ισομεριδίου συνεπάγεται ότι $FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')}) = FS_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r')})$. Συνεπώς, $FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')}) \geq b_{r-1} + 3p_{r-1}/4$.

Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για τη σύνοδο i. Υποθέτουμε αρχικά ότι $i \notin \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί την ακμή

$e_i^{(r)}$. Το Πόρισμα 7.11 υποδηλώνει ότι

$$\begin{aligned} FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r)}) &= b_r + \frac{p_r}{2} \\ &= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{8} \\ &\quad (\text{λόγω του αναδρομικού ορισμού των } b_r \text{ και } p_r) \\ &= b_{r-1} + \frac{5}{8}\, p_{r-1}\,. \end{aligned}$$

Επειδή $b_{r-1}+5p_{r-1}/8 < b_{r-1}+3p_{r-1}/4$, προκύπτει ότι $FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r)}) < FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')})$. Εξ ορισμού του ελάχιστου ισομεριδίου μιας συνόδου έχουμε επομένως, $MFS_{Q_f^{(r)}}(S_i) < FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')})$, έτσι ώστε η ακμή $e_i^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_f^{(r)}$.

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $i \in \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$. Το Πόρισμα 7.10 υποδηλώνει ότι

$$\begin{aligned} FS_{Q_f^{(r)}}(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) &= b_r + \frac{p_r}{4} \\ &= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{16} \\ &\quad (\text{λόγω του αναδρομικού ορισμού των } b_r \text{ και } p_r) \\ &= b_{r-1} + \frac{9}{16}\, p_{r-1}\,. \end{aligned}$$

Εφόσον $b_{r-1} + 9p_{r-1}/16 < b_{r-1} + 3p_{r-1}/4$, προκύπτει ότι $FS_{Q_f^{(r)}}(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) < FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')})$. Από τον ορισμό του ελάχιστου ισομεριδίου μιας συνόδου έχουμε $MFS_{Q_f^{(r)}}(S_i) < FS_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')})$, έτσι ώστε $e_i^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_f^{(r)}$.

Στο σημείο αυτό έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη της συνθήκης (8). Συνεχίζουμε με την απόδειξη της (9). Εξετάζουμε ξεχωριστά κάθε μια από τις ενεργές συνόδους στην $Q_f^{(r)}$, ξεκινώντας από τη σύνοδο $S_{i_f^{(r)}}$.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i_f^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$. Επίσης, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, η σύνοδος $i_f^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r)}$, ενώ για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η $i_f^{(r)}$ χρησιμοποιεί επιπρόσθετα την ακμή

$e^{(r')}_{i^{(r)}_f}$.

Εξετάζουμε ξεχωριστά κάθε μια από αυτές τις ακμές, ξεκινώντας από την $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$. Λόγω της συνθήκης (3) είναι

$$
\begin{aligned}
FS_{Q^{(r)}_f}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) &= b_r + \frac{p_r}{4} \\
&= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{p_{r-1}}{4} \\
&= b_{r-1} + \frac{9p_{r-1}}{16}\,.
\end{aligned}
$$

Ωστόσο, από τη συνθήκη (1) προκύπτει ότι $r_{Q^{(r)}_f}(S_{i^{(r)}_f}) = b_{r-1} + 5p_{r-1}/8$, έτσι ώστε

$$
\begin{aligned}
r_{Q^{(r)}_f}(S_{i^{(r)}_f}) - FS_{Q^{(r)}_f}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) &= b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8} - (b_{r-1} + \frac{9p_{r-1}}{16}) \\
&= \frac{1}{16}\,p_{r-1} \qquad\qquad (\text{επειδή } p_r \neq 0) \\
&\neq 0\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως, $r_{Q^{(r)}_f}(S_{i^{(r)}_f}) \neq FS_{Q^{(r)}_f}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l})$.

Εφόσον ο **Alg** είναι αλγόριθμος συμφόρησης συνεπάγεται ότι η ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i^{(r)}_f}$ στην κατάσταση $Q^{(r)}_f$.

Εξετάζουμε στη συνέχεια την ακμή $e^{(r)}_i$, όπου i είναι οποιοσδήποτε δείκτης συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\}$. Από τον ισχυρισμό (6) έχουμε ότι η ακμή $e^{(r)}_i$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q^{(r)}_f$. Εφόσον ο **Alg** είναι αλγόριθμος συμφόρησης, προκύπτει ότι η ακμή $e^{(r)}_i$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i^{(r)}_f}$ στην κατάσταση $Q^{(r)}_f$.

Συνεχίζουμε με την ακμή $e^{(r')}_{i^{(r)}_f}$ για κάποιο ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$. Από τη συνθήκη (8), η ακμή $e^{(r')}_{i^{(r)}_f}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q^{(r)}_f$. Εφόσον ο **Alg** είναι αλγόριθμος συμφόρησης, προκύπτει ότι η ακμή $e^{(r')}_{i^{(r)}_f}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της $S_{i^{(r)}_f}$ στην κατάσταση $Q^{(r)}_f$.

Εφόσον καμιά από τις ακμές που χρησιμοποιεί η σύνοδος $S_{i_f^{(r)}}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίησή της στην κατάσταση $Q_f^{(r)}$ προκύπτει ότι $i_f^{(r)} \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q_f^{(r)})$, όπως απαιτείται.

Εξετάζουμε στη συνέχεια τη σύνοδο $S_{i_l^{(r)}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $S_{i_l^{(r)}}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$, καθώς επίσης, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η $i_l^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r')}_{i_l^{(r)}}$ και καμιά άλλη ακμή. Εξετάζουμε κάθε μια από αυτές τις ακμές ξεχωριστά, ξεκινώντας από την $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Από τον ισχυρισμό (3) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) &= b_r + p_r/4 \\ &= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{16} \\ &= b_{r-1} + \frac{9p_{r-1}}{16}. \end{aligned}$$

Ωστόσο, ο ισχυρισμός (2) υποδηλώνει ότι $r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) - r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) &= b_{r-1} + \frac{9p_{r-1}}{16} - (b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}) \\ . &= \frac{p_{r-1}}{16} \qquad (\text{επειδή } p_{r-1} \neq 0) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Επομένως, $r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) \neq FS_{Q_f^{(r)}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}})$.

Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, προκύπτει ότι η ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_l^{(r)}}$ στην κατάσταση $Q_f^{(r)}$.

Εξετάζουμε στη συνέχεια την ακμή $e^{(r')}_{i_l^{(r)}}$ για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$. Από τη συνθήκη (8) έχουμε ότι η ακμή $e^{(r')}_{i_l^{(r)}}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_f^{(r)}$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης συνεπάγεται ότι η ακμή $e^{(r')}_{i_l^{(r)}}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_l^{(r)}}$ στην κατάσταση $Q_f^{(r)}$.

Εφόσον καμιά από τις ακμές που χρησιμοποιεί η σύνοδος $S_{i_l^{(r)}}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίησή της στην κατάσταση $Q_f^{(r)}$, προκύπτει ότι $i_l^{(r)} \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q_f^{(r)})$, όπως απαιτείται.

Στη συνέχεια επικεντρώνουμε την προσοχή μας στις υπόλοιπες συνόδους. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r)}$, καθώς επίσης, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r')}$. Επίσης, η S_i χρησιμοποιεί τουλάχιστον μια ακμή $e^{(r'')} \in E^{(r'')}$, για κάποιον ακέραιο r'', τέτοιον ώστε $r < r'' \leq d/2$.

Από τις συνθήκες (6), (7) και (8), καμιά από τις ακμές $e_i^{(r)}$, $e_i^{(r')}$ και $e^{(r'')}$ δεν είναι ακμές συμφόρησης για την κατάσταση $Q_f^{(r)}$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, προκύπτει ότι καμιά από αυτές τις ακμές δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου S_i στην κατάσταση $Q_0^{(r)}$, όπως απαιτείται.

Σε αυτό το σημείο, η απόδειξη του Λήμματος 7.8 έχει ολοκληρωθεί. ■

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι όλες οι ακμές που ανήκουν σε μικρότερη από την r-οστή φάση έχουν ελεύθερη χωρητικότητα στην $Q_f^{(r)}$.

Λήμμα 7.11 *Για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ και κάθε ακέραιο r', $1 \leq r' < r$, ισχύει ότι*

$$residual_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')}) \quad \geq \quad \frac{p_{r-1}}{8}\,.$$

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_i^{(r')}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους S_i και $S_{i_f^{(r')}}$. Από την επαγωγική υπόθεση (3) συνεπάγεται ότι $i_f^{(r')} \notin \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, έτσι ώστε $r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r')}}) = r_{Q^{(r-1)}}(S_{i_f^{(r')}})$. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για τη σύνοδο i.

Υποθέτουμε αρχικά ότι $i \neq i_f^{(r)}$. Το Λήμμα 7.8 (2) υποδηλώνει ότι $r_{Q_f^{(r)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Από την επαγωγική υπόθεση (2β) έχουμε $r_{Q^{(r-1)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, έτσι ώστε $r_{Q_f^{(r)}}(S_i) = r_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(S_i)$. Εξ ορισμού της ελεύθερης χωρητικότητας είναι

$$\begin{aligned}
residual_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')}) = \quad &= \quad cap(e_i^{(r')}) - r_{Q_f^{(r)}}(S_i) - r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r')}}) \\
&= \quad cap(e_i^{(r')}) - r_{Q^{(r-1)}}(S_i) - r_{Q^{(r-1)}}(S_{i_f^{(r')}}) \\
&= \quad residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r')})\,.
\end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση (4α) προκύπτει ότι $residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r')}) \geq p_{r-1}/4$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} residual_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')}) &\geq p_{r-1}/4 \\ &> p_{r-1}/8\,, \end{aligned}$$

όπως απαιτείται.

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $i = i_f^{(r)}$. Από την επαγωγική υπόθεση (2β) συνεπάγεται ότι $r_{Q^{(r-1)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Από το Λήμμα 7.8 (1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} r_{Q_f^{(r)}}(S_i) &= b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8} \\ &= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{8} \\ &= r_{Q^{(r-1)}}(S_i) + \frac{p_{r-1}}{8}\,, \end{aligned}$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} residual_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')}) &= cap(e_i^{(r')}) - r_{Q_f^{(r)}}(S_i) - r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r')}}) \\ &= cap(e_i^{(r')}) - r_{Q^{(r-1)}}(S_i) - \frac{p_{r-1}}{8} - r_{Q^{(r-1)}}(S_{i_f^{(r')}}) \\ &= residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r')}) - \frac{p_{r-1}}{8}\,. \end{aligned}$$

Η επαγωγική υπόθεση (4α) υποδηλώνει ότι $residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r')}) \geq p_{r-1}/4$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} residual_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')}) &\geq p_{r-1}/4 - p_{r-1}/8 \\ &= p_{r-1}/8\,, \end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού. ∎

Εφαρμόζουμε στη συνέχεια τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $|S\ |_\alpha\ (Q^{(r-1)}, \infty) \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}| = 1$. Προφανώς, δεν υπάρχει δείκτης συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}\}$ τέτοιος ώστε η σύνοδος S_i να δρομολογείται προς ενημέρωση κατά τη διάρκεια της φάσης εκτέλεσης $\alpha^{(l_r)}$.

Εφόσον $|S\mid_\alpha (Q^{(r-1)},\infty)\setminus\{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}| = 1$ και $i_f^{(r)} \in S\mid_\alpha (Q^{(r-1)},\infty)\setminus\{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}$, προκύπτει ότι $S\mid_\alpha (Q^{(r-1)},\infty)\setminus\{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\} = \{i_f^{(r)}\}$. Επομένως, η μόνη ενεργή σύνοδος που δρομολογείται προς ενημέρωση μετά την κατάσταση $Q_f^{(r)}$ είναι η $S_{i_f^{(r)}}$. Αποδεικνύουμε ότι δρομολογώντας την $S_{i_f^{(r)}}$ σε οποιαδήποτε κατάσταση Q τέτοια ώστε $Q_f^{(r)} \xrightarrow{\alpha} Q$, δεν προκαλούνται αλλαγές στους ρυθμούς μετάδοσης και την κατάσταση των ενεργών συνόδων στην $\overrightarrow{Q^{(r-1)}}$. Υποθέτουμε ότι η Q, με $Q_f^{(r)} \xrightarrow{\alpha} Q$, είναι η πρώτη κατάσταση στην οποία η σύνοδος $i_f^{(r)}$ δρομολογείται προς ενημέρωση. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, οι σύνοδοι $i_f^{(r)}$ και $i_l^{(r)}$ μοιράζονται την ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$ με $cap(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) = 2\,b_r + p_r/2$. Λόγω του Λήμματος 7.8(1) είναι $r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_{r-1} + 5p_{r-1}/8$, ενώ από το Λήμμα 7.8 (2) προκύπτει ότι $r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Προφανώς, $r_Q(S_{i_f^{(r)}}) = b_{r-1} + 5p_{r-1}/8$ και $r_Q(S_{i_l^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Ωστόσο,

$$\begin{aligned} r_Q(S_{i_f^{(r)}}) - r_Q(S_{i_l^{(r)}}) &= b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8} - (b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}) \\ &= \frac{p_{r-1}}{8} \qquad (\text{επειδή } p_{r-1} \neq 0) \\ &> 0\,, \end{aligned}$$

έτσι ώστε $r_Q(S_{i_l^{(r)}}) < r_Q(S_{i_f^{(r)}})$. Συνεπώς, από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \Delta_Q(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}, i_l^{(r)}) &= cap(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) - r_Q(S_{i_f^{(r)}}) - r_Q(S_{i_l^{(r)}}) \\ &= 2b_r + \frac{p_r}{2} - \left(b_{r-1} + \frac{5}{8}\,p_{r-1}\right) - \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) \\ &= 2\left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{p_{r-1}}{4} - 2b_{r-1} - p_{r-1} - \frac{p_{r-1}}{8} \\ &= 2b_{r-1} + p_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{8} - 2b_{r-1} - p_{r-1} - \frac{p_{r-1}}{8} \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\Delta_Q(i_l^{(r)}) = 0$. Άρα, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης έχουμε $r_{\overrightarrow{Q}}(S_{i_f^{(r)}}) = r_Q(S_{i_f^{(r)}})$.

Τα ίδια επιχειρήματα εφαρμόζονται επαγωγικά για κάθε κατάσταση Q' για την οποία ισχύει $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$ και η σύνοδος $i_f^{(r)}$ δρομολογείται προς ενημέρωση στην Q'. Συνεπώς, ο ρυθμός μετάδοσης και η κατάσταση οποιασδήποτε συνόδου παραμένει αναλλοίωτη μετά την κατάσταση $Q_f^{(r)}$ και για το υπόλοιπο της εκτέλεσης.

Θεωρούμε έναν αυθαίρετο δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Αποδεικνύουμε ότι ο ρυθμός μετάδοσης της συνόδου S_i μπορεί να αυξηθεί στην κατάσταση $Q_f^{(r)}$ χωρίς να προκληθούν μειώσεις στους ρυθμούς μετάδοσης των υπολοίπων συνόδων.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r)}$, καθώς επίσης, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' \leq r$, η S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r')}$. Επιπρόσθετα, η S_i χρησιμοποιεί τουλάχιστον μια ακμή $e^{(r'')} \in E^{(r'')}$ για κάποιον ακέραιο r'' τέτοιον ώστε $r < r'' \leq d/2$.

Εξετάζουμε κάθε μια από τις ακμές αυτές ξεχωριστά, ξεκινώντας από την $e_i^{(r)}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$ έχουμε $cap(e_i^{(r)}) = 2b_r + p_r$. Από το Πόρισμα 7.8 (2) προκύπτει ότι $r_{Q_f^{(r)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, ενώ, από το Λήμμα 7.8 (1), συνεπάγεται ότι $r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_{r-1} + 5p_{r-1}/8$, έτσι ώστε

$$
\begin{aligned}
residual_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r)}) &= cap(e_i^{(r)}) - r_{Q_f^{(r)}}(S_i) - r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) \\
&= 2b_r + p_r - \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) - \left(b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8}\right) \\
&= 2 \cdot \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) + \frac{p_{r-1}}{4} - 2b_{r-1} - p_{r-1} - \frac{p_{r-1}}{8} \\
&\quad \text{(λόγω του αναδρομικού ορισμού των } b_r \text{ και } p_r\text{)} \\
&= \frac{p_{r-1}}{8}\,.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, εξ ορισμού της πράξης ενημέρωσης είναι $\Delta_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r)}, i) \geq p_{r-1}/8$.

Εξετάζουμε στη συνέχεια την ακμή $e_i^{(r')}$ για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' \leq r$. Από το Λήμμα 7.11 έχουμε $residual_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')}) \geq p_{r-1}/8$. Επομένως, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης είναι $\Delta_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r')}, i) \geq p_{r-1}/8$.

Τελικά, εξετάζουμε την ακμή $e^{(r'')} \in E^{(r'')}$ για κάποιον ακέραιο r'' τέτοιον ώστε $r < r'' \leq d/2$. Το Λήμμα 7.7 υποδηλώνει ότι

$$residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r'')}) \quad \geq \quad \frac{p_{r-1}}{8}\,.$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r'')}$ χρησιμοποιείται από τη σύνοδο S_i, καθώς επίσης και από κάποια άλλη σύνοδο S_j τέτοια ώστε $j \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Από το Λήμμα 7.8 (2) έχουμε $r_{Q_f^{(r)}}(S_i) = r_{Q_f^{(r)}}(S_j) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, ενώ από την επαγωγική υπόθεση (2β) είναι $r_{Q^{(r-1)}}(S_i) = r_{Q^{(r-1)}}(S_j) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, έτσι ώστε $r_{Q_f^{(r)}}(S_i) = r_{Q^{(r-1)}}(S_i)$ και $r_{Q_f^{(r)}}(S_j) = r_{Q^{(r-1)}}(S_j)$. Συνεπώς, $residual_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r'')}) = residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r'')})$, έτσι ώστε $residual_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r'')}) \geq \frac{p_{r-1}}{8}$. Άρα, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης προκύπτει ότι

$$\Delta_{Q_f^{(r)}}(e_i^{(r'')}, i) \quad \geq \quad p_{r-1}/8\,.$$

Εξ ορισμού της πράξης ενημέρωσης είναι $\Delta_{Q_f^{(r)}}(i) \geq p_{r-1}/8$, έτσι ώστε ο ρυθμός μετάδοσης της S_i μπορεί να αυξηθεί χωρίς να προκαλέσει καμιά μείωση στο ρυθμό μετάδοσης οποιασδήποτε άλλης συνόδου. Συνεπώς, η σύνοδος S_i δεν έχει αποκτήσει ακόμη την τελική δίκαιη τιμή της μεγίστου-ελαχίστου. Αντίφαση στην υπόθεση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου.

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της συνθήκης (1) αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι το σύνολο $S \mid_\alpha (Q^{(r-1)}, \infty) \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}$ δεν μπορεί να είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου $\mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}$. Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $S \mid_\alpha (Q^{(r-1)}, \infty) \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\} \subset \mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\}$. Θεωρούμε τη σύνοδο $S_{i_l^{(r)}}$. Προφανώς, η $S_{i_l^{(r)}}$ δε δρομολογείται προς ενημέρωση μετά την κατάσταση $\mathcal{A}_{Q^{(r-1)}}$. Αποδεικνύουμε ότι η σύνοδος $S_{i_l^{(r)}}$ δεν έχει αποκτήσει ακόμη τον τελικό δίκαιο ρυθμό μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $S_{i_l^{(r)}}$ μοιράζεται την ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$ με τη σύνοδο $i_f^{(r)}$, καθώς επίσης, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η $S_{i_l^{(r)}}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r')}$ και καμιά άλλη ακμή.

Εξετάζουμε ξεχωριστά κάθε μία από αυτές τις ακμές, ξεκινώντας από την $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$ είναι $cap(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) = 2b_r + p_r/2$. Επιπρόσθετα, το Λήμμα 7.8 (2) υποδηλώνει ότι $r_{Q^{(r)}_f}(S_{i^{(r)}_l}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Συνεπώς, από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\Delta_{Q^{(r)}_f}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}, i^{(r)}_l) &= \frac{1}{2} \cdot cap(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) - r_{Q^{(r)}_f}(S_{i^{(r)}_l}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(2\,b_r + \frac{p_r}{2}\right) - \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) \\
&= b_r + \frac{p_r}{4} - b_{r-1} - \frac{p_{r-1}}{2} \\
&= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{16} - b_{r-1} - \frac{p_{r-1}}{2} \\
&= \frac{p_{r-1}}{16}\,.
\end{aligned}$$

Θεωρούμε στη συνέχεια την ακμή $e^{(r')}_{i^{(r)}_l}$ για οποιονδήποτε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$. Από το Λήμμα 7.11 συνεπάγεται ότι $residual_{Q^{(r)}_f}(e^{(r')}_{i^{(r)}_l}) \geq p_{r-1}/8$. Συνεπώς, από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως, προκύπτει ότι

$$\Delta_{Q^{(r)}_f}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}, i^{(r)}_l) \quad \geq \quad p_{r-1}/8\,.$$

Επίσης, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, είναι

$$\begin{aligned}
\Delta_{Q^{(r)}_f}(i^{(r)}_l) &= \min\{\frac{p_{r-1}}{8}, \frac{p_{r-1}}{16}\} \\
&= \frac{p_{r-1}}{16}\,,
\end{aligned}$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned}
r_{Q^{(r)}_f}(S_{i^{(r)}_l}) + \Delta_{Q^{(r)}_f}(i^{(r)}_l) &= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{16} \\
&= b_{r-1} + \frac{9p_{r-1}}{16}\,.
\end{aligned}$$

Λόγω του Λήματος 7.8 (1) ισχύει ότι $r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_{r-1} + 5p_{r-1}/8$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) - r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) &= b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8} - (b_{r-1} + \frac{9p_{r-1}}{16}) \\ &= \frac{p_{r-1}}{16} \qquad (\text{επειδή } p_{r-1} > 0) \\ &> 0\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, η αύξηση του ρυθμού μετάδοσης της συνόδου $S_{i_l^{(r)}}$ θα προκαλούσε τη μείωση του ρυθμού μετάδοσης της συνόδου $S_{i_f^{(r)}}$ στην τιμή $b_{r-1} + 9p_{r-1}/16$, ενώ οι ρυθμοί μετάδοσης όλων των υπολοίπων συνόδων παραμένουν αναλλοίωτοι. Άρα, ο ρυθμός μετάδοσης της $S_{i_l^{(r)}}$ μπορεί να αυξηθεί κατά $p_{r-1}/16$, χωρίς να προκαλέσει μείωση στο ρυθμό μετάδοσης οποιασδήποτε άλλης συνόδου με ίσο ή μικρότερο ρυθμό μετάδοσης, έτσι ώστε ο $r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}})$ δεν είναι ο τελικός δίκαιος ρυθμός μετάδοσης για τη σύνοδο $S_{i_l^{(r)}}$. Αντίφαση στην υπόθεση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου.

Καταλήγουμε επομένως ότι $S\mid_\alpha (Q^{(r-1)}, \infty) \setminus \{i_f^{(r-1)}, i_l^{(r-1)}\} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, το οποίο σημαίνει ότι $l_r < \infty$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του (1).

Συνεχίζουμε με τις αποδείξεις των υπόλοιπων ισχυρισμών. Εφόσον $l_r < \infty$, ορίζουμε την κατάσταση $Q_{ff}^{(r)}$ να είναι η πρώτη κατάσταση στην οποία μια ενεργή σύνοδος στην $\overrightarrow{Q^{(r-1)}}$, διαφορετική από την $i_f^{(r)}$ δρομολογείται προς ενημέρωση μπροστά από την $Q_{ff}^{(r)}$ στην εκτέλεση α. Παρατηρούμε ότι, εφόσον $l_r < \infty$, η $Q_{ff}^{(r)}$ προηγείται της $\overrightarrow{Q^{(r)}}$ στη φάση εκτέλεσης $\alpha^{(l_r)}$. Επίσης, η $Q_f^{(r)}$ προηγείται της $Q_{ff}^{(r)}$ στη φάση εκτέλεσης $\alpha^{(l_r)}$.

Ο ακόλουθος απλός ισχυρισμός αποδεικνύει ότι μετά την κατάσταση $Q_f^{(r)}$ στην εκτέλεση α, καμιά αλλαγή στο ρυθμό μετάδοσης ή στην κατάσταση οποιασδήποτε ενεργής συνόδου δεν πραγματοποιείται πριν από την κατάσταση $Q_{ff}^{(r)}$.

Λήμμα 7.12 *Έστω μια οποιαδήποτε σύνοδος* $S_i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. *Τότε, για κάθε κατάσταση* Q *τέτοια ώστε* $\overleftarrow{Q_f^{(r)} \xrightarrow{\alpha} Q} \xrightarrow{\alpha} Q_{ff}^{(r)}$ *ισχύει ότι* $r_Q(S_i) = r_{Q_f^{(r)}}(S_i)$, *και* $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}, \mathcal{S}\rangle, Q)$.

Απόδειξη: Εξ ορισμού της κατάστασης $Q_{ff}^{(r)}$, η μόνη ενεργή σύνοδος που μπορεί να δρομολογηθεί μπροστά από την κατάσταση Q είναι η $S_{i_f^{(r)}}$.

Συνεχίζουμε με επαγωγή στην Q. Για τη βάση της επαγωγής, όπου $Q = Q_f^{(r)}$, ισχύει προφανώς ότι $r_Q(S_i) = r_{Q_f^{(r)}}(S_i)$. Επιπρόσθετα, το Λήμμα 7.8 (9) υποδηλώνει ότι

$$i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}, \mathcal{S}\rangle, Q)\,,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη της επαγωγικής βάσης.

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάθε κατάσταση $\overleftarrow{Q}$ τέτοια ώστε $Q_f^{(r)} \xrightarrow{\alpha} \overleftarrow{Q} \xrightarrow{\alpha} Q_{ff}^{(r)}$ ισχύει ότι $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) = r_{Q_f^{(r)}}(S_i)$ και $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}, \mathcal{S}\rangle, \overleftarrow{Q})$. Για το επαγωγικό βήμα αποδεικνύουμε ότι οι ισχυρισμοί ισχύουν για την κατάσταση Q.

Προφανώς, η μόνη ενεργή σύνοδος που μπορεί να δρομολογηθεί προς ενημέρωση μπροστά από την κατάσταση Q είναι η $S_{i_f^{(r)}}$. Παρατηρούμε ότι αν μια απενεργοποιημένη σύνοδος δρομολογηθεί μπροστά από την Q, η επαγωγική υπόθεση υποδηλώνει άμεσα ότι οι ισχυρισμοί ισχύουν. Συνεπώς, εξετάζουμε την περίπτωση που η σύνοδος $S_{i_f^{(r)}}$ δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση Q. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $S_{i_f^{(r)}}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$. Από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_f^{(r)}}) = r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}})$ και $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_l^{(r)}}) = r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}})$. Το Λήμμα 7.8 (1) και (2) υποδηλώνει ότι $r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_{r-1} + 5p_{r-1}/8$ και $r_{Q_f^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_l^{(r)}}) = b_{r-1} + 5p_{r-1}/8$ και $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_l^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_f^{(r)}}) + r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_l^{(r)}}) &= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{8} + b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} \\
&= 2b_{r-1} + \frac{9}{8}\,p_{r-1} \\
&= 2\left(b_{r-1} + \frac{p-r-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{p_{r-1}}{4} \\
&= 2b_r + \frac{p_r}{2}\,.
\end{aligned}$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$ είναι $cap(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) = 2b_r + p_2/2$, έτσι ώστε $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_f^{(r)}}) + r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_l^{(r)}}) = cap(e_{i_l^{(r)}}^{(r)})$. Επομένως, προκύπτει από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης ότι $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_f^{(r)}, e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) = 0$, έτσι ώστε $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_f^{(r)}) = 0$. Συνεπώς, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης έχουμε, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_Q$, ότι $r_Q(S_i) = r_{\overleftarrow{Q}}(S_i)$.

Ωστόσο, από την επαγωγική υπόθεση είναι $\mathcal{A}_{\overleftarrow{Q}} = \mathcal{A}_{Q_f^{(r)}}$ και $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) = r_{Q_f^{(r)}}(S_i)$, έτσι ώστε $r_Q(S_i) = r_{Q_f^{(r)}}(S_i)$. Επιπρόσθετα, εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης και η συνθήκη απενεργοποίησης συνόδων βασίζεται μόνο στους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων, το Λήμμα 7.8 (9) υποδηλώνει άμεσα ότι $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}, \mathcal{S}\rangle, Q)$. Στο σημείο αυτό η απόδειξη του επαγωγικού βήματος έχει ολοκληρωθεί. ■

Μιλώντας άτυπα, ο επόμενος τεχνικός ισχυρισμός περιγράφει το κλάσμα της φάσης εκτέλεσης $\alpha^{(l_r)}$, ξεκινώντας με τη σύνοδο που δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση $Q_{ff}^{(r)}$ και καταλήγοντας στην αμέσως προηγούμενη κατάσταση της $Q^{(r)}$.

Λήμμα 7.13 *Έστω ότι Q είναι μια κατάσταση τέτοια ώστε $\overleftarrow{Q_{ff}^{(r)} \xrightarrow{\alpha}} Q \xrightarrow{\alpha} Q^{(r)}$. Τότε, για την Q ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) *για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{S} \mid_{\alpha} (Q_f^{(r)}, Q) \cup \{i_f^{(r)}\}$, $r_Q(S_i) = b_r + p_r/2$,*

(2) *για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \mathcal{S} \mid_{\alpha} (Q_f^{(r)}, Q) \setminus \{i_f^{(r)}\}$, $r_Q(S_i) = r_{Q_f^{(r)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$,*

(3) *η ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$ είναι ακμή συμφόρησης για την Q,*

(4) *για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, η ακμή $e_i^{(r)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την Q,*

(5) *για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ και κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η ακμή $e_i^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την Q,*

(6) *για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $r < r' \leq d/2$ και κάθε ακμή $e^{(r')} \in E^{(r')}$, η $e^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την Q,*

(7) *για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$.*

Μιλώντας άτυπα, οι συνθήκες (1) και (2) καθορίζουν τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων στην κατάσταση Q. Οι συνθήκες (3), (4), (5) και (6) εγγυώνται ότι η ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$ είναι η μοναδική ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q, ενώ η συνθήκη (7) υποδηλώνει ότι καμιά σύνοδος δεν απενεργοποιείται. Παρουσιάζουμε στη συνέχεια την τυπική απόδειξη του Λήμματος 7.13.

Απόδειξη: Με επαγωγή στην Q. Για τη βάση της επαγωγής είναι $Q = Q^{(r)}_{ff}$.

Βάση Επαγωγής (Λήμμα 7.13)

Καθορίζουμε αρχικά το ρυθμό μετάδοσης και την κατάσταση κάθε συνόδου στην $Q^{(r)}_{ff}$.

Συμβολίζουμε με $i^{(r)}_{ff}$ τη σύνοδο που δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση $Q^{(r)}_{ff}$. Εξ ορισμού της κατάστασης $Q^{(r)}_{ff}$ ισχύει ότι $i^{(r)}_{ff} \neq i^{(r)}_{f}$, ενώ από τον ορισμό της κατάστασης $Q^{(r)}$ προκύπτει ότι $i^{(r)}_{ff} \neq i^{(r)}_{l}$.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i^{(r)}_{ff}$ χρησιμοποιεί στη φάση r την ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_{ff}}$, η οποία χρησιμοποιείται επίσης από τη σύνοδο $i^{(r)}_{f}$. Επιπρόσθετα, λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$ είναι $cap(e^{(r)}_{i^{(r)}_{ff}}) = 2b_r + p_r$. Από το Λήμμα 7.12 συνεπάγεται ότι $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_{i^{(r)}_{f}}) = r_{Q^{(r)}_{f}}(S_{i^{(r)}_{f}})$ και $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_{i^{(r)}_{ff}}) = r_{Q^{(r)}_{f}}(S_{i^{(r)}_{ff}})$. Συνεπώς, το Λήμμα 7.8 (1) και (2) υποδηλώνει ότι $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_{i^{(r)}_{f}}) = b_{r-1} + 5p_{r-1}/8$ και $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_{i^{(r)}_{ff}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Άρα, από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως είναι

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(e^{(r)}_{i^{(r)}_{ff}}, i^{(r)}_{ff}) &= \frac{1}{2}\, cap(e^{(r)}_{i^{(r)}_{ff}}) - r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_{i^{(r)}_{ff}}) \\
&\quad \text{(λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})\text{)} \\
&= b_r + \frac{p_r}{2} - \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) \\
&\quad \text{(λόγω του ορισμού των } b_r \text{ και } p_r\text{)} \\
&= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{8} - b_{r-1} - \frac{p_{r-1}}{2} \\
&= \frac{p_{r-1}}{8}\,.
\end{aligned}
$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $S_{i^{(r)}_{ff}}$ χρησιμοποιεί επίσης την ακμή $e^{(r')}_{i^{(r)}_{ff}}$, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$. Το Λήμμα 7.12 και ο ορισμός της ελεύθερης χωρητικότητας μιας ακμής υποδηλώνουν ότι

$$
residual_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(e^{(r')}_{i^{(r)}_{ff}}) = residual_{Q^{(r)}_{f}}(e^{(r')}_{i^{(r)}_{ff}}),
$$

έτσι ώστε από το Λήμμα 7.11 προκύπτει ότι $residual_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(e^{(r')}_{i^{(r)}_{ff}}) \geq p_{r-1}/8$. Επομένως,

$$\Delta_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(i^{(r)}_{ff}, e^{(r')}_{i^{(r)}_{ff}}) \quad \geq \quad p_{r-1}/8\,.$$

Η σύνοδος $S_{i^{(r)}_{ff}}$ χρησιμοποιεί επιπλέον στη φάση r'' την ακμή $e^{(r'')} \in E^{(r'')}$, για κάθε ακέραιο r'' τέτοιον ώστε $r < r'' \leq d/2$. Επιπρόσθετα, λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η $e^{(r'')}$ χρησιμοποιείται επίσης από κάποια σύνοδο S_i για την οποία $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l, i^{(r)}_{ff}\}$. Το Λήμμα 7.12 υποδηλώνει ότι $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_i) = r_{Q^{(r)}_f}(S_i)$ και $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_{i^{(r)}_{ff}}) = r_{Q^{(r)}_f}(S_{i^{(r)}_{ff}})$. Εφόσον $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l, i^{(r)}_{ff}\}$, από το Λήμμα 7.8(2) και την επαγωγική υπόθεση (2β) (του Λήμματος 7.1), προκύπτει ότι $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_{i^{(r)}_{ff}}) = r_{Q^{(r-1)}}(S_{i^{(r)}_{ff}})$ και $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_i) = r_{Q^{(r-1)}}(S_i)$, έτσι ώστε

$$residual_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(e^{(r'')}) \quad = \quad residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r'')})\,.$$

Ωστόσο, το Λήμμα 7.11 υποδηλώνει ότι

$$residual_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e^{(r'')}) \quad \geq \quad \frac{p_{r-1}}{8}\,.$$

Επομένως,

$$residual_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(e^{(r'')}) \quad \geq \quad \frac{p_{r-1}}{8}\,,$$

έτσι ώστε, από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως, είναι $\Delta_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(i^{(r)}_{ff}, e^{(r'')}) \geq p_{r-1}/8$. Άρα, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, έχουμε

$$\Delta_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(i^{(r)}_{ff}) \quad = \quad \frac{p_{r-1}}{8}\,,$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned}
r_{Q^{(r)}_{ff}}(S_{i^{(r)}_{ff}}) &= r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_{i^{(r)}_{ff}}) + \Delta_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(i^{(r)}_{ff}) \\
&= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{8} \qquad\qquad (\text{λόγω του αναδρομικού ορισμού του } b_r) \\
&= b_r + \frac{1}{2} \cdot \frac{p_{r-1}}{4} \\
&= b_r + \frac{p_r}{2}\,.
\end{aligned}$$

Λόγω του Λήμματος 7.8(1), ισχύει ότι $r_{Q^{(r)}_{f}}(S_{i^{(r)}_{f}}) = b_{r-1} + 5p_{r-1}/8$. Από το Λήμμα 7.12 συνεπάγεται ότι $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_{i^{(r)}_{f}}) = r_{Q^{(r)}_{f}}(S_{i^{(r)}_{f}})$, έτσι ώστε $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_{i^{(r)}_{f}}) = b_{r-1} + 5p_{r-1}/8$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_{i^{(r)}_{f}}) - r_{Q^{(r)}_{ff}}(S_{i^{(r)}_{ff}}) &= b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8} - (b_r + \frac{p_r}{2}) \\
&\qquad (\text{λόγω του αναδρομικού ορισμού των } b_r \text{ και } p_r) \\
&= b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8} - (b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{8}) \\
&= \frac{5p_{r-1}}{8} - \frac{5p_{r-1}}{8} \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

έτσι ώστε

$$r_{Q^{(r)}_{ff}}(S_{i^{(r)}_{f}}) \;=\; b_r + \frac{p_r}{2}\,.$$

Επιπρόσθετα, για κάθε $i \in \mathcal{A}_{Q^{(r-1}} \setminus \{i^{(r)}_{f}, i^{(r)}_{ff}\}$, ο ορισμός της πράξης ενημέρωσης υποδηλώνει ότι $r_{Q^{(r)}_{ff}}(S_i) = r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_i)$. Από το Λήμμα 7.12 προκύπτει ότι $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}_{ff}}}(S_i) = r_{Q^{(r)}_{f}}(S_i)$. Λόγω του Λήμματος 7.8 (2) είναι $r_{Q^{(r)}_{f}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Προφανώς, $\mathcal{S}\mid_{\alpha} (Q^{(r)}_{f}, Q) \subseteq \{i^{(r)}_{f}, i^{(r)}_{ff}\}$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη των (1) και (2).

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια τη συνθήκη (3).

Ισχυρισμός 7.12 *Η ακμή $e_{i^{(r)}_{l}}^{(r)}$ είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q^{(r)}_{ff}$.*

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i^{(r)}_f$ και $i^{(r)}_l$. Λόγω του Λήμματος 7.8 (9) έχουμε $i^{(r)}_f \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}_f}$ και $i^{(r)}_l \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}_f}$. Από το Λήμμα 7.12 συνεπάγεται ότι $\mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}} = \mathcal{A}_{Q^{(r)}_f}$, έτσι ώστε $i^{(r)}_f \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}}$ και $i^{(r)}_l \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}}$. Προκύπτει ότι $\mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}} \mid e^{(r)}_{i^{(r)}_l} = \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\} \neq \emptyset$. Το Λήμμα 7.8 (5) υποδηλώνει ότι η ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q^{(r)}_f$. Συνεπώς, η Πρόταση 4.2 υποδηλώνει ότι η ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q^{(r)}_{ff}$, όπως απαιτείται. ∎

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια τη συνθήκη (4). Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι το σύνολο των ενεργών συνόδων παραμένει αναλλοίωτο μεταξύ των καταστάσεων $\overrightarrow{Q^{(r-1)}}$ και $Q^{(r)}_{ff}$.

Λήμμα 7.14 $\mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}} = \mathcal{A}_{Q^{(r)}_f} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 7.8 (6) συνεπάγεται ότι $\mathcal{A}_{Q^{(r)}_f} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Το Λήμμα 7.12 υποδηλώνει ότι, για κάθε κατάσταση Q τέτοια ώστε $\overleftarrow{Q^{(r)}_f} \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\alpha} Q^{(r)}_{ff}$ και κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}_f}$, ισχύει ότι $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$. Επομένως, $\mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}} = \mathcal{A}_{Q^{(r)}_f} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, όπως απαιτείται. ∎

Υπολογίζουμε στη συνέχεια το ισομερίδιο της ακμής $e^{(r)}_{i_{l_r}}$.

Λήμμα 7.15 $FS_{Q^{(r)}_{ff}}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) = b_r + p_r/4$.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 7.14 έχουμε $\mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Συνεπώς, $i^{(r)}_f \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}}$ και $i^{(r)}_l \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}}$. Επομένως, $\mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}} \mid e^{(r)}_{i^{(r)}_{l_r}} = \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\}$, έτσι ώστε

$$
\begin{aligned}
FS_{Q^{(r)}_{ff}}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) &= \frac{cap(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) - allot_{Q^{(r)}_{ff}}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l})}{|\mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}} \mid e^{(r)}_{i^{(r)}_l}|} \\
&= \frac{cap(e^{(r)}_{i^{(r)}_l})}{2} \\
&= b_r + \frac{p_r}{4} \qquad \text{(λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})\text{)},
\end{aligned}
$$

όπως απαιτείται. ∎

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό του ισομεριδίου άλλων ακμών της φάσης r.

Λήμμα 7.16 *Για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$ *ισχύει ότι*

$$FS_{Q_{ff}^{(r)}}(e_i^{(r)}) = b_r + \frac{p_r}{2}.$$

Απόδειξη: Από το Λήμμα 7.14 συνεπάγεται ότι $\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(r)}} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Επομένως, $i \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(r)}}$ και $i_f^{(r)} \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(r)}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_i^{(r)}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους S_i και $S_{i_f^{(r)}}$. Επομένως, $\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(r)}} \mid e_i^{(r)} = \{i, i_f^{(r)}\}$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned}
FS_{Q_{ff}^{(r)}}(e_i^{(r)}) &= \frac{cap(e_i^{(r)}) - allot_{Q_{ff}^{(r)}}(e_i^{(r)})}{|\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(r)}} \mid e_i^{(r)}|} \\
&= \frac{cap(e_i^{(r)})}{2} \\
&= b_r + \frac{p_r}{2} \qquad \text{(λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})\text{)},
\end{aligned}$$

όπως απαιτείται. ■

Ισχυρισμός 7.13 *Για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, *η ακμή* $e_i^{(r)}$ *δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση* $Q_{ff}^{(r)}$.

Απόδειξη: Το Λήμμα 7.16 υποδηλώνει ότι $FS_{Q_{ff}^{(r)}}(e_i^{(r)}) = b_r + p_r/2$. Από το Λήμμα 7.15 έχουμε $FS_{Q_{ff}^{(r)}}(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) = b_r + p_r/4$.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i_f^{(r)}$ χρησιμοποιεί κάθε ακμή $e_i^{(r)}$, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}\}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
MFS_{Q_{ff}^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) &\leq \min\{FS_{Q_{ff}^{(r)}}(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}), \bigcup_{i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}} \{FS_{Q_{ff}^{(r)}}(e_i^{(r)})\}\} \\
&= \min\{b_r + \frac{p_r}{4}, b_r + \frac{p_r}{2}\} \\
&= b_r + \frac{p_r}{4}.
\end{aligned}$$

Άρα, $S_{i_f^{(r)}} \in \mathcal{A}_{Q_{ff}^{(r)}} \mid e_i^{(r)}$, ενώ

$$\begin{aligned} FS_{Q_{ff}^{(r)}}(e_i^{(r)}) - MFS_{Q_{ff}^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) &\geq b_r + \frac{p_r}{2} - (b_r + \frac{p_r}{4}) \\ &= \frac{p_r}{4} \\ &\neq 0\,, \end{aligned}$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι η ακμή $e_i^{(r)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_{ff}^{(r)}$, όπως απαιτείται. ■

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τη συνθήκη (5).

Ισχυρισμός 7.14 *Για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$ και κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ ισχύει ότι η ακμή $e_i^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_{ff}^{(r)}$.*

Απόδειξη: Από την επαγωγική υπόθεση (4β) συνεπάγεται ότι

$$FS_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e_i^{(r')})(e_i^{(r')}) \;\; \geq \;\; b_{r-1} + 3p_{r-1}/4\,.$$

Λόγω του Λήμματος 7.14, έχουμε $\mathcal{A}_{Q_{ff}^{(r)}} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Συνεπώς, εξ ορισμού του ισομεριδίου, είναι $FS_{Q_{ff}^{(r)}} = FS_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e_i^{(r')})$, έτσι ώστε

$$FS_{Q_{ff}^{(r)}}(e_i^{(r')}) \;\; \geq \;\; b_{r-1} + 3p_{r-1}/4\,.$$

Επιπρόσθετα, από το Λήμμα 7.16 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} FS_{Q_{ff}^{(r)}}(e_i^{(r)}) &= b_r + \frac{p_r}{2} \\ &= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{8} \\ &\quad \text{(λόγω του αναδρομικού ορισμού των } b_r \text{ και } p_r\text{)} \\ &= b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8}\,. \end{aligned}$$

Προφανώς,

$$\begin{aligned} FS_{Q^{(r)}_{ff}}(e_i^{(r')}) - FS_{Q^{(r)}_{ff}}(e_i^{(r)}) &\geq b_{r-1} + \frac{3p_{r-1}}{4} - (b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8}) \\ &= \frac{p_{r-1}}{8} \\ &> 0\,. \end{aligned}$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί και τις δύο ακμές $e_i^{(r)}$ και $e_i^{(r')}$. Από τον ορισμό του ελάχιστου ισομερίδιου μιας συνόδου, αυτό υποδηλώνει ότι $MFS_{Q^{(r)}_{ff}}(S_i) < FS_{Q^{(r)}_{ff}}(e_i^{(r')})$, έτσι ώστε η ακμή $e_i^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q^{(r)}_{ff}$, όπως απαιτείται. ■

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (6).

Ισχυρισμός 7.15 *Για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $r < r' \leq d/2$ και κάθε ακμή $e^{(r')} \in E^{(r')}$, η $e^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q^{(r)}_{ff}$.*

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η $e^{(r')}$ χρησιμοποιείται από κάποια σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, η οποία χρησιμοποιεί επίσης την ακμή $e_i^{(r)}$.

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα ισομερίδια των ακμών $e_i^{(r)}$ και $e^{(r')}$. Το Λήμμα 7.16 υποδηλώνει ότι

$$\begin{aligned} FS_{Q^{(r)}_{ff}}(e_i^{(r)}) &= b_r + p_r/2 \\ &= \frac{cap(e_i^{(r)})}{2} \qquad \text{(λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})\text{)}\,. \end{aligned}$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r')}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους S_i και $S_{i'}$, για κάποιο δείκτη συνόδου $i' \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Το Λήμμα 7.14 υποδηλώνει ότι $\mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Συνεπώς, $i \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}}$ και $i' \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}}$, έτσι ώστε $\mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}} \mid e^{(r')} = \{i, i'\}$.

Επομένως, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} FS_{Q^{(r)}_{ff}}(e^{(r')}) &= \frac{cap(e^{r'})) - allot_{Q^{(r)}_{ff}}(e^{(r')})}{|\mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}} \mid e^{(r')}|} \\ &= \frac{cap(e^{(r')})}{2}. \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 7.3 προκύπτει ότι $cap(e_i^{(r)}) < cap(e^{(r')})$. Επομένως, $FS_{Q^{(r)}_{ff}}(e_i^{(r)}) < FS_{Q^{(r)}_{ff}}(e^{(r')})$. Από τον ορισμό του ελάχιστου ισομεριδίου για μια σύνοδο προκύπτει ότι $MFS_{Q^{(r)}_{ff}}(S_i) < FS_{Q^{(r)}_{ff}}(e^{(r')})$, έτσι ώστε η ακμή $e^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q^{(r)}_{ff}$, όπως απαιτείται. ∎

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της (7). Εξετάζουμε ξεχωριστά κάθε μια από τις ενεργές συνόδους στην κατάσταση $\overrightarrow{Q^{(r-1)}}$, ξεκινώντας με τη σύνοδο $S_{i_f{(r)}}$.

Ισχυρισμός 7.16 $i_f^{(r)} \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(r)}_{ff})$.

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η $i_f^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Επίσης, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, η $i_f^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r)}$, καθώς επίσης, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η $i_f^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r')}_{i_f^{(r)}}$ και καμιά άλλη ακμή.

Εξετάζουμε ξεχωριστά κάθε μια από αυτές τις ακμές, ξεκινώντας από την $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $S_{i_f^{(r)}}$ και $S_{i_l^{(r)}}$. Το Λήμμα 7.15 υποδηλώνει ότι $FS_{Q^{(r)}_{ff}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) = b_r + p_r/4$.

Υπενθυμίζουμε (συνθήκη (1)) ότι $r_{Q^{(r)}_{ff}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_r + p_r/2$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} r_{Q^{(r)}_{ff}}(S_{i_f^{(r)}}) - FS_{Q^{(r)}_{ff}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) &= b_r + \frac{p_r}{2} - (b_r + \frac{p_r}{4}) \\ &= \frac{p_r}{4} \\ &\neq 0 \qquad \text{(λόγω του ορισμού του } p_r\text{)}. \end{aligned}$$

Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, συνεπάγεται ότι η ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_f^{(r)}}$ στην κατάσταση $Q_{ff}^{(r)}$.

Εξετάζουμε τώρα την ακμή $e_i^{(r)}$, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Ο Ισχυρισμός 7.13 υποδηλώνει ότι η ακμή $e_i^{(r)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q_{ff}^{(r)}$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, προκύπτει ότι η ακμή $e_i^{(r)}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_f^{(r)}}$ στην κατάσταση $Q_{ff}^{(r)}$.

Εξετάζουμε τελικά την ακμή $e_{i_f^{(r)}}^{(r')}$. Ο Ισχυρισμός 7.13 υποδηλώνει ότι η ακμή $e_{i_f^{(r)}}^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $Q_{ff}^{(r)}$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, προκύπτει ότι η ακμή $e_{i_f^{(r)}}^{(r')}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_f^{(r)}}$ στην κατάσταση $Q_{ff}^{(r)}$.

Εφόσον καμιά από τις ακμές που χρησιμοποιούνται από τη σύνοδο $S_{i_f^{(r)}}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίησή της στην κατάσταση $Q_{ff}^{(r)}$, συνεπάγεται ότι $i_f^{(r)} \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q_{ff}^{(r)}$, όπως απαιτείται. ■

Εξετάζουμε στη συνέχεια τη σύνοδο $S_{i_l^{(r)}}$.

Λήμμα 7.17 $i_l^{(r)} \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q_{ff}^{(r)})$.

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $S_{i_l^{(r)}}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$. Επιπρόσθετα, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η $i_l^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r')}$ και καμιά άλλη ακμή.

Εξετάζουμε κάθε μια από αυτές τις ακμές ξεχωριστά, ξεκινώντας από την $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$. Από το Λήμμα 7.15 προκύπτει ότι $FS_{Q_{ff}^{(r)}}(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) = b_r + p_r/4$. Υπενθυμίζουμε ότι $r_{Q_{ff}^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} FS_{Q_{ff}^{(r)}}(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) - r_{Q_{ff}^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) &= b_r + \frac{p_r}{4} - (b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{4}) \\ &= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{8} - (b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{4}) \\ &\quad \text{(από τον ορισμό των } b_r \text{ και } p_r) \\ &= \frac{3p_{r-1}}{8} \\ &\neq 0 \qquad \text{(λόγω του ορισμού του } p_{r-1}). \end{aligned}$$

Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, συνεπάγεται ότι η ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i^{(r)}_l}$ στην κατάσταση $Q^{(r)}_{ff}$.

Εξετάζουμε τώρα την ακμή $e^{(r')}_{i^{(r)}_l}$, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$. Από τον Ισχυρισμό 7.14, η ακμή $e^{(r')}_{i^{(r)}_l}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την $Q^{(r)}_{ff}$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης συμπεραίνουμε ότι η ακμή $e^{(r')}_{i^{(r)}_l}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i^{(r)}_l}$ στην κατάσταση $Q^{(r)}_{ff}$.

Εφόσον καμιά από τις ακμές που χρησιμοποιεί η σύνοδος $S_{i^{(r)}_l}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίησή της στην κατάσταση $Q^{(r)}_{ff}$, προκύπτει ότι $i^{(r)}_l \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(r)}_{ff})$, όπως απαιτείται. ■

Στη συνέχεια εξετάζουμε όλες τις υπόλοιπες συνόδους.

Ισχυρισμός 7.17 *Για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\}$ *ισχύει ότι*

$$i \quad \notin \quad \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(r)}_{ff})\,.$$

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r)}_i$. Επιπρόσθετα, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r')}_i$, ενώ η S_i χρησιμοποιεί επίσης την ακμή $e^{(r'')} \in E^{(r'')}$, για κάποιο ακέραιο r'' τέτοιον ώστε $r < r'' \leq d/2$.

Από τους Ισχυρισμούς 7.13, 7.14 και 7.15, αντίστοιχα, καμιά από τις ακμές $e^{(r)}_i$, $e^{(r')}_i$ και $e^{(r'')}$ δεν είναι ακμές συμφόρησης για την κατάσταση $Q^{(r)}_{ff}$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης συνεπάγεται ότι καμιά από αυτές τις ακμές δεν επιφέρει την απενεργοποίηση της συνόδου S_i στην κατάσταση $Q^{(r)}_{ff}$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(r)}_{ff})$, όπως απαιτείται. ■

Η απόδειξη της επαγωγικής βάσης του Λήμματος 7.13 έχει τώρα ολοκληρωθεί.

Επαγωγική Υπόθεση (Λήμμα 7.13)

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάθε κατάσταση Q τέτοια ώστε $\overleftarrow{Q_{ff}^{(r)}} \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\alpha} Q^{(r)}$, ισχύουν τα ακόλουθα, για κάθε κατάσταση Q' τέτοια ώστε $\overleftarrow{Q_{ff}^{(r)}} \xrightarrow{\alpha} Q' \xrightarrow{\alpha} \overleftarrow{Q}$:

(1) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{S} \mid_{\alpha} (Q_f^{(r)}, Q') \cup \{i_f^{(r)}\}$, $r_{Q'}(S_i) = b_r + p_r/2$,

(2) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \mathcal{S} \mid_{\alpha} (Q_f^{(r)}, Q') \setminus \{i_f^{(r)}\}$, $r_{Q'}(S_i) = r_{Q_f^{(r)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$,

(3) η ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$ είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q',

(4) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, η ακμή $e_i^{(r)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q',

(5) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ και κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η ακμή $e_i^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q',

(6) για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $r < r' \leq d/2$ και κάθε ακμή $e^{(r')} \in E^{(r')}$, η ακμή $e^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q',

(7) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q')$.

Μιλώντας άτυπα, υποθέτουμε ότι όλες οι συνθήκες ισχύουν για όλες τις κατάστασεις ξεκινώντας από την κατάσταση $Q_{ff}^{(r)}$ μέχρι και την προηγούμενη της Q κατάσταση.

Επαγωγικό Βήμα (Λήμμα 7.13)

Αποδεικνύουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για την κατάσταση Q:

(1) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{S} \mid_{\alpha} (Q_f^{(r)}, Q) \cup \{i_f^{(r)}\}$, $r_Q(S_i) = b_r + p_r/2$,

(2) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \mathcal{S} \mid_{\alpha} (Q_f^{(r)}, Q) \setminus \{i_f^{(r)}\}$, $r_Q(S_i) = r_{Q_f^{(r)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$,

(3) η ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$ είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q,

(4) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, η ακμή $e_i^{(r)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q,

(5) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ και κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η ακμή $e_i^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q,

(6) για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $r < r' \leq d/2$, και κάθε ακμή $e^{(r')} \in E^{(r')}$, η $e^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q,

(7) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$.

Συμβολίζουμε με i_Q τη σύνοδο που δρομολογείται μπροστά από την κάτασταση Q. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για τη σύνοδο i_Q.

Υποθέτουμε αρχικά ότι $i_Q \notin \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Τότε ο ισχυρισμός ισχύει τετριμμένα.

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $i_Q = i_f^{(r)}$. Εφόσον η $i_f^{(r)}$ δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση $Q_f^{(r)}$ και $Q_f^{(r)} \xrightarrow{\alpha} Q$, συνεπάγεται ότι $\mathcal{S} \mid \alpha(Q_f^{(r)}, Q) = \mathcal{S} \mid \alpha(Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$, έτσι ώστε ισχύει επίσης ότι $\mathcal{A}_{Q_f^{(r)}} \setminus \mathcal{S} \mid \alpha(Q_f^{(r)}, Q) = \mathcal{A}_{Q_f^{(r)}} \setminus \mathcal{S} \mid \alpha(Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$.

Θεωρούμε τη σύνοδο $i_{ff}^{(r)}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, οι σύνοδοι $i_{ff}^{(r)}$ και $i_f^{(r)}$ μοιράζονται την ακμή $e_{i_{ff}^{(r)}}^{(r)}$ με $cap(e_{i_{ff}^{(r)}}^{(r)}) = 2b_r + p_r$. Προφανώς, $i_{ff}^{(r)} \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$ και $i_f^{(r)} \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση (1) προκύπτει ότι $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_r + p_r/2$ και $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) = b_r + p_r/2$, έτσι ώστε $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) + r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_f^{(r)}}) = 2b_r + p_r/2 = cap(e_{i_{ff}^{(r)}}^{(r)})$. Από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως έχουμε $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_f^{(r)}, e_{i_{ff}^{(r)}}^{(r)}) = 0$, έτσι ώστε $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_f^{(r)}) = 0$. Επιπρόσθετα, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, συνεπάγεται ότι, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overleftarrow{Q}}$, $r_Q(S_i) = r_{\overleftarrow{Q}}(S_i)$. Από την επαγωγική υπόθεση (7) προκύπτει ότι $\mathcal{A}_{\overleftarrow{Q}} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση (1) και (2) συνεπάγεται ότι, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, ισχύει ότι $r_Q(S_i) = b_r + p_r/2$ αν $i \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, Q) \cup \{i_f^{(r)}\}$, ή $r_Q(S_i) = r_{Q_f^{(r)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$ αν $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, Q) \setminus \{i_f^{(r)}\}$, όπως απαιτείται από τις (1) και (2).

Υποθέτουμε τώρα ότι $i_Q \neq i_f^{(r)}$. Εφόσον $Q \xrightarrow{\alpha} Q^{(r)}$ συμπεραίνουμε ότι $i_Q \neq i_l^{(r)}$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις να εξετάσουμε.

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που $i_Q \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_0^{(r)}, \overleftarrow{Q}) \setminus \{i_f^{(r)}\}$. Δηλαδή, η i_Q δρομολογείται προς ενημέρωση μπροστά από τουλάχιστον μια κατάσταση πριν την $\overleftarrow{Q}$. Επομένως, $\mathcal{S} \mid \alpha(Q_f^{(r)}, Q) = \mathcal{S} \mid \alpha(Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$, έτσι ώστε ισχύει επίσης $\mathcal{A}_{Q_f^{(r)}} \setminus \mathcal{S} \mid \alpha(Q_f^{(r)}, Q) = \mathcal{A}_{Q_f^{(r)}} \setminus \mathcal{S} \mid \alpha(Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, οι σύνοδοι i_Q και $i_f^{(r)}$ μοιράζονται μια ακμή $e_{i_Q}^{(r)}$ με $cap(e_{i_Q}^{(r)}) = 2b_r + p_r$. Προφανώς, $i_Q \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$ και $i_f^{(r)} \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση (1), είναι $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q}) = b_r + p_r/2$ και $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_r + p_r/2$, έτσι ώστε $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q}) + r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_f^{(r)}}) = 2b_r + p_r/2 = cap(e_{i_Q}^{(r)})$. Από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως, προκύπτει ότι $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_Q, e_{i_Q}^{(r)}) = 0$, έτσι ώστε $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_Q) = 0$. Επίσης, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, συνεπάγεται ότι για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overleftarrow{Q}}$, $r_Q(S_i) = r_{\overleftarrow{Q}}(S_i)$. Η επαγωγική υπόθεση (7) υποδηλώνει ότι $\mathcal{A}_{\overleftarrow{Q}} = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση (1) και (2) συνεπάγεται ότι $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, $r_Q(S_i) = b_r + p_r/2$ αν $i \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, Q) \cup \{i_f^{(r)}\}$, ή $r_Q(S_i) = r_{Q_f^{(r)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$ αν $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, Q) \setminus \{i_f^{(r)}\}$, όπως απαιτείται από τις (1) και (2).

Υποθέτουμε τελικά ότι $i_Q \notin \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, οι σύνοδοι i_Q και $i_f^{(r)}$ μοιράζονται την ακμή $e_{i_Q}^{(r)}$ με $cap(e_{i_Q}^{(r)}) = 2b_r + p_r$. Εφόσον $i_Q \notin \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$ ενώ $i_f^{(r)} \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$, από την επαγωγική υπόθεση (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$ και $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_r + p_r/2$, αντίστοιχα. Συνεπώς, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\overleftarrow{Q}}(e_{i_Q}^{(r)}, i_Q) &= cap(e_{i_Q}^{(r)}) - r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_f^{(r)}}) - r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q}) \\
&= cap(e_{i_Q}^{(r)}) - \left(b_r + \frac{p_r}{2}\right) - \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) \\
&= 2b_r + p_r - \left(b_r + \frac{p_r}{2}\right) - \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) \\
&= 2b_r + p_r - b_r - \frac{p_r}{2} - b_r \\
&= \frac{p_r}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_{i_Q} χρησιμοποιεί επίσης σε κάποια φάση r' την ακμή $e_{i_Q}^{(r')}$, για κάθε ακέραιο $1 \leq r' < r$. Επιπρόσθετα, λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_{i_Q}^{(r')}$ χρησιμοποιείται επίσης από τη σύνοδο $i_f^{(r')} \notin \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Από την επαγωγική υπόθεση (4α) (του Λήμματος 7.1) έχουμε

$$residual_{Q^{(r-1)}}(e_{i_Q}^{(r')}) \quad \geq \quad \frac{p_{r-1}}{4}\,.$$

Επίσης, από την επαγωγική υπόθεση (3) (του Λήμματος 7.1) ισχύει ότι $i_f^{(r')} \notin \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, έτσι ώστε $i_f^{(r')} \notin \mathcal{A}_{\overleftarrow{Q}}$. Από την επαγωγική υπόθεση (2) (του Λήμματος 7.1), είναι $r_{Q^{(r-1)}}(S_{i_Q}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, ενώ από την επαγωγική υπόθεση (2) συνεπάγεται ότι $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, έτσι ώστε $r_{Q^{(r-1)}}(S_{i_Q}) = r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q})$. Επομένως, $residual_{Q^{(r-1)}}(e_{i_Q}^{(r')}) = residual_{\overleftarrow{Q}}(e_{i_Q}^{(r')}) \geq p_{r-1}/4$. Συνεπώς, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης έχουμε $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(e_{i_Q}^{(r')}, i_Q) \geq p_{r-1}/4 = p_r$.

Τελικά, η σύνοδος i_Q χρησιμοποιεί τουλάχιστον μια ακμή $e^{(r'')} \in E^{(r'')}$, για κάποιον ακέραιο r'' τέτοιον ώστε $r < r'' \leq d/2$. Από το Λήμμα 7.7 προκύπτει ότι $residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r'')}) \geq p_{r-1}/8$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r'')}$ χρησιμοποιείται από τη σύνοδο S_{i_Q}, καθώς επίσης και από κάποια άλλη σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$.

Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις. Υποθέτουμε αρχικά ότι $S_i \notin \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$. Από την επαγωγική υπόθεση (2) προκύπτει ότι $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Επίσης, από την επαγωγική υπόθεση (2) (του Λήμματος 7.1) συμπεραίνουμε ότι $r_{Q^{(r-1)}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, έτσι ώστε $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) = r_{Q^{(r-1)}}(S_i)$. Επιπρόσθετα, εφόσον $S_{i_Q} \notin \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$, η επαγωγική υπόθεση (2) υποδηλώνει ότι $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Από την επαγωγική υπόθεση (2) (του Λήμματος 7.1) έχουμε $r_{Q^{(r-1)}}(S_{i_Q}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, έτσι ώστε, λόγω του Λήμματος 7.12, ισχύει ότι $r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q}) = r_{Q^{(r-1)}}(S_{i_Q})$. Συνεπώς, $residual_{\overleftarrow{Q}}(e^{(r'')}) = residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r'')})$, έτσι ώστε $residual_{\overleftarrow{Q}}(e^{(r'')} \geq p_{r-1}/8$. Από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης, είναι $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(e^{(r'')}, i_Q) \geq p_{r-1}/8$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $S_i \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q})$. Η επαγωγική υπόθεση (1) υποδηλώνει ότι $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) = b_r + p_r/2$. Από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης είναι

$$\Delta_{\overleftarrow{Q}}(e^{(r'')}, i_Q) \quad = \quad cap(e^{(r'')}) - r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) - r_{\overleftarrow{Q}}(S_{i_Q})$$

$$= \quad cap(e^{(r'')}) - \left(b_r + \frac{p_r}{2}\right) - \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) .$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\Delta_{\overleftarrow{Q}}(e^{(r)}_{i_Q}, i_Q) \quad = \quad cap(e^{(r)}_{i_Q}) - \left(b_r + \frac{p_r}{2}\right) - \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) .$$

Λόγω της Πρότασης 7.3, ισχύει ότι $cap(e^{(r'')}) > cap(e^{(r)}_{i_Q})$, έτσι ώστε

$$cap(e^{(r'')}) - (b_r + p_r/2) - (b_{r-1} + p_{r-1}/2) \quad > \quad cap(e^{(r)}_{i_Q}) - (b_r + p_r/2) - (b_{r-1} + p_{r-1}/2) .$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \Delta_{\overleftarrow{Q}}(e^{(r'')}, i_Q) \quad &> \quad \Delta_{\overleftarrow{Q}}(e^{(r)}_{i_Q}, i_Q) \\ &= \quad p_r/2\,. \end{aligned}$$

Άρα, εξ ορισμού της πράξης ενημέρωσης προκύπτει ότι $\Delta_{\overleftarrow{Q}}(i_Q) = p_r/2$. Επίσης, $r_Q(S_{i_Q}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2 + p_r/2 = b_r + p_r/2$, ενώ από την επαγωγική υπόθεση, για κάθε $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, είτε $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) = b_r + p_r/2$ ή $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} b_r + \frac{p_r}{2} - (b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}) \quad &= \quad b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{8} - (b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}) \\ &= \quad \frac{p_{r-1}}{8} \\ &> \quad 0 \qquad\qquad (\text{λόγω του ορισμού του } p_{r-1})\,, \end{aligned}$$

έτσι ώστε $r_{\overleftarrow{Q}}(S_i) < r_Q(S_{i_Q})$. Συνεπώς, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης συνεπάγεται ότι, για κάθε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_Q\}$, ισχύει ότι $r_Q(S_i) = r_{\overleftarrow{Q}}(S_i)$.

Προφανώς, $\mathcal{S}\mid_\alpha (Q^{(r)}_f, Q) = \mathcal{S}\mid_\alpha (Q^{(r)}_f, \overleftarrow{Q}) \cup \{i_Q\}$, έτσι ώστε $r_Q(S_i) = b_r + p_r/2$ αν $i \in \mathcal{S}\mid_\alpha (Q^{(r)}_f, Q) \cup \{i^{(r)}_f\}$ και $r_Q(S_i) = r_{Q^{(r)}_f}(S_i) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$ αν $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \mathcal{S}\mid_\alpha (Q^{(r)}_f, Q) \setminus \{i^{(r)}_f\}$, όπως απαιτείται από τις (1) και (2).

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (3).

Ισχυρισμός 7.18 *Η ακμή* $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ *είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση* Q.

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i^{(r)}_f$ και $i^{(r)}_l$. Η επαγωγική υπόθεση (7) υποδηλώνει ότι $\mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_{\overleftarrow{Q}}$, έτσι ώστε $i^{(r)}_f \in \mathcal{A}_Q$ και $i^{(r)}_l \in \mathcal{A}_Q$. Άρα, $\mathcal{A}_Q \mid e^{(r)}_{i^{(r)}_l} = \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\} \neq \emptyset$. Από την επαγωγική υπόθεση (3) προκύπτει ότι η ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $\overleftarrow{Q}$. Συνεπώς, λόγω της Πρότασης 4.2, η $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q, όπως απαιτείται. ■

Υπολογίζουμε στη συνέχεια το ισομερίδιο της ακμής $e^{(r)}_{i_{l_r}}$ για την κατάσταση Q.

Λήμμα 7.18 $FS_Q(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) = b_r + p_r/4$.

Απόδειξη: Από την επαγωγική υπόθεση (7) έχουμε $\mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Άρα, $i^{(r)}_f \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}_{ff}}$ και $i^{(r)}_l \in \mathcal{A}_Q$. Επομένως, $\mathcal{A}_Q \mid e^{(r)}_{i^{(r)}_{l_r}} = \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\}$, έτσι ώστε

$$
\begin{aligned}
FS_Q(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) &= \frac{cap(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) - allot_Q(e^{(r)}_{i^{(r)}_l})}{|\mathcal{A}_Q \mid e^{(r)}_{i^{(r)}_l}|} \\
&= \frac{cap(e^{(r)}_{i^{(r)}_l})}{2} \\
&= b_r + \frac{p_r}{4} \qquad (\text{ λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})),
\end{aligned}
$$

όπως απαιτείται. ■

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των ισομεριδίων των υπολοίπων ακμών της φάσης r στην κατάσταση Q.

Λήμμα 7.19 *Για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\}$ *ισχύει ότι*

$$FS_Q(e^{(r)}_i) \;=\; b_r + \frac{p_r}{2}\,.$$

Απόδειξη: Από την επαγωγική υπόθεση (7) έχουμε $\mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Άρα, $i \in \mathcal{A}_Q$ και $i_f^{(r)} \in \mathcal{A}_Q$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_i^{(r)}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους S_i και $S_{i_f^{(r)}}$. Επομένως, $\mathcal{A}_Q \mid e_i^{(r)} = \{i, i_f^{(r)}\}$, έτσι ώστε

$$
\begin{aligned}
FS_Q(e_i^{(r)}) &= \frac{cap(e_i^{(r)}) - allot_Q(e_i^{(r)})}{|\mathcal{A}_Q \mid e_i^{(r)}|} \\
&= \frac{cap(e_i^{(r)})}{2} \\
&= b_r + \frac{p_r}{2} \qquad \text{(λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})\text{)},
\end{aligned}
$$

όπως απαιτείται. ■

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τη συνθήκη (4).

Ισχυρισμός 7.19 *Για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, η ακμή $e_i^{(r)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q.*

Απόδειξη: Το Λήμμα 7.19 υποδηλώνει ότι $FS_Q(e_i^{(r)}) = b_r + p_r/2$, ενώ από το Λήμμα 7.18 προκύπτει ότι $FS_Q(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) = b_r + p_r/4$.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i_f^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r)}$, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}\}$ και καμιά άλλη ακμή. Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
MFS_Q(S_{i_f^{(r)}}) &\leq \min\{FS_Q(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}), \bigcup_{i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}} \{FS_Q(e_i^{(r)})\}\} \\
&= \min\{b_r + \frac{p_r}{4}, b_r + \frac{p_r}{2}\} \\
&= b_r + \frac{p_r}{4}.
\end{aligned}
$$

Επομένως, $S_{i_f^{(r)}} \in \mathcal{A}_Q \mid e_i^{(r)}$ ενώ

$$
\begin{aligned}
FS_Q(e_i^{(r)}) - MFS_Q(S_{i_f^{(r)}}) &= b_r + \frac{p_r}{2} - (b_r + \frac{p_r}{4}) \\
&= \frac{p_r}{4}
\end{aligned}
$$

$$\neq \quad 0\,,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι η ακμή $e_i^{(r)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q, όπως απαιτείται. ■

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (5).

Ισχυρισμός 7.20 *Για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $r < r' \leq d/2$, η ακμή $e_i^{(r')} \in E^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q.*

Απόδειξη: Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r')}$ χρησιμοποιείται από κάποια σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, η οποία επίσης χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r)}$.

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα ισομερίδια των ακμών $e_i^{(r)}$ και $e^{(r')}$. Λόγω του Λήμματος 7.19, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} FS_Q(e_i^{(r)}) &= b_r + p_r/2 \\ &= \frac{cap(e_i^{(r)})}{2} \qquad \text{(λόγω του τρόπου κατασκευής του } G(\mathsf{Sched})\text{))}\,. \end{aligned}$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r')}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους S_i και $S_{i'}$, για κάποιον δείκτη συνόδου $i' \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Από την επαγωγική υπόθεση (7) έχουμε $\mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Άρα, $i \in \mathcal{A}_Q$ και $i' \in \mathcal{A}_Q$, έτσι ώστε $\mathcal{A}_Q \mid e^{(r')} = \{i, i'\}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} FS_Q(e^{(r')}) &= \frac{cap(e^{r'}) - allot_Q(e^{(r')})}{|\mathcal{A}_Q \mid e^{(r')}|} \\ &= \frac{cap(e^{(r')})}{2}\,. \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 7.3 προκύπτει ότι $cap(e_i^{(r)}) < cap(e^{(r')})$. Επομένως,

$$FS_Q(e_i^{(r)}) \;<\; FS_Q(e^{(r')})\,.$$

Εξ ορισμού του ελάχιστου ισομεριδίου μιας συνόδου συνεπάγεται ότι $MFS_Q(S_i) < FS_Q(e^{(r')})$, έτσι ώστε η ακμή $e^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q, όπως απαιτείται. ■

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια την (6).

Ισχυρισμός 7.21 *Για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ και κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η ακμή $e_i^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q.*

Απόδειξη: Από την επαγωγική υπόθεση (4β) (του Λήμματος 7.1) είναι $FS_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e_i^{(r')}) \geq b_{r-1} + 3p_{r-1}/4$. Από την επαγωγική υπόθεση (7) έχουμε $\mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Συνεπώς, εξ ορισμού του ισομεριδίου προκύπτει ότι $FS_Q(e_i^{(r')} = FS_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e_i^{(r')})$, έτσι ώστε $FS_Q(e_i^{(r')}) \geq b_{r-1} + 3p_{r-1}/4$. Επίσης, από το Λήμμα 7.19 συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
FS_Q(e_i^{(r)}) &= b_r + \frac{p_r}{2} \\
&= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{8} \\
&\quad \text{(λόγω του αναδρομικού ορισμού των } b_r \text{ και } p_r) \\
&= b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8}\,.
\end{aligned}$$

Προφανώς,

$$\begin{aligned}
FS_Q(e_i^{(r')}) - FS_Q(e_i^{(r)}) &\geq b_{r-1} + \frac{3p_{r-1}}{4} - (b_{r-1} + \frac{5p_{r-1}}{8}) \\
&= \frac{p_{r-1}}{8} \\
&> 0\,.
\end{aligned}$$

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί και τις δύο ακμές $e_i^{(r)}$ και $e_i^{(r')}$. Από τον ορισμό του ελάχιστου ισομεριδίου μιας συνόδου, προκύπτει ότι $MFS_Q(S_i) < FS_Q(e_i^{(r')})$, έτσι ώστε η ακμή $e_i^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q, όπως απαιτείται. ■

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια την (7). Εξετάζουμε ξεχωριστά κάθε μια ενεργή σύνοδο στην κατάσταση $\overrightarrow{Q^{(r-1)}}$, ξεκινώντας με τη σύνοδο $S_{i_f(r)}$.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $i_f^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Επιπρόσθετα, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$, η $i_f^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r)}$, καθώς επίσης για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η $i_f^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r')}_{i_f^{(r)}}$ και καμιά άλλη ακμή.

Εξετάζουμε ξεχωριστά κάθε μια από αυτές τις ακμές, ξεκινώντας από την $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $S_{i_f^{(r)}}$ και $S_{i_l^{(r)}}$. Από το Λήμμα 7.18 συμπεραίνουμε ότι $FS_Q(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) = b_r + p_r/4$.

Από τη συνθήκη (1) έχουμε $r_Q(S_{i_f^{(r)}}) = b_r + p_r/2$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} r_Q(S_{i_f^{(r)}}) - FS_Q(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) &= b_r + \frac{p_r}{2} - (b_r + \frac{p_r}{4}) \\ &= \frac{p_r}{4} \\ &\neq 0 \qquad\qquad (\text{λόγω του ορισμού του } p_r). \end{aligned}$$

Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, η ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_f^{(r)}}$ στην κατάσταση Q.

Εξετάζουμε στη συνέχεια την ακμή $e_i^{(r)}$, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Ο Ισχύρισμος 7.19 υποδηλώνει ότι η ακμή $e_i^{(r)}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, η ακμή $e_i^{(r)}$ δεν επιφέρει την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_f^{(r)}}$ στην κατάσταση Q.

Εξετάζουμε τελικά την ακμή $e^{(r')}_{i_f^{(r)}}$. Ο Ισχυρισμός 7.19 υποδηλώνει ότι η ακμή $e^{(r')}_{i_f^{(r)}}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, η ακμή $e^{(r')}_{i_f^{(r)}}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_f^{(r)}}$ στην κατάσταση Q.

Εφόσον καμιά από τις ακμές που χρησιμοποιούνται από τη σύνοδο $S_{i_f^{(r)}}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίησή της στην κατάσταση Q, συνεπάγεται ότι $i_f^{(r)} \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$, όπως απαιτείται.

Εξετάζουμε στη συνέχεια τη σύνοδο $S_{i_l^{(r)}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $S_{i_l^{(r)}}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Επιπρόσθετα, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε

$1 \leq r' < r$, η $i_l^{(r)}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r')}$ και καμιά άλλη ακμή. Εξετάζουμε κάθε μία από αυτές τις ακμές ξεχωριστά, ξεκινώντας από την $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$. Από το Λήμμα 7.18 προκύπτει ότι $FS_Q(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) = b_r + p_r/4$. Από τη συνθήκη (2) συμπεραίνουμε ότι $r_Q(S_{i_l^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} FS_Q(e_{i_l^{(r)}}^{(r)}) - r_Q(S_{i_l^{(r)}}) &= b_r + \frac{p_r}{4} - (b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{4}) \\ &= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{8} - (b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{4}) \\ &\quad \text{(λόγω των αναδρομικών ορισμών των } b_r \text{ και } p_r) \\ &= \frac{3p_{r-1}}{8} \\ &\neq 0 \qquad \text{(λόγω του ορισμού του } p_{r-1}). \end{aligned}$$

Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, η ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r)}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_l^{(r)}}$ στην κατάσταση Q.

Εξετάζουμε στη συνέχεια την ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r')}$ για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$. Λόγω του Ισχυρισμού 7.21 προκύπτει ότι η ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r')}$ δεν είναι ακμή συμφόρησης για την κατάσταση Q. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, η ακμή $e_{i_l^{(r)}}^{(r')}$ δεν προκαλεί την απενεργοποίηση της συνόδου $S_{i_l^{(r)}}$ στην κατάσταση Q.

Αφού καμιά από τις ακμές που χρησιμοποιούνται από τη σύνοδο $S_{i_l^{(r)}}$ δεν επιφέρει την απενεργοποίησή της στην κατάσταση Q, προκύπτει ότι $i_l^{(r)} \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$, όπως απαιτείται.

Εξετάζουμε τώρα όλες τις υπόλοιπες ενεργές συνόδους. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r)}$. Επιπρόσθετα, για κάθε ακέραιο r' τέτοιον ώστε $1 \leq r' < r$, η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e_i^{(r')}$, καθώς επίσης η S_i χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r'')} \in E^{(r'')}$, για κάποιο ακέραιο r'' τέτοιον ώστε $r < r'' \leq d/2$.

Από τους Ισχυρισμούς 7.19, 7.21 και 7.20, καμιά από τις ακμές $e_i^{(r)}$, $e_i^{(r')}$ και $e^{(r'')}$ αντίστοιχα, δεν είναι ακμές συμφόρησης για την κατάσταση Q. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, καμιά από τις ακμές αυτές δεν προκαλεί επομένως την απενεργοποίηση της συνόδου S_i στην κατάσταση Q, το οποίο συνεπάγεται ότι $i \notin \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q)$, όπως απαιτείται.

Σε αυτό το σημείο έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του Λήμματος 7.13. ■

Μέχρι τώρα έχουμε καθορίσει το ρυθμό μετάδοσης και την κατάσταση όλων των συνόδων μέχρι την $\overleftarrow{Q^{(r)}}$. Εξετάζουμε τώρα την κατάσταση $Q^{(r)}$. Προφανώς, η σύνοδος $S_{i_l^{(r)}}$ δρομολογείται μπροστά από την $Q^{(r)}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $S_{i_l^{(r)}}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Επιπρόσθετα, για κάθε ακέραιο $1 \leq r' < r$, η $S_{i_l^{(r)}}$ χρησιμοποιεί την ακμή $e^{(r')}_{i_l^{(r)}}$ και καμιά άλλη ακμή. Εξετάζουμε κάθε μια από αυτές τις ακμές ξεχωριστά, ξεκινώντας από την $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r)}_{i_l^{(r)}}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i_f^{(r)}$ και $i_l^{(r)}$. Επίσης είναι $cap(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) = 2b_r + p_r/2$. Εφόσον $i_f^{(r)} \in \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q^{(r)}})$, το Λήμμα 7.13 (1) υποδηλώνει ότι $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_r + p_r/2$. Προφανώς, $S_{i_l^{(r)}} \notin \mathcal{S} \mid_\alpha (Q_f^{(r)}, \overleftarrow{Q^{(r)}})$, έτσι ώστε από το Λήμμα 7.13 (2) συνεπάγεται ότι $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_l^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
residual_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) &= cap(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) - r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_f^{(r)}}) - r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_l^{(r)}}) \\
&= 2b_r + \frac{p_r}{2} - \left(b_r + \frac{p_r}{2}\right) - \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) \\
&= 2b_r + \frac{p_r}{2} - b_r - \frac{p_r}{2} - b_r \\
&\quad \text{(λόγω του αναδρομικού ορισμού του } b_r\text{)} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Προφανώς,

$$\begin{aligned}
r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_f^{(r)}}) - r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_l^{(r)}}) &= b_r + \frac{p_r}{2} - (b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}) \\
&= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_{r-1}}{8} - (b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}) \\
&\quad \text{(λόγω των αναδρομικών ορισμών των } b_r \text{ και } p_r\text{)} \\
&= \frac{p_{r-1}}{8} \\
&> 0 \qquad\qquad \text{(λόγω του ορισμού του } p_{r-1}\text{)}\,.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως έχουμε

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}, i_l^{(r)}) &= \frac{1}{2}\, cap(e^{(r)}_{i_l^{(r)}}) - r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_l^{(r)}}) \\
&= \frac{1}{2}\,(2b_r + \frac{p_r}{2}) - \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) \\
&= b_r + \frac{p_r}{4} - b_r \\
&\quad \text{(λόγω του αναδρομικού ορισμού του } b_r\text{)} \\
&= \frac{p_r}{4} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{p_r}{4} \\
&\quad \text{(λόγω του αναδρομικού ορισμού του } p_r\text{)} \\
&= \frac{p_{r-1}}{16}\,.
\end{aligned}$$

Εξετάζουμε τώρα την ακμή $e^{(r')}_{i_l^{(r)}}$, όπου r' είναι ένας ακέραιος τέτοιος ώστε $1 \leq r' < r$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r')}_{i_l^{(r)}}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i_l^{(r)}$ και $i_f^{(r')}$. Από την επαγωγική υπόθεση (3) προκύπτει ότι $i_f^{(r')} \notin \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$. Ο Ισχυρισμός 7.13 (2) υποδηλώνει ότι $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_l^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$. Από την επαγωγική υπόθεση (2) έχουμε $r_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(S_{i_l^{(r)}}) = b_{r-1} + p_{r-1}/2$, έτσι ώστε $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_l^{(r)}}) = r_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(S_{i_l^{(r)}})$. Συνεπώς, εξ ορισμού της ελεύθερης χωρητικότητας μιας ακμής, ισχύει ότι $residual_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(e^{(r')}_{i_l^{(r)}}) = residual_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e^{(r')}_{i_l^{(r)}})$. Επιπρόσθετα, αφού $i_f^{(r')} \notin \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ είναι $r_{\overleftarrow{Q^{(r-1)}}}(S_{i_f^{(r')}}) = r_{Q^{(r-1)}}(S_{i_f^{(r')}})$. Είναι σαφές ότι $r_{\overleftarrow{Q^{(r-1)}}}(S_{i_l^{(r)}}) = r_{Q^{(r-1)}}(S_{i_f^{(r)}})$. Συνεπώς,

$$residual_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e^{(r')}_{i_l^{(r)}}) \;=\; residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r')}_{i_l^{(r)}})\,.$$

Από την επαγωγική υπόθεση (4α), συνεπάγεται ότι $residual_{Q^{(r-1)}}(e^{(r')}_{i_l^{(r)}}) \geq p_{r-1}/4$. Από τον ορισμό της συνάρτησης αυξήσεως, έχουμε

$$\Delta_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(e^{(r')}_{i_l^{(r)}}, i_l^{(r)}) \;\geq\; residual_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(e^{(r')}_{i_l^{(r)}})\,.$$

Επομένως,

$$\Delta_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(e^{(r')}_{i_l^{(r)}}, i_l^{(r)}) \quad \geq \quad \frac{p_{r-1}}{4}\,.$$

Άρα, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\Delta_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(i_l^{(r)}) &= \min\{\frac{p_{r-1}}{16}, \frac{p_{r-1}}{4}\} \\ &= \frac{p_{r-1}}{16} \\ &= \frac{p_r}{4} \qquad\qquad \text{(λόγω του αναδρομικού ορισμού του } p_r\text{)}\,,\end{aligned}$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned}r_{Q^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) &= r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_l^{(r)}}) + \Delta_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(i_l^{(r)}) \\ &= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{p_r}{4} \\ &= b_r + \frac{p_r}{4}\,.\end{aligned}$$

Επιπρόσθετα, εφόσον $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_f^{(r)}}) > r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_l^{(r)}})$, εξ ορισμού της πράξης ενημέρωσης είναι

$$\begin{aligned}r_{Q^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) &= r_{Q^{(r)}}(S_{i_l^{(r)}}) \\ &= b_r + \frac{p_r}{4}\,,\end{aligned}$$

όπως απαιτείται από την (2α).

Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η σύνοδος $S_{i_l^{(r)}}$ δεν μοιράζεται καμιά ακμή με οποιαδήποτε σύνοδο $S_i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i_f^{(r)}\}$. Συνεπώς, από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης έχουμε $r_{Q^{(r)}}(S_i) = r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_i)$. Προφανώς, $S_i \in S\ |_\alpha\ (Q^{(r-1)}, \overleftarrow{Q^{(r)}})$, έτσι ώστε, λόγω του Λήμματος 7.13 (1), ισχύει ότι $r_{\overleftarrow{Q^{(r)}}}(S_i) = b_r + p_r/2$. Συνεπώς, $r_{Q^{(r)}}(S_i) = b_r + p_r/2$, όπως απαιτείται από την (2β).

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (3). Από το Λήμμα 7.13 (3), (4), (5) και (6) συμπεραίνουμε ότι η μόνη ακμή συμφόρησης στην κατάσταση $\overleftarrow{Q^{(r)}}$ είναι η ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$). Από το Λήμμα 7.13 (7) προκύπτει ότι $\mathcal{A}_{\overleftarrow{Q^{(r)}}} = \mathcal{A}_{Q^{(r)}}$. Συνεπώς, η μόνη ακμή συμφόρησης για την κατάσταση $Q^{(r)}$ είναι η $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r)}_{i^{(r)}_l}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i^{(r)}_f$ και $i^{(r)}_l$. Το Λήμμα 7.13 (7) υποδηλώνει ότι $i^{(r)}_f \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}}$ και $i^{(r)}_l \in \mathcal{A}_{Q^{(r)}}$. Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
FS_{Q^{(r)}}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) &= \frac{cap(e^{(r)}_{i^{(r)}_l}) - allot_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l})}{|\mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \mid e^{(r)}_{i^{(r)}_l}|} \\
&= \frac{2b_r + p_r/2}{2} \\
&= b_r + \frac{p_r}{4}.
\end{aligned}
$$

Επιπρόσθετα, από τη συνθήκη (1) συνεπάγεται ότι $r_{Q^{(r)}}(S_{i^{(r)}_f}) = r_{Q^{(r)}}(S_{i^{(r)}_l}) = b_r + p_r/4$, έτσι ώστε $r_{Q^{(r)}}(S_{i^{(r)}_f}) = r_{Q^{(r)}}(S_{i^{(r)}_l}) = FS_{Q^{(r)}}(e^{(r)}_{i^{(r)}_l})$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης ισχύει ότι $i^{(r)}_f \in \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(r)})$, καθώς επίσης $i^{(r)}_l \in \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(r)})$. Επιπλέον, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \setminus \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\}$, η σύνοδος S_i δε χρησιμοποιεί καμιά ακμή συμφόρησης. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης, η S_i δεν απενεργοποιείται στην κατάσταση $Q^{(r)}$. Συνεπώς, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$ ισχύει ότι $i \in \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\}$, αν και μόνο αν $i \in \mathsf{Term}(\langle G(\mathsf{Sched}), \mathcal{S}\rangle, Q^{(r)})$, όπως απαιτείται από την (3).

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (4). Αποδεικνύουμε πρώτα την (4α).

Θεωρούμε αρχικά οποιαδήποτε ακμή $e^{(r)}_i$ για κάποιο δείκτη $i \in \mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i^{(r)}_f, i^{(r)}_l\}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e^{(r)}_i$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i^{(r)}_f$ και i. Από τη συνθήκη (2α) είναι $r_{Q^{(r)}}(S_{i^{(r)}_f}) = b_r + p_r/4$, ενώ από την (2β) έχουμε $r_{Q^{(r)}}(S_i) = b_r + p_r/2$. Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
residual_{Q^{(r)}}(e^{(r)}_i) &= cap(e^{(r)}_i) - r_{Q^{(r)}}(S_{i^{(r)}_f}) - r_{Q^{(r)}}(S_l) \\
&= 2b_r + p_r - (b_r + \frac{p_r}{4}) - (b_r + \frac{p_r}{2})
\end{aligned}
$$

$$= \frac{p_r}{4}.$$

Θεωρούμε στη συνέχεια την ακμή $e_i^{(r')}$, όπου r' είναι οποιοσδήποτε ακέραιος τέτοιος ώστε $1 \leq r' < r$, ενώ $i \in \mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_i^{(r')}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους i και $i_f^{(r')}$. Εξ ορισμού της ελεύθερης χωρητικότητας έχουμε

$$\begin{aligned} & residual_{Q^{(r)}}(e_i^{(r')}) \\ = \; & residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r')}) - (r_{Q^{(r)}}(S_{i_f^{(r')}}) - r_{Q^{(r-1)}}(S_{i_f^{(r')}})) - (r_{Q^{(r)}}(S_i) - r_{Q^{(r-1)}}(S_i)\,. \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση (3) προκύπτει ότι $i_f^{(r')} \notin \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, έτσι ώστε $r_{Q^{(r)}}(S_{i_f^{(r')}}) = r_{Q^{(r-1)}}(S_{i_f^{(r')}})$. Το Λήμμα 7.13 (1) υποδηλώνει ότι $r_{Q^{(r)}}(S_i) = b_r + p_r/2$, ενώ από την επαγωγική υπόθεση (2β), συνεπάγεται ότι $r_{Q^{(r-1)}}(S_i) = b_{r-1} + p - r - 1/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} residual_{Q^{(r)}}(e_i^{(r')}) &= residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r')}) - 0 - \left(b_r + \frac{p_r}{2}\right) + \left(b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2}\right) \\ &= residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r')}) - \left(b_r + \frac{p_r}{2} - b_r\right) \\ &\quad \text{(λόγω του αναδρομικού ορισμού του } b_r) \\ &= residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r')}) - \frac{p_r}{2}\,. \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση (4α) έχουμε

$$residual_{Q^{(r-1)}}(e_i^{(r')}) \;\geq\; \frac{p_{r-1}}{4}\,,$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} residual_{Q^{(r)}}(e_i^{(r')}) &\geq \frac{p_{r-1}}{4} - \frac{p_r}{2} \\ &= p_r - \frac{p_r}{2} \\ &\quad \text{(λόγω του αναδρομικού ορισμού του } p_r) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p_r}{2} \\
&\geq \frac{p_r}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Στο σημείο αυτό η απόδειξη της (4α) έχει ολοκληρωθεί.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (4β).

Θεωρούμε αρχικά μια ακμή $e_i^{(r)}$, τέτοια ώστε $i \in \mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_i^{(r)}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους $i_f^{(r)}$ και i. Λόγω της συνθήκης (3) ισχύει ότι $i_f^{(r)} \notin \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}$, ενώ $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}$. Συνεπώς, η συνθήκη (2α) υποδηλώνει ότι $r_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}(S_{i_f^{(r)}}) = r_{Q^{(r)}}(S_{i_f^{(r)}}) = b_r + p_r/4$, έτσι ώστε $allot_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}(e_i^{(r)}) = b_r + p_r/4$. Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
FS_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}(e_i^{(r)}) &= \frac{cap(e_i^{(r)}) - allot_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}(e_i^{(r)})}{|\mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}} \mid e_i^{(r)}|} \\
&= \frac{2b_r + p_r - (b_r + p_r/4)}{1} \\
&= 2b_r + p_r - b_r - \frac{p_r}{4} \\
&= b_r + \frac{3}{4}\,p_r\,.
\end{aligned}
$$

Θεωρούμε στη συνέχεια την ακμή $e_i^{(r')}$ όπου r' είναι ένας οποιοσδήποτε ακέραιος τέτοιος ώστε $1 \leq r' < r$, ενώ $i \in \mathcal{A}_{Q^{(r-1)}} \setminus \{i_f^{(r)}, i_l^{(r)}\}$. Λόγω του τρόπου κατασκευής του $G(\mathsf{Sched})$, η ακμή $e_i^{(r')}$ χρησιμοποιείται από τις συνόδους i και $i_f^{(r')}$. Από την επαγωγική υπόθεση (3) προκύπτει ότι $i_f^{(r')} \notin \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, έτσι ώστε $i_f^{(r')} \notin \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}$. Από τη συνθήκη (3) έχουμε $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}$. Προφανώς, $i \in \mathcal{A}_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}$, Άρα, $FS_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e_i^{(r')}) = FS_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}(e_i^{(r')})$. Από την επαγωγική υπόθεση (4β) συνεπάγεται ότι $FS_{\overrightarrow{Q^{(r-1)}}}(e_i^{(r')}) \geq b_{r-1} + 3p_{r-1}/4$, έτσι ώστε $FS_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}(e_i^{(r')}) \geq b_{r-1} + 3p_{r-1}/4$. Προφανώς,

$$
\begin{aligned}
b_r + \frac{3}{4}\,p_r &= b_{r-1} + \frac{p_{r-1}}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{p_{r-1}}{4} \\
&\qquad \text{(λόγω των αναδρομικών ορισμών των } b_r \text{ και } p_r\text{)} \\
&= b_{r-1} + \frac{11\,p_{r-1}}{16}
\end{aligned}
$$

$$< \quad b_{r-1} + \frac{3\,p_{r-1}}{4}.$$

Εφόσον $FS_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}(e_i^{(r')}) \geq b_{r-1} + 3p_{r-1}/4$, συνεπάγεται ότι

$$FS_{\overrightarrow{Q^{(r)}}}(e_i^{(r')}) \quad > \quad b_r + \frac{3p_r}{4}.$$

Στο σημείο αυτό η απόδειξη του (4β) και άρα και του Λήμματος 7.1 έχει ολοκληρωθεί. ■

Για κάθε ζεύγος δεικτών j και r τέτοιους ώστε $1 \leq j \leq n/d$ και $1 \leq r \leq d/2$, συμβολίζουμε με $\mathcal{U}^{(r)}_{\mathsf{Alg}}(G_j, \mathcal{S}_j)$ τον αριθμό των πράξεων ενημέρωσης που εκτελούνται στις συνόδους του συμπλέγματος $\mathcal{S}_j$ κατά τη διάρκεια της φάσης r. Προφανώς,

$$\mathcal{U}^{(r)}_{\mathsf{Alg}}(G^{(r)}_j, \mathcal{S}_j) \;=\; d - 2(r-1)\,.$$

Συνεπώς,

$$\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}(G_j, \mathcal{S}_j) \;=\; \sum_{r=1}^{d/2} \mathcal{U}^{(r)}_{\mathsf{Alg}}(G^{(r)}_j, \mathcal{S}_j)\,,$$

και

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}(G, \mathcal{S}) &= \sum_{j=1}^{n/d} \mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}(G_j, \mathcal{S}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n/d} \sum_{r=1}^{d/2} \mathcal{U}^{(r)}_{\mathsf{Alg}}(G^{(r)}_j, \mathcal{S}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n/d} \sum_{r=1}^{d/2} (d - 2(r-1)) \\
&= \frac{n}{d} \sum_{r=1}^{d/2} (d + 2 - 2r) \\
&= \frac{n}{d}\left((d+2)\,\frac{d}{2} - 2\sum_{r=1}^{d/2} r\right) \\
&= \frac{n}{d}\left((d+2)\,\frac{d}{2} - \frac{d}{2}(\frac{d}{2} + 1)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n}{d}\left(\frac{d^2}{4} + \frac{d}{2}\right) \\
&= \frac{nd}{4} + \frac{n}{2},
\end{aligned}
$$

όπως απαιτείται από το Θεώρημα 7.1. ■

Περιγράφουμε στη συνέχεια την τεχνική που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1 για την κατασκευή, δοθέντος ενός δρομολογητή χωρίς γνώση Sched, ενός δικτύου που είναι "κακό" για τον Sched. Χρησιμοποιούμε το δίκτυο του Παραδείγματος 7.1.2 και παρουσιάζουμε τα βήματα του αλγορίθμου Elev πάνω στο δίκτυο αυτό στο Σχήμα 7-2. Τα τονισμένα στοιχεία του πίνακα αντιστοιχούν σε αυξημένους ρυθμούς μετάδοσης, ενώ τα υπογραμμισμένα στοιχεία του πίνακα αντιστοιχούν σε μειωμένους ρυθμούς μετάδοσης.

Προφανώς, ο αριθμός των πράξεων ενημέρωσης που πραγματοποιούνται είναι $12+8+4 = 24$, όπως αναμενόταν.

7.3 Ντετερμινιστικοί Αλγόριθμοι με Μερική Γνώση

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζουμε ένα κάτω όριο ίσο με $\Omega(dn)$ στην πολυπλοκότητα σύγκλισης κάθε ντετερμινιστικού, οπτιμιστικού αλγορίθμου συμφόρησης με μερική γνώση που υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου.

Θεώρημα 7.2 *Έστω ότι ο* Alg *είναι ένας ντετερμινιστικός, οπτιμιστικός αλγόριθμος συμφόρησης με μερική γνώση που υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου. Τότε,*

$$
\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}} \ \geq \ \frac{dn}{4} + \frac{n}{2}.
$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη του Θεωρήματος 7.1. Η βασική διαφορά των δύο αποδείξεων είναι ότι η "πλήρης" ακολουθία των συνόδων που δρομολογούνται από *κάθε* δρομολογητή με μερική γνώση δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή, όπως ισχύει για τους δρομολογητές χωρίς γνώση. Άρα, τόσο η ακολουθία συνόδων που δημιουργείται από τον δρομολογητή, όσο και το δίκτυο, πάνω στο οποίο απαιτούνται $\Omega(dn)$ πράξεις ενημέρωσης προκειμένου να επιτευχθεί

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
512	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
512	**512**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
512	512	**512**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
512	512	512	**512**	0	0	0	0	0	0	0	0
512	512	512	512	**512**	0	0	0	0	0	0	0
256	512	512	512	512	256	0	0	0	0	0	0
256	512	512	512	512	256	**512**	0	0	0	0	0
256	512	512	512	512	256	512	**512**	0	0	0	0
256	512	512	512	512	256	512	512	**512**	0	0	0
256	512	512	512	512	256	512	512	512	**512**	0	0
256	512	512	512	512	256	512	512	512	512	**512**	0
256	512	512	512	512	256	256	512	512	512	512	**256**
256	512	512	512	512	256	256	512	512	512	**640**	256
256	512	512	512	512	256	256	512	512	**640**	640	256
256	512	512	512	512	256	256	512	**640**	640	640	256
256	512	512	512	512	256	256	**576**	640	640	576	256
256	512	512	512	**640**	256	256	576	640	640	576	256
256	512	512	**640**	640	256	256	576	640	640	576	256
256	512	**640**	640	640	256	256	576	640	640	576	256
256	**576**	640	640	576	256	256	576	640	640	576	256
256	576	**672**	640	576	256	256	576	640	640	576	256
256	576	656	**656**	576	256	256	576	640	640	576	256
256	576	656	656	576	256	256	576	**672**	640	576	256
256	576	656	656	576	256	256	576	656	**656**	576	256

Σχήμα 7-2: Βήματα εκτέλεσης του αλγορίθμου Elev στο δίκτυο G(Elev)

δικαιοσύνη μεγίστου-ελαχίστου, πρέπει να δημιουργούνται σταδιακά με βηματικό τρόπο. Σαν παράδειγμα, παρουσιάζουμε την κατασκευή της ακολουθίας δεικτών συνόδων $i_1, i_2, \ldots, i_d$ για την πρώτη φάση. Αυτή η ακολουθία ορίζεται επαγωγικά ως εξής. Για τη βάση της επαγωγής, όπου $l = 1$, θέτουμε $i_1 = \mathsf{Sched}_1(\mathbf{0})$. Δηλαδή, η S_{i_1} είναι η πρώτη σύνοδος που δρομολογείται από τον Sched. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι έχουμε ορίσει όλους τους δείκτες $i_1, i_2, \ldots, i_{l-1}$. Έστω ότι $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{l-1}$ είναι η ακολουθία των καταστάσεων που ακολουθούν μετά από τη δρομολόγηση κάθε ενός από αυτές τις συνόδους. Για το δείκτη i_l ισχύει ότι $i_l = \mathsf{Sched}_l(Q_{l-1})$ και ο i_l είναι διαφορετικός από κάθε έναν από τους $i_1, i_2, \ldots, i_{l-1}$ (εφαρμόζουμε τον Sched μέχρι κάποιος διαφορετικός δείκτης από όσους έχουμε ήδη αποκομίσει να επιστραφεί). Συμβολίζουμε με $i_1, i_2, \ldots, i_d = \mathsf{Sched} \upharpoonright \mathcal{S}_j$. Το υπόλοιπο μέρος της απόδειξης είναι ίδιο με την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.

Κεφάλαιο 8

Ανω Ορια

Στις Ενότητες 8.1, 8.2 και 8.3 παρουσιάζουμε άνω όρια στην πολυπλοκότητα σύγκλισης για αλγορίθμους με ή χωρίς γνώση αντίστοιχα, που μπορεί να είναι είτε ντετερμινιστικοί ή πιθανοτικοί.

8.1 Ντετερμινιστικοί Αλγόριθμοι Χωρίς Γνώση

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο RoundRobin και αποδεικνύουμε ότι:

Θεώρημα 8.1 *Ο αλγόριθμος* RoundRobin *υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου σε* $O(dn/2 + n/2)$ *πράξεις ενημέρωσης.*

Ο δρομολογητής του RoundRobin διεξάγει d φάσεις δρομολόγησης. Σε κάθε φάση, κάθε μια από τις n συνόδους δρομολογείται ακριβώς μια φορά εκ περιτροπής. Ο αλγόριθμος πήρε το όνομά του από τον τρόπο λειτουργίας του δρομολογητή του, ο οποίος δρομολογεί τις συνόδους ακολουθώντας το γνωστό κακόνα δρομολόγησης εκ περιτροπής (round-robin), τον οποίο συναντάμε συχνά στο πρόβλημα δρομολόγησης διεργασιών σε έναν υπολογιστή (δείτε, π.χ., [69, Ενότητα 2.4.1]). Επιπλέον, ο RoundRobin είναι αλγόριθμος συμφόρησης. Τυπικά, ορίζουμε τον αλγόριθμο RoundRobin ως εξής: RoundRobin $= \langle$RRSched, update, RRTerm$\rangle$, όπου για κάθε l, $0 \leq l \leq dn - 1$, ισχύει ότι RRSched$(l+1) = l \bmod n + 1$.

Από τον ορισμό του RRSched, κάθε σύνοδος δρομολογείται μια φορά σε κάθε φάση. Συνεπώς, το Θεώρημα 6.2 υποδηλώνει ότι τουλάχιστον μια σύνοδος σε κάθε σύμπλεγμα απενεργοποιείται κατά τη διάρκεια κάθε μιας από τις d φάσεις. Εφόσον κάθε σύμπλεγμα περιέχει το πολύ d συνόδους, προκύπτει ότι όλοι οι σύνοδοι έχουν απενεργοποιηθεί στο τέλος των d φάσεων, οπότε και το δίκτυο επέρχεται σε τελική κατάσταση. Συνεπώς, η Πρόταση 4.5 συνεπάγεται επομένως ότι ο RoundRobin υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου.

Παρέχουμε στη συνέχεια ένα άνω όριο για την πολυπλοκότητα σύγκλισης του RoundRobin. Εφόσον τουλάχιστον μια σύνοδος ανά σύμπλεγμα απενεργοποιείται σε κάθε φάση, προκύπτει ότι για κάθε σύμπλεγμα $\mathcal{S}_j$, $|\mathcal{S}_j| - l + 1$ πράξεις ενημέρωσης πραγματοποιούνται στην l-οστή φάση, όπου $1 \leq l \leq |\mathcal{S}_j|$, πάνω στις συνόδους του συμπλέγματος $\mathcal{S}_j$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathsf{RoundRobin}} &= \sum_{j\geq 1} \mathcal{U}_{\mathsf{RoundRobin}}(\mathcal{S}_j) \\
&\leq \sum_{j\geq 1} \sum_{1\leq l\leq |\mathcal{S}_j|} (|\mathcal{S}_j| - l + 1) \\
&= \sum_{j\geq 1} \sum_{1\leq l\leq |\mathcal{S}_j|} l \\
&= \sum_{j\geq 1} \frac{|\mathcal{S}_j| \left(|\mathcal{S}_j + 1\right)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j\geq 1} |\mathcal{S}_j|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j\geq 1} |\mathcal{S}_j| \\
&\leq \frac{\max_{j\geq 1} |\mathcal{S}_j|\, n}{2} + \frac{n}{2} \qquad \text{(λόγω του Λήμματος 2.1)} \\
&= \frac{dn}{2} + \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

8.2 Πιθανοτικοί Αλγόριθμοι Χωρίς Γνώση

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο Random και αποδεικνύουμε ότι:

Θεώρημα 8.2 *Ο* Random *υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου και η αναμενόμενη πολυπλοκότητα σύγκλισής του είναι* $O(d \ln n / p_{min})$ *πράξεις ενημέρωσης.*

Έστω ότι $p_1, p_2, \ldots, p_n$ είναι μη μηδενικές πιθανότητες, όπου $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Συμβολίζουμε με $p_{min} = \min_{1 \le i \le n} p_i$. Παρατηρούμε ότι $0 < p_{min} \le 1/n$. Ο δρομολογητής του Random είναι πιθανοτικός και λειτουργεί χωρίς γνώση. Πιο αναλυτικά, ο Random δρομολογεί την σύνοδο S_i με πιθανότητα p_i, $1 \le i \le n$. Σαφώς, η μετατροπή του άτυπου αυτού ορισμού σε συνάρτηση (από τους ακέραιους στις κατανομές πιθανοτήτων) μπορεί να γίνει με άμεσο τρόπο. Επιπρόσθετα, ο Random είναι αλγόριθμος συμφόρησης.

Έστω μια οποιαδήποτε εκτέλεση α του Random. Θεωρούμε μια ακολουθία από δείκτες $l_0, l_1, \ldots, l_d$, η οποία ορίζεται επαγωγικά ως εξής. Για την επαγωγική βάση θέτουμε $l_0 = 0$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι έχει οριστεί ο δείκτης l_{r-1} για κάποιο ακέραιο $r \ge 1$. Για το επαγωγικό βήμα, ορίζουμε τον $l_r = \widehat{l}_{r-1}$. Δηλαδή, ο l_r είναι ο δείκτης της πρώτης κατάστασης που έπεται της $Q_{l_{r-1}}$ μέχρι την οποία όλες οι ενεργές σύνοδοι στην $Q_{l_{r-1}}$ έχουν δρομολογηθεί τουλάχιστον μια φορά. Αν δεν υπάρχει τέτοιος δείκτης, ο l_r ισούται με άπειρο.

Εξ ορισμού του l_r και λόγω του Θεωρήματος 6.2, για κάθε ενεργό σύμπλεγμα $\mathcal{S}_j$ στην $Q_{l_{r-1}}$, υπάρχει κάποια σύνοδος $S \in \mathcal{S}_j \cap \mathcal{A}_{Q_{l_{r-1}}}$ τέτοια ώστε $S \in \mathcal{D}_{Q_{l_r}}$. Εφόσον $|\mathcal{S}_j| \le d$, προκύπτει ότι όλες οι n σύνοδοι έχουν απενεργοποιηθεί στην κατάσταση Q_{l_d}, οπότε και ο αλγόριθμος εισέρχεται σε τελική κατάσταση. Επομένως, η Πρόταση 4.5 υποδηλώνει άμεσα ότι ο Random υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου σε κάθε εκτέλεσή του, για την οποία όλοι οι δείκτες $l_1, l_2, \ldots, l_d$ είναι πεπερασμένοι.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια ένα άνω όριο στη μέση πολυπλοκότητα σύγκλισης του Random.

Πρόταση 8.1 $\mathcal{E}(\mathcal{U}_{\mathsf{Random}}) \le d(\ln n + \gamma)/p_{min}$

Απόδειξη: Για κάθε ακέραιο r, $1 \le r \le d$, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $\mathcal{U}^{(r)}_{\mathsf{Alg}}$ να είναι ο αριθμός των πράξεων ενημέρωσης που εκτελούνται στο κλάσμα εκτέλεσης

$$\alpha^{(l_r)} \quad = \quad i_{l_{r-1}+1}, Q_{l_{r-1}+1}, \ldots, i_{l_r}, Q_{l_r}.$$

Εφόσον όλες οι n σύνοδοι είναι απενεργοποιημένες στην κατάσταση Q_{l_d}, προκύπτει ότι $\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}} = \sum_{r=1}^{d} \mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}^{(r)}$, έτσι ώστε, από την ιδιότητα γραμμικότητας της μέσης τιμής,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}) &= \mathcal{E}(\sum_{r=1}^{d} \mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}^{(r)}) \\ &= \sum_{r=1}^{d} \mathcal{E}(\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}^{(r)}) .\end{aligned}$$

Προφανώς, $\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}^{(r)} \leq l_r - l_{r-1}$, έτσι ώστε $\mathcal{E}(\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}^{(r)}) \leq \mathcal{E}(l_r - l_{r-1})$.

Παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της ακολουθίας $l_0, l_1, \ldots, l_d$, ισχύει ότι η ποσότητα $l_r - l_{r-1}$ εκφράζει τον μικρότερο αριθμό καταστάσεων που ακολουθούν την $Q_{l_{r-1}}$ και εκτείνονται μέχρι την κατάσταση εκείνη στην οποία όλες οι ενεργές σύνοδοι στην $Q_{l_{r-1}}$ έχουν ενημερωθεί τουλάχιστον μία φορά. Αυτός ο αριθμός δεν είναι μεγαλύτερος από τον ελάχιστο αριθμό καταστάσεων που ακολουθούν την $Q_{l_{r-1}}$ και εκτείνονται μέχρι την κατάσταση εκείνη στην οποία όλες οι n σύνοδοι έχουν δρομολογηθεί τουλάχιστον μια φορά. Συνεπώς, λόγω της Πρότασης 2.11 έχουμε ότι $\mathcal{E}(\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}^{(r)}) \leq (\ln n + \gamma)/p_{min}$. Επομένως, $\mathcal{E}(\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}) \leq \sum_{r=1}^{d} (\ln n + \gamma)/p_{min} = d(\ln n + \gamma)/p_{min}$, όπως απαιτείται. ■

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια μια άμεση συνέπεια της Πρότασης 8.1.

Πόρισμα 8.1 *Έστω ότι $p_{min} \geq 1/n^k$ για κάποια σταθερά $k \geq 1$. Τότε, $\mathcal{E}(\mathcal{U}_{\mathsf{Random}}) \leq dn^k(\ln n + \gamma)$.*

Προφανώς, το άνω όριο στην $\mathcal{E}(\mathcal{U}_{\mathsf{Random}})$ που παρέχει το Πόρισμα 8.1 αποκτά την ελάχιστη τιμή του στην τιμή $k = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, για κάθε $i \in [n]$, ισχύει ότι $p_i \geq p_{min} \geq 1/n$. Εφόσον ωστόσο, είναι $p_{min} \leq 1/n$, προκύπτει ότι αυτή η περίπτωση, είναι η *ομοιόμορφη*, όπου $p_i = 1/n$, για κάθε $i \in [n]$. Συνεπώς, έχουμε:

Πόρισμα 8.2 *Στην ομοιόμορφη περίπτωση, $\mathcal{E}(\mathcal{U}_{\mathsf{Random}}) \leq dn(\ln n + \gamma)$.*

8.3 Αλγόριθμοι με Πλήρη Γνώση

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο Linear και αποδεικνύουμε ότι:

Θεώρημα 8.3 *Ο* Linear *υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου εκτελώντας ακριβώς n πράξεις ενημέρωσης.*

Μιλώντας άτυπα, ο δρομολογητής του Linear δουλεύει πάνω σε μια ενεργή ακμή με ελάχιστο ισομερίδιο και δρομολογεί μία-μία όλες τις συνόδους που την χρησιμοποιούν με αυθαίρετη σειρά. Αφότου τελειώσει με τις συνόδους αυτές διαλέγει κάποια άλλη ενεργή ακμή ελάχιστου ισομεριδίου, κ.ο.κ. Η μετατροπή του άτυπου αυτού ορισμού σε συνάρτηση μπορεί να γίνει με άμεσο τρόπο. Επιπρόσθετα, ο Linear είναι αλγόριθμος συμφόρησης.

Θεωρούμε οποιαδήποτε κατάσταση Q_{l_0} τέτοιοα ώστε $e \in MFSE_{Q_{l_0}}$. Προφανώς, $e \in MFSE_{Q_{l_0}}(\mathcal{S}_j)$, για κάποιο σύμπλεγμα $\mathcal{S}_j$. Από τον ορισμό του δρομολογητή του Linear, κάθε σύνοδος που χρησιμοποιεί την ακμή e δρομολογείται ακριβώς μια φορά, το οποίο σημαίνει ότι η κατάσταση $Q_{\widehat{l_0}|e}$ προσεγγίζεται. Από το Θεώρημα 6.1, κάθε τέτοια σύνοδος έχει απενεργοποιηθεί ως την κατάσταση $Q_{\widehat{l_0}|e}$. Από τον τρόπο λειτουργίας του δρομολογητή του Linear, προκύπτει ότι όλες οι σύνοδοι τελικά απενεργοποιούνται, οπότε ο αλγόριθμος εισέρχεται σε τελική κατάσταση. Συνεπώς, η Πρόταση 4.5 υποδηλώνει άμεσα ότι ο Linear υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου.

Είναι σαφές ότι ο συνολικός αριθμός πράξεων ενημέρωσης που πραγματοποιούνται από τον Linear είναι ακριβώς n σε κάθε εκτέλεση και είναι βέλτιστος.

Παρατηρούμε ότι οι αλγόριθμοι RoundRobin, Random, και Linear βασίζουν την ορθότητά τους στον συνδιασμό των ιδιοτήτων τερματισμού των οπτιμιστικών αλγορίθμων συμφόρησης (Θεωρήματα 6.2 και 6.1, αντίστοιχα) και της Πρότασης 4.5, η οποία εγγυάται ότι, αν ένας αλγόριθμος συμφόρησης τερματίζει, το διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης εξόδου του είναι το δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου.

Κεφάλαιο 9

Κατανεμημένη Υλοποίηση

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε ένα κατανεμημένο και ασύγχρονο σχήμα υλοποίησης για κάθε οπτιμιστικό αλγόριθμο ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης που λειτουργεί χωρίς γνώση. Ο στόχος του σχήματος αυτού είναι η υλοποίηση της πράξης ενημέρωσης και η προσομοίωση του δρομολογητή κάθε τέτοιου αλγορίθμου με κατανεμημένο και ασύγχρονο τρόπο. Περιγράφουμε στη συνέχεια το προτεινόμενο σχήμα.

Κάθε σύνοδος χρησιμοποιεί ένα *μήνυμα ελέγχου* το οποίο κυκλοφορεί κατά μήκος του μονοπατιού που χρησιμοποιεί η σύνοδος. Το μήνυμα ελέγχου μεταφέρει χρήσιμες πληροφορίες κατά μήκος των συνδέσμων που χρησιμοποιεί η σύνοδος για την ίδια τη σύνοδο και για γειτονικές συνόδους. Κάθε σύνοδος χρησιμοποιεί για τη μετάδοση των δεδομένων της, ένα ρυθμό μετάδοσης, που ονομάζεται *τρέχων ρυθμός μετάδοσης*. Το μήνυμα ελέγχου περιέχει τον τρέχοντα ρυθμό μετάδοσης της συνόδου στην οποία ανήκει, έτσι ώστε κάθε σύνδεσμος που χρησιμοποιείται από τη σύνοδο γνωρίζει αυτόν το ρυθμό μετάδοσης. Κάθε σύνδεσμος διατηρεί μια λίστα από τις συνόδους που τον χρησιμοποιούν, ενώ ταυτόχρονα καταγράφει τους ρυθμούς μετάδοσής τους. Αυτοί οι *κατεγραμμένοι ρυθμοί μετάδοσης* χρησιμοποιούνται από το σύνδεσμο για να κάνει όλους τους υπολογισμούς του. Αρχικά, η σύνοδος θέτει τον τρέχοντα ρυθμό μετάδοσής της στην τιμή 0. Καθώς το μήνυμα ελέγχου ταξιδεύει στο δίκτυο, η νέα τιμή του ρυθμού μετάδοσης που επιβάλλεται από κάθε ακμή υπολογίζεται και καταχωρείται στο μήνυμα ελέγχου, ως ο νέος τρέχων ρυθμός μετάδοσης της συνόδου. Όταν το μήνυμα ελέγχου επιστρέφει, η σύνοδος προσαρμόζει το ρυθμό μετάδοσής της με βάση τον αναγραφόμενο ρυθμό μετάδοσης στο μήνυμα ελέγχου.

Εφόσον εξετάζουμε μόνο αλγορίθμους χωρίς γνώση, υπάρχει μια προκαθορισμένη ακολουθία από δείκτες συνόδων, με βάση την οποία ο αλγόριθμος επιλέγει τη συνόδο της οποίας το ρυθμό μετάδοσης θα αυξήσει στη συνέχεια. Ο δρομολογητής εκτελείται τοπικά σε κάθε ακμή έτσι ώστε κάθε ακμή είναι ενήμερη για την επόμενη προς ενημέρωση σύνοδο. Η ακμή υπολογίζει την ανασχηματιστική αύξηση για αυτήν τη σύνοδο. Όταν η πράξη ενημέρωσης πραγματοποιείται, η ακμή επιλέγει την επόμενη σύνοδο προς ενημέρωση με βάση την ακολουθία Scheduler $\mid e$.

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω τεχνική οδηγεί στην εκτέλεση παράλληλων πράξεων ενημέρωσης, αντί για τις κλασικές πράξεις ενημέρωσης, εφόσον οι ακμές δεν επιβάλλουν περιορισμούς στις συνόδους που δεν τις χρησιμοποιούν, έτσι ώστε σύνοδοι που δεν είναι γειτονικές μπορούν να ενημερώνονται παράλληλα. Αυτή η παραλληλία μπορεί φυσικά να οδηγήσει σε προβλήματα συγχρονισμού. Καταρχήν, μια πράξη ενημέρωσης σε κάποια σύνοδο S_i πραγματοποιείται μόνο αν δεν εκτελείται κάποια πράξη ενημέρωσης σε οποιαδήποτε γειτονική σύνοδο. Αυτό σημαίνει ότι και η αύξηση του ρυθμού μετάδοσης της S_i και οι μειώσεις των ρυθμών μετάδοσης γειτονικών της S_i συνόδων θα πρέπει να εφαρμοστούν πριν από την εκκίνηση μιας νέας πράξης ενημέρωσης σε οποιαδήποτε γειτονική σύνοδο. Επιπλέον, στην περίπτωση που ο ρυθμός μετάδοσης κάποιας συνόδου πρέπει να μειωθεί, λόγω των αυξήσεων των ρυθμών μετάδοσης περισσότερων της μιας γειτονικών συνόδων, μπορεί να προκύψουν προβλήματα συγχρονισμού, τα οποία πρέπει να επιλυθούν από το σχήμα υλοποίησης. Περιγράφουμε στη συνέχεια πως το προτεινόμενο σχήμα επιλύει τα παραπάνω προβλήματα.

Το μήνυμα ελέγχου κάθε συνόδου διατηρεί ένα δυαδικό ψηφίο, το οποίο ονομάζεται u-`bit`. Το u-`bit` έχει αρχικά τιμή 1, και υποδηλώνει αν η σύνοδος, στην οποία το μήνυμα ελέγχου ανήκει, είναι η επόμενη προς δρομολόγηση. Η σύνοδος θέτει το u-`bit` στην τιμή 1 πριν από κάθε μετάδοση του μηνύματος ελέγχου. Κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του μηνύματος ελέγχου από την πηγή προς τον προορισμό, κάθε σύνδεσμος ελέγχει αν το μήνυμα ανήκει στην προς ενημέρωση πάνω στην ακμή σύνοδο. Αν αυτό δε συμβαίνει, ο σύνδεσμος θέτει το u-`bit` στην τιμή μηδέν, διαφορετικά αφήνει το u-`bit` αναλλοίωτο και εισέρχεται σε κατάσταση *ασυνέπειας*.

Αρχικά όλοι οι σύνδεσμοι βρίσκονται σε συνεπή κατάσταση. Αν το μήνυμα ελέγχου προσεγγίσει τον κόμβο προορισμού της συνόδου με το u-bit του να είναι ίσο με ένα, υποδηλώνεται ότι όλες οι ακμές που χρησιμοποιεί η σύνοδος, στην οποία ανήκει το μήνυμα ελέγχου, αναγνωρίζουν τη σύνοδο ως την τρέχουσα σύνοδο προς ενημέρωση. Κατά τη διάρκεια του ταξιδιού προορισμός-πηγή του μηνύματος ελέγχου και εφόσον το u-bit είναι ίσο με ένα, κάθε ακμή ελέγχει αν η αναγραφόμενη στο μήνυμα ελέγχου τιμή του ρυθμού μετάδοσης είναι μεγαλύτερη από την ανασχηματιστική αύξηση που έχει υπολογιστεί για τη σύνοδο από την ακμή και σε αυτήν την περίπτωση "ενημερώνει" το μήνυμα ελέγχου για τον ανασχηματιστικό ρυθμό μετάδοσης. Με τον τρόπο αυτό, η σύνοδος ενημερώνεται για κάθε αλλαγή του ρυθμού μετάδοσής της. Όταν η πηγή μιας συνόδου προς ενημέρωση λάβει το μήνυμα ελέγχου με τον ανασχηματιστικό ρυθμό μετάδοσης, δεν αλλάζει απευθείας τον τρέχοντα ρυθμό μετάδοσής της στη νέα τιμή, αλλά επαναμεταδίδει το μήνυμα ελέγχου, έτσι ώστε όλοι οι σύνδεσμοι να ενημερωθούν για την αύξηση και να υπολογίσουν τις μειώσεις που πρέπει να επιβληθούν σε γειτονικές συνόδους. Ένας σύνδεσμος μεταβάλλει την κατάστασή του από ασυνεπή σε συνεπή, αφότου το μηνύμα ελέγχου κάθε συνόδου, της οποίας ο ρυθμός μετάδοσης πρέπει να μειωθεί, περάσει από την ακμή τουλάχιστον δύο φορές με την ίδια φορά, έτσι ώστε να είναι εγγυημένο ότι η σύνοδος έχει ενημερωθεί για τη μείωση. Η παραπάνω διαδικασία επιλύει το πρώτο πρόβλημα συγχρονισμού που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Το δεύτερο πρόβλημα εμφανίζεται όταν ο ρυθμός μετάδοσης κάποιας συνόδου S_j πρέπει να μειωθεί την ίδια χρονική στιγμή που ο ρυθμός μετάδοσης κάποιας γειτονικής της συνόδου αυξάνεται. Είναι σημαντικό να εγγυηθούμε ότι είτε η μείωση συμβαίνει πριν την αύξηση, ή το αντίστροφο. Δηλαδή, δεν είναι επιθυμητό μερικοί σύνδεσμοι να είναι ενημερωμένοι για τη μείωση του ρυθμού μετάδοσης της συνόδου και άλλοι όχι. Στο προτεινόμενο σχήμα, όταν ένας σύνδεσμος ενημερώνεται για τη μείωση του ρυθμού μετάδοσης κάποιας συνόδου που τον χρησιμοποιεί, εξετάζει την κατάστασή του και συμπεριφέρεται ως εξής. Αν η κατάσταση του είναι ασυνεπής καταγράφει τη νέα μειωμένη τιμή της συνόδου, αλλά κάνει όλους τους υπολογισμούς με την παλιά τιμή του ρυθμού μετάδοσης. Η νέα τιμή χρησιμοποιείται όταν η ακμή εισέρχεται ξανά σε συνεπή κατάσταση. Αν αντίθετα, η κατάσταση της ακμής είναι συνεπής, η ακμή μεταβάλλει την κατάστασή της σε ασυνεπή μέχρι όλες οι ακμές που χρησιμοποιούνται από τη σύνοδο, της οποίας ο ρυθμός μετάδοσης πρέπει να μειωθεί, να ενημερωθούν για τη μείωση. Κάθε σύνδεσμος που βρίσκεται σε ασυνεπή κατάσταση, θέτει το u-bit όλων των μηνυμάτων που περνούν από αυτόν στην τιμή μηδέν.

Ο μηχανισμός που χρησιμοποιείται για την απενεργοποίηση συνόδων είναι εντελώς απλός. Κάθε ακμή διατηρεί για κάθε σύνοδο που τη χρησιμοποιεί την ανασχηματιστική αύξηση της προς ενημέρωση συνόδου, καθώς και τις ανασχηματιστικές μειώσεις των υπολοίπων συνόδων. Αν ούτε οι κατεγραμμένοι ρυθμοί μετάδοσης, ούτε ο αριθμός των συνόδων που χρησιμοποιούν την ακμή μεταβάλλεται, ούτε και η ανασχηματιστική αύξηση της προς ενημέρωση συνόδου ή η ανασχηματιστική μείωση των υπολοίπων συνόδων μεταβάλλονται και συνεπώς η ακμή σταματά να κάνει υπολογισμούς.

Το σχήμα που περιγράφεται πιο πάνω είναι απλά ένας μηχανισμός υλοποίησης της παράλληλης πράξης ενημέρωσης, και άρα ένας πιο κομψός τρόπος υλοποίησης της κλασικής πράξης ενημέρωσης, αφού η πρώτη είναι σειριοποιήσιμη. Επομένως, το προτεινόμενο σχήμα αποκαλύπτει νέα όρια στην πολυπλοκότητα σύγκλισης των γνωστών οπτιμιστικών αλγορίθμων ελέγχου ροής, τα οποία βασίζονται σε πιο "αναλυτικές" και σημαντικές παραμέτρους έναντι του αριθμού των πράξεων ενημέρωσης. Έστω ότι τ είναι η μέγιστη δυνατή καθυστέρηση για ένα ταξίδι του μηνύματος ελέγχου μιας συνόδου από την πηγή στον προορισμό της συνόδου και πάλι πίσω στην πηγή, και έστω ότι m είναι ο μέγιστος αριθμός συνόδων που χρησιμοποιούν μια ακμή. Τότε, η επιβάρυνση που προκαλείται από το προτεινόμενο σχήμα στην πολυπλοκότητα σύγκλισης κάθε οπτιμιστικού αλγορίθμου ελέγχου ροής χωρίς γνώση είναι $O(\tau + m \log m)$ πολλαπλασιαστικό. Πιο συγκεκριμένα, αν ο Alg είναι οπτιμιστικός αλγόριθμος ελέγχου ροής χωρίς γνώση που συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μέσα σε $O(f(\cdot))$ πράξεις ενημέρωσης, όπου $f(\cdot)$ είναι συνάρτηση που προδιαγράφει την πολυπλοκότητα σύγκλισης του Alg σε πράξεις ενημέρωσης, η "καθολική" πολυπλοκότητα του Alg, όταν αυτός υλοποιείται από το προτεινόμενο σχήμα, είναι $O(f(\cdot)\,(\tau + m \log m))$. Αυτό ισχύει διότι οι ανασχηματιστικές αυξήσεις και μειώσεις των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων μπορούν να υπολογιστούν παράλληλα για κάθε ακμή και επίσης ταυτόχρονα με τη μετάδοση στο δίκτυο του μηνύματος ελέγχου κάθε συνόδου, ενώ μετά από έναν σταθερό αριθμό συνολικών ανακυκλώσεων του μηνύματος ελέγχου πάνω στο μονοπάτι της συνόδου, κάθε πράξη ενημέρωσης ολοκληρώνεται.

Πιο συγκεκριμμένα, η πολυπλοκότητα σύγκλισης των βέλτιστων οπτιμιστικών αλγορίθμων ελέγχου ροής χωρίς γνώση είναι $\Theta(dn)$, έτσι ώστε η "καθολική" πολυπλοκότητά τους, όταν υλοποιούνται από το προτεινόμενο σχήμα, είναι $O(dn\,(\tau + m \log m))$. Τονίζουμε ότι στο παραπάνω όριο δεν λαμβάνουμε υπ' όψιν το κέρδος που επιφέρει η εκτέλεση παράλληλων πράξεων ενημέρωσης έναντι σειριακών. Επιπρόσθετα, οι ενημερώσεις των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων που ανήκουν σε διαφορετικά συμπλέγματα δεν αλληλεπιδρούν και συνεπώς μπορούν να πραγματοποιούνται παράλληλα, μειώνοντας έτσι το όριο $O(dn\,(\tau + m \log m))$ σε $O(d^2\,(\tau + m \log m))$.

Εξετάζουμε στη συνέχεια την περίπτωση που νέες σύνοδοι επιτρέπεται να εκκινούνται ή να αποχωρούν από το δίκτυο. Δηλαδή, επιτρέπουμε στο σύνολο των συνόδων να εισέρχεται σε περιόδους αστάθειας, όπου κάποιοι σύνοδοι εισέρχονται και κάποιοι εξέρχονται του δικτύου. Ωστόσο, υποθέτουμε ότι μετά από κάθε τέτοια περίοδο, το σύνολο των συνόδων του δικτύου σταθεροποιείται για μια εκτεταμένη περίοδο χρόνου, αφού διαφορετικά οι έννοιες της δικαιοσύνης και του υπολογισμού ενός δίκαιου διανύσματος ρυθμών μετάδοσης χάνουν τη σημασία τους.

Σε ένα κατανεμημένο, ασύγχρονο περιβάλλον, μια ακμή ενημερώνεται για την εκκίνηση μιας νέας συνόδου, όταν το μήνυμα ελέγχου (ή το πρώτο πακέτο δεδομένων) της συνόδου αυτής περάσει από την ακμή για πρώτη φορά. Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν, όλοι οι σύνδεσμοι που χρησιμοποιεί μια νέα σύνοδος να ενημερωθούν ταυτόχρονα για την εκκίνησή της στο δίκτυο. Ωστόσο, κάθε ακμή θα πρέπει με κάποιο τρόπο να ενημερώσει τον τοπικό δρομολογητή για την ύπαρξη της νέας συνόδου, χωρίς να γνωρίζει αν οι υπόλοιπες ακμές έχουν ήδη ενημερωθεί για την ύπαρξη αυτής της συνόδου. Στο προτεινόμενο σχήμα, όταν ένας σύνδεσμος ενημερώνεται για την εκκίνηση μιας νέας συνόδου κάνει τα εξής. Αν είναι σε συνεπή κατάσταση ενημερώνει αμέσως τον τοπικό δρομολογητή για την ύπαρξη της νέας συνόδου και αποφασίζει εκ νέου ποια είναι η προς ενημέρωση σύνοδος. Στην αντίθετη περίπτωση, η ακμή ενημερώνει το δρομολογητή αμέσως όταν επανέλθει σε συνεπή κατάσταση. Η παραπάνω διαδικασία οδηγεί στη σωστή ενημέρωση όλων των τοπικών δρομολογητών για την εισαγωγή νέων συνόδων στο δίκτυο και επιλύει αποτελεσματικά τα προβλήματα που προκύπτουν λόγω της ασύγχρονης λειτουργίας του δικτύου.

Η περίπτωση που κάποια σύνοδος εξέρχεται του δικτύου είναι λιγότερο πολύπλοκη[1]. Το μοναδικό πολύπλοκο σενάριο προκύπτει όταν πραγματοποιείται μια πράξη ενημέρωσης πάνω στη σύνοδο ακριβώς τη στιγμή που αυτή ζητάει να εξέλθει του δικτύου. Σε αυτήν την περίπτωση, η πράξη ενημέρωσης πρέπει να πραγματοποιηθεί πριν επιτραπεί στη σύνοδο να εξέλθει, έτσι ώστε όλες οι ακμές να ενημερωθούν σωστά για τυχόν αυξήσεις ή μειώσεις στους ρυθμούς μετάδοσης άλλων συνόδων.

[1] Δεν ασχολούμαστε εδώ με το πρόβλημα καθορισμού της εξόδου μιας συνόδου από το δίκτυο (μπορεί π.χ. η σύνοδος να μεταδίδει ένα ειδικό μήνυμα τερματισμού ή να χρησιμοποιούνται κατάλληλοι μηχανισμοί χρονισμού). Στη διατριβή αυτή θεωρούμε απλώς ότι υπάρχει κάποιος μηχανισμός με βάση τον οποίο οι ακμές αποφασίζουν ότι μια σύνοδος θέλει να εξέλθει του δικτύου.

Μέρος III

Αλγόριθμοι Προτεραιοτήτων

Κεφάλαιο 10

Δικαιοσύνη Προτεραιοτήτων

Σε αυτό το κεφάλαιο, εξηγούμε τις έννοιες της προτεραιότητας και της συνάρτησης ανάθεσης προτεραιοτήτων μιας συνόδου. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις έννοιες αυτές για να ορίσουμε και να μελετήσουμε τη δικαιοσύνη μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων και το ισομερίδιο προτεραιότητας.

10.1 Προτεραιότητες και Συναρτήσεις Ανάθεσης Προτεραιοτήτων

Συσχετίζουμε με κάθε σύνοδο S_i έναν πραγματικό αριθμό $\mathcal{P}(S_i)$, που ονομάζεται *προτεραιότητα*. Διαισθητικά, η $\mathcal{P}(S_i)$ εκφράζει την προτεραιότητα της συνόδου S_i στην κατανομή εύρους ζώνης. Για κάθε σύνοδο S_i, η *συνάρτηση ανάθεσης προτεραιοτήτων* $\mathbf{F}_i : \Re^+ \rightarrow \Re^+$ είναι μια συνεχής, γνήσια αύξουσα, κυρτή συνάρτηση που απεικονίζει την προτεραιότητα $\mathcal{P}(S_i)$ σε ένα ρυθμό μετάδοσης $r(S_i)$. Εφόσον η $\mathbf{F}_i$ είναι γνήσια αύξουσα, είναι αντιστρέψιμη. Συμβολίζουμε με $\mathbf{F}_i^{-1}$ την αντίστροφή της συνάρτηση, η οποία είναι επίσης γνήσια αύξουσα. Προφανώς, μια προσαρμογή του ρυθμού μετάδοσης επιφέρει μια αντίστοιχη προσαρμογή της προτεραιότητας μιας συνόδου και αντίστροφα, μέσω της συνάρτησης ανάθεσης προτεραιοτήτων και της αντίστροφής της. Συνεπώς, μια εκτέλεση μπορεί να θεωρηθεί εναλλακτικά, ότι "διαχειρίζεται" τις προτεραιότητες και τις καταστάσεις των συνόδων που υπάρχουν στο δίκτυο.

Τονίζουμε ότι οι ρυθμοί μετάδοσης είναι "πραγματικές" οντότητες του δικτύου. Αντίθετα, οι προτεραιότητες είναι απλώς αφηρημένες παράμετροι που χρησιμοποιούνται στο μοντέλο μας και αποτελούν το μέσο για τον καθορισμό των ρυθμών μετάδοσης μέσω των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων. Συνεπώς, η κατανομή του εύρους ζώνης με βάση προτεραιότητες πραγματοποιείται με την κατάλληλη επιλογή των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων, που στη συνέχεια χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των ρυθμών μετάδοσης.

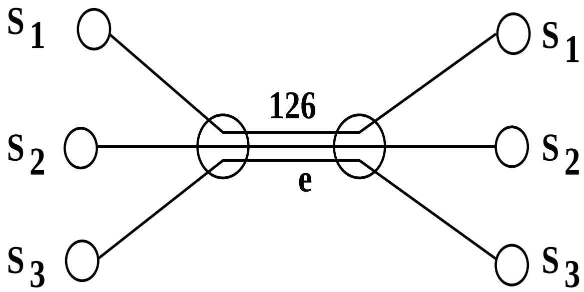
10.2 Δίκαιο Διάνυσμα Ρυθμών Μετάδοσης Προτεραιοτήτων

Μιλώντας άτυπα, ένα δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων αποδίδει σε κάθε σύνοδο τον μέγιστο δυνατό ρυθμό μετάδοσης, ενώ παράλληλα σέβεται τις συνόδους με χαμηλότερες προτεραιότητες. Η έννοια του δίκαιου διανύσματος ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων γενικεύει την έννοια του (κλασικού) δίκαιου διανύσματος ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου, λαμβάνοντας υπ' όψιν του τις προτεραιότητες των διαφόρων συνόδων. Τυπικά, ένα *δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων* είναι ένα κορεσμένο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης $\mathbf{r}$ τέτοιο ώστε για κάθε σύνοδο S_i, ο $r(S_i)$ δεν μπορεί να αυξηθεί, διατηρώντας την ιδιότητα εφικτότητας του διανύσματος, χωρίς να μειώσει τον $r(S_j)$ για κάποια σύνοδο S_j τέτοια ώστε $\mathcal{P}(S_j) \leq \mathcal{P}(S_i)$.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η δικαιοσύνη μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων είναι μια γενίκευση της (κλασικής) δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου. Πιο συγκεκριμμένα, το δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου ταυτίζεται με το δίκαιο διάνυσμα μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων για ένα σύνολο συνόδων $\mathcal{S}$ τέτοιο ώστε, για κάθε σύνοδο $S_i \in \mathcal{S}$, $\mathbf{F}_i(\mathcal{P}(S_i)) = \mathcal{P}(\mathcal{S}_i)$. Ωστόσο, εφόσον $\mathbf{F}_i(\mathcal{P}(S_i)) = r(S_i)$ (εξ ορισμού των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων), προκύπτει ότι αυτή είναι η ειδική περίπτωση στην οποία ο ρυθμός μετάδοσης και η προτεραιότητα κάθε συνόδου ταυτίζονται.

Παράδειγμα 10.1 *Θεωρούμε το δίκτυο του Σχήματος 10-1. Υποθέτουμε ότι* $r(S_1) = \mathbf{F}_1(\mathcal{P}(S_1)) = \mathcal{P}(S_1)$, $r(S_2) = \mathbf{F}_2(\mathcal{P}(S_2)) = \mathcal{P}(S_2)/2$ *και* $r(S_3) = \mathbf{F}_3(\mathcal{P}(S_3)) = 3\,\mathcal{P}(S_3)$.[1]

[1]Τονίζουμε ότι οι συναρτήσεις ανάθεσης προτεραιοτήτων έχουν επιλεγεί γραμμικές σε αυτό και σε επόμενα παραδείγματα μόνο για λόγους απλότητας και ευκολίας διεξαγωγής υπολογισμών.



Σχήμα 10-1: Ένα δίκτυο που αποτελείται από ένα σύνδεσμο.

Θεωρούμε το διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης $\langle 28, 14, 84\rangle^{(\mathrm{T})}$, *για το οποίο η ακμή e είναι κορεσμένη. Συνεπώς, δεν υπάρχει σύνοδος της οποίας ο ρυθμός μετάδοσης να μπορεί να αυξηθεί, χωρίς να προκαλέσει τη μείωση του ρυθμού μετάδοσης κάποιας άλλης συνόδου. Εφόσον οι αντίστροφες συναρτήσεις ανάθεσης είναι επίσης γνήσια αύξουσες, αυτό υποδηλώνει τη μείωση της προτεραιότητας της συνόδου που ο ρυθμός μετάδοσής της μειώνεται. Ωστόσο, κάνοντας απλούς υπολογισμούς με τις συναρτήσεις ανάθεσης προτεραιοτήτων συμπεραίνουμε ότι όλες οι προτεραιότητες είναι ίσες με* 28. *Άρα, κάθε τέτοια αύξηση προκαλεί απαραίτητα τη μείωση κάποιας προτεραιότητας με την ίδια τιμή. Προκύπτει επομένως ότι το διάνυσμα* $\langle 28, 14, 84\rangle^{(\mathrm{T})}$ *είναι δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων. Ενθαρρύνουμε τον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι το κλασικό δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου είναι το* διαφορετικό *διάνυσμα* $\langle 42, 42, 42\rangle^{(\mathrm{T})}$. *Επιπρόσθετα, αυτό το απλό παράδειγμα επιβεβαιώνει ότι όσο πιο "απότομα" αυξάνει μια συνάρτηση ανάθεσης προτεραιοτήτων, τόσο μεγαλύτερος θα είναι ο ρυθμός μετάδοσης της συνόδου που χαρακτηρίζει.*

10.3 Ιδιότητα Επάρκειας

Υποθέτουμε τώρα ότι, για κάθε σύνοδο S_i, ισχύει ότι $\mathbf{F}_i(0) > 0$. Δηλαδή, ακόμη και μια σύνοδος με μηδενική προτεραιότητα λαμβάνει μη μηδενικό ρυθμό μετάδοσης. Εφόσον η συνάρτηση $\mathbf{F}_i$ είναι γνήσια αύξουσα, συνεπάγεται ότι σε κάθε κατάσταση $r(S_i) = \mathbf{F}_i(\mathcal{P}(S_i)) \geq \mathbf{F}_i(0) > 0$. Δηλαδή, ένα μη μηδενικό κάτω όριο $\mathbf{F}_i(0)$, που ονομάζεται *απαίτηση*, επιβάλλεται στο ρυθμό μετάδοσης της συνόδου S_i.

Μια *ακμή επαρκούς χωρητικότητας* είναι μια ακμή e τέτοια ώστε

$$\sum_{i \in sessions(e)} \mathbf{F}_i(0) \quad \leq \quad cap(e)\,.$$

Δηλαδή, η χωρητικότητα της ακμής e είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των απαιτήσεων όλων των συνόδων που τη χρησιμοποιούν. Η *συνθήκη επάρκειας* απαιτεί ότι κάθε ακμή $e \in E$ είναι ακμή επαρκούς χωρητικότητας.

10.4 Εξίσωση Δικαιοσύνης Μεγίστου-Ελαχίστου Προτεραιοτήτων

Θεωρούμε οποιαδήποτε ενεργή ακμή e στην κατάσταση Q. Από τη συνθήκη χωρητικότητας έχουμε

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_Q | e} r_Q(S_i) \quad \leq \quad cap(e) - allot_Q(e)\,.$$

Από τον ορισμό των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων είναι

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_Q | e} \mathbf{F}_i(\mathbf{F}_i^{-1}(r_Q(S_i))) \quad \leq \quad cap(e) - allot_Q(e)\,.$$

Απαιτώντας ότι, για κάθε $i \in \mathcal{A}_Q \mid e$, πρέπει να ισχύει ότι $\mathbf{F}_i^{-1}(r_Q(S_i)) = p$, για κάποια παράμετρο $p \geq 0$, καθώς επίσης ότι η ακμή e είναι κορεσμένη στην κατάσταση Q, προκύπτει *η εξίσωση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων για την ακμή e στην κατάσταση Q*, που είναι η εξής

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_Q | e} \mathbf{F}_i(p) \quad = \quad cap(e) - allot_Q(e)\,.$$

Τονίζουμε ότι η εξίσωση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων για την ακμή e στην κατάσταση Q είναι μια αλγεβρική εξίσωση με άγνωστο την παράμετρο p.

10.5 Ισομερίδιο Προτεραιότητας

Ορισμός

Ορίζουμε το *ισομερίδιο προτεραιότητας για την ακμή e στην κατάσταση Q*, το οποίο συμβολίζουμε $PS_Q(e)$, να είναι μια θετική ρίζα p της εξίσωσης δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων. Συνεπώς,

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_Q|e} \mathbf{F}_i(PS_Q(e)) \quad = \quad cap(e) - allot_Q(e) \,.$$

Παράδειγμα 10.2 *Θεωρούμε ξανά το απλό δίκτυο του Σχήματος 10-1 και διατηρούμε όλες τις υποθέσεις του Παραδείγματος 10.1 για τις συναρτήσεις ανάθεσης προτεραιοτήτων σε αυτό το δίκτυο. Έστω ότι η Q_0 είναι μια κατάσταση στην οποία $allot_{Q_0} = 0$ και οι τρεις σύνοδοι είναι ενεργές. Η εξίσωση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων για την κατάσταση Q_0 είναι $\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_0}|e} \mathbf{F}_i(p) = cap(e) - allot_{Q_0}(e)$, ή $p + p/2 + 3p = 126$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $p = 28$. Συνεπώς, εξ ορισμού του ισομεριδίου προτεραιότητας, είναι $PS_{Q_0}(e) = 28$.*

Τονίζουμε ότι το ισομερίδιο προτεραιότητας γενικεύει την έννοια του ισομεριδίου στην περίπτωση προτεραιοτήτων. Πράγματι, το σημείο εκκίνησης και των δύο εννοιών είναι η *εξίσωση κορεσμού της ακμής e στην κατάσταση Q*, με βάση την οποία

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_Q|e} r_Q(S_i) \quad = \quad cap(e) - allot_Q(e) \,.$$

Απαιτώντας για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_Q \mid e$ να ισχύει $r_Q(S_i) = r$, για κάποια παράμετρο $r > 0$, η *μοναδική* λύση της εξίσωσης κορεσμού είναι (προφανώς) το ισομερίδιο

$$FS_Q(e) \quad = \quad \frac{cap(e) - allot_Q(e)}{|\mathcal{A}_Q \mid e|} \,.$$

Με παρόμοιο τρόπο, το ισομερίδιο προτεραιότητας είναι μια λύση στην εξίσωση κορεσμού, όταν αυτή εκφράζεται μέσω των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων και όταν οι προτεραιότητες όλων των ενεργών συνόδων που χρησιμοποιούν την ακμή εξισώνονται. Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι το ισομερίδιο προτεραιότητας είναι επιπλέον μοναδικό.

Μοναδικότητα

Αποδεικνύουμε ότι:

Θεώρημα 10.1 *Για κάθε ακμή e και κάθε κατάσταση Q ισχύει ότι το $PS_Q(e)$ είναι μοναδικό.*

Απόδειξη: Εφόσον κάθε συνάρτηση ανάθεσης προτεραιοτήτων $\mathbf{F}_i$ με $i \in \mathcal{A}_Q \mid e$ είναι συνεχής, γνήσια αύξουσα και κυρτή, συνεπάγεται ότι το άθροισμα $\sum_{i \in \mathcal{A}_Q | e} \mathbf{F}_i(p)$ είναι συνάρτηση συνεχής, γνήσια αύξουσα και κυρτή. Η τιμή της συνάρτησης αυτής για $p = 0$ είναι $\sum_{i \in \mathcal{A}_Q | e} \mathbf{F}_i(0)$. Λόγω κυρτότητας, η συνάρτηση αυτή τείνει στο άπειρο. Λόγω συνέχειας και αύξουσας μονοτονίας, προκύπτει ότι 'αγγίζει" κάθε τιμή μεγαλύτερη ή ίση του $\sum_{i \in \mathcal{A}_Q | e} \mathbf{F}_i(0)$ ακριβώς μια φορά. Πιο συγκεκριμμένα, η συνάρτηση $\sum_{i \in \mathcal{A}_Q | e} \mathbf{F}_i(p)$ λαμβάνει (ακριβώς μια φορά) την τιμή $cap(e) - allot_Q(e)$ αν και μόνο αν

$$cap(e) - allot_Q(e) \quad \geq \quad \sum_{i \in \mathcal{A}_Q | e} \mathbf{F}_i(0)\,.$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι η τελευταία ανισότητα ισχύει.

Εξετάζουμε τις εξής δύο περιπτώσεις. Υποθέτουμε πρώτα ότι $Q = Q_0$. Τότε,

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_Q | e} \mathbf{F}_i(0) \quad = \quad \sum_{i \in sessions(e)} \mathbf{F}_i(0)$$

και $cap(e) - allot_Q(e) = cap(e)$, έτσι ώστε η προς απόδειξη ανισότητα μετατρέπεται στη συνθήκη επάρκειας, η οποία ισχύει από υπόθεση. Υποθέτουμε τώρα ότι $Q = Q_l$, για κάθε $l > 0$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} & cap(e) - allot_{Q_l}(e) \\ = \quad & cap(e) - allot_{Q_{l-1}}(e) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) | e} r_{Q_{l-1}}(S_i) \\ & \text{(λόγω του Ισχυρισμού 3.1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= cap(e) - allot_{Q_{l-1}}(e) - \Big(\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l-1}}|e} r_{Q_{l-1}}(S_i) - \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} r_{Q_{l-1}}(S_i)\Big) \\
&= cap(e) - allot_{Q_{l-1}}(e) - \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l-1}}|e} r_{Q_{l-1}}(S_i) + \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_{l-1}}(S_i)) \\
&\quad \text{(εξ ορισμού των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων)} \\
&\geq cap(e) - allot_{Q_{l-1}}(e) - (cap(e) - allot_{Q_{l-1}}(e)) + \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_{l-1}}(S_i)) \\
&\quad \text{(λόγω της συνθήκης χωρητικότητας)} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_{l-1}}(S_i)) \\
&\geq \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(0) \\
&\quad \text{(επειδή η συνάρτηση } \mathbf{F}_i \text{ είναι γνήσια αύξουσα),}
\end{aligned}
$$

όπως απαιτείται. ■

Άλλες Ιδιότητες

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια περισσότερες ιδιότητες του ισομεριδίου προτεραιότητας. Οι ιδιότητες αυτές αναφέρονται σε κάποια εκτέλεση $\alpha = Q_0, i_1, Q_1, \ldots, i_l, Q_l, \ldots$ *κάθε* αλγορίθμου. Παραλείπουμε την αναφορά στην εκτέλεση α όταν είναι προφανής από τα συμφραζόμενα. Η πρώτη ιδιότητα περιγράφει τον τρόπο μεταβολής των ισομεριδίων προτεραιότητας σε κάθε εκτέλεση.

Λήμμα 10.1 *Για κάθε ακέραιο $l \geq 1$ και κάθε ενεργή ακμή $e \in E$ στην κατάσταση Q_l ισχύει ότι*

$$
\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) = \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l-1}}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e)) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_{l-1}}(S_i)\,.
$$

Απόδειξη: Εξ ορισμού του $PS_{Q_l}(e)$ είναι

$$
\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) = cap(e) - allot_{Q_l}(e)
$$

$$= \quad cap(e) - allot_{Q_{l-1}}(e) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_{l-1}}(S_i)\,.$$

Εξ ορισμού του $PS_{Q_{l-1}}(e)$ έχουμε

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l-1}}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e)) \quad = \quad cap(e) - allot_{Q_{l-1}}(e)\,,$$

έτσι ώστε,

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) \quad = \quad \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l-1}}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e)) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_{l-1}}(S_i)\,,$$

όπως απαιτείται. ■

Συνεχίζουμε να αποδείξουμε ότι ο κορεσμός μιας ακμής εξαρτάται από τον τρόπο που οι προτεραιότητες των συνόδων και τα ισομερίδια προτεραιότητας των ακμών σχετίζονται. Η απόδειξη χρησιμοποιεί τον ορισμό των ισομεριδίων προτεραιότητας και το γεγονός ότι οι συναρτήσεις ανάθεσης προτεραιοτήτων και οι αντίστροφές τους είναι γνήσια αύξουσες.

Λήμμα 10.2 *Για κάθε ακέραιο $l_0 \geq 0$, έστω ότι η ακμή e είναι ενεργή στην κατάσταση Q_{l_0}. Τότε, για κάθε ακέραιο $l \geq l_0$, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) *αν για κάθε $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, ισχύει ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) = PS_{Q_{l_0}}(e)$, τότε η ακμή e είναι κορεσμένη στην Q_l,*

(2) *αν για κάθε $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, ισχύει ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) < PS_{Q_{l_0}}(e)$, τότε η ακμή e δεν είναι κορεσμένη στην Q_l,*

(3) *δεν υπάρχει δείκτης συνόδου $j \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$ τέτοιος ώστε $\mathcal{P}_{Q_l}(S_j) > PS_{Q_{l_0}}(e)$, ενώ για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, $i \neq j$ να ισχύει ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$.*

Απόδειξη: Ξεκινάμε με την απόδειξη της συνθήκης (1). Εξ ορισμού του $PS_{Q_{l_0}}(e)$ είναι

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) \quad = \quad cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e)\,.$$

Από υπόθεση, για κάθε $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$ ισχύει ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) = PS_{Q_{l_0}}(e)$. Συνεπώς,

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} \mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_l}(S_i)) = cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e) .$$

Εξ ορισμού των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων, συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} r_{Q_l}(S_i) = cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e) .$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l} | e} r_{Q_l}(S_i) &= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} r_{Q_l}(S_i) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) | e} r_{Q_l}(S_i) \\
&\quad (\text{επειδή } \mathcal{A}_{Q_l} \mid e \subseteq \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e) \\
&= cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) | e} r_{Q_l}(S_i) . \\
&= cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e) - (allot_{Q_l}(e) - allot_{Q_{l_0}}(e)) \\
&\quad (\text{λόγω του Ισχυρισμού 3.2}) \\
&= cap(e) - allot_{Q_l}(e) ,
\end{aligned}$$

όπως απαιτείται για να αποδειχθεί ότι η ακμή e είναι κορεσμένη στην κατάσταση Q_l.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (2). Προφανώς,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l} | e} r_{Q_l}(S_i) &= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} r_{Q_l}(S_i) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) | e} r_{Q_l}(S_i) \\
&\quad (\text{επειδή } \mathcal{A}_{Q_l} \mid e \subseteq \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} \mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_l}(S_i)) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) | e} r_{Q_l}(S_i) \\
&\quad (\text{εξ ορισμού των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων}) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} \mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_l}(S_i)) - (allot_{Q_l}(e) - allot_{Q_{l_0}}(e))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \text{(λόγω του Ισχυρισμού 3.2)} \\
< \;& \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
& \text{(επειδή η συνάρτηση } \mathbf{F}_i \text{ είναι γνήσια αύξουσα και } \mathcal{P}_{Q_l}(S_i) < PS_{Q_{l_0}}(e)) \\
= \;& cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
& \text{(εξ ορισμού του ισομεριδίου προτεραιότητας)} \\
= \;& cap(e) - allot_{Q_l}(e) \, ,
\end{aligned}
$$

όπως απαιτείται για να αποδειχθεί ότι η ακμή e *δεν* είναι κορεσμένη στην κατάσταση Q_l.

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια τη συνθήκη (3). Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι υπάρχει κάποια σύνοδος $i_0 \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$ τέτοια ώστε $\mathcal{P}_{Q_l}(S_{i_0}) > PS_{Q_{l_0}}(e)$, ενώ για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, $i \neq i_0$, ισχύει ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$. Προφανώς,

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l} | e} r_{Q_l}(S_i) \\
= \;& \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} r_{Q_l}(S_i) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) | e} r_{Q_l}(S_i) \\
& \text{(επειδή } \mathcal{A}_{Q_l} \mid e \subseteq \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e) \\
= \;& \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} \mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_l}(S_i)) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) | e} r_{Q_l}(S_i) \\
& \text{(εξ ορισμού των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων)} \\
= \;& \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e} \mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_l}(S_i)) - (allot_{Q_l}(e) - allot_{Q_{l_0}}(e)) \\
& \text{(λόγω του Ισχυρισμού 3.2)} \\
= \;& \mathbf{F}_{i_0}(\mathcal{P}_{Q_l}(S_{i_0})) + \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e, i \neq i_0} \mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_l}(S_i)) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
> \;& \mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_{l_0}}(e)) + \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e, i \neq i_0} \mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_l}(S_i)) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
& \text{(επειδή η συνάρτηση } \mathbf{F}_j \text{ είναι γνήσια αύξουσα και } \mathcal{P}_{Q_l}(S_j) > PS_{Q_{l_0}}(e)) \\
\geq \;& \mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_{l_0}}(e)) + \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} | e, i \neq i_0} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \quad \text{(επειδή η συνάρτηση } \mathbf{F}_i \text{ είναι γνήσια αύξουσα και } \mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e) \text{ για } i \neq i_0) \\
= & \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e)) \\
= & \ cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e) - allot_{Q_l}(e) + allot_{Q_{l_0}}(e) \\
& \quad \text{(εξ ορισμού του ισομεριδίου προτεραιότητας)} \\
= & \ cap(e) - allot_{Q_l}(e) \,,
\end{aligned}
$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η ακμή e παραβιάζει τη συνθήκη χωρητικότητας στην κατάσταση Q_l. Άτοπο.

Σε αυτό το σημείο η απόδειξη του (3) και άρα και του λήμματος έχει ολοκληρωθεί. ∎

Ελάχιστο Ισομερίδιο Προτεραιοτήτων και Ακμές Ελάχιστου Ισομερίδιου Προτεραιοτήτων

Για κάθε σύνοδο $i \in [n]$, το *ελάχιστο ισομερίδιο προτεραιότητας της συνόδου S_i στην κατάσταση Q*, το οποίο συμβολίζεται με $MPS_Q(S_i)$, ορίζεται να είναι

$$MPS_Q(S_i) \quad = \quad \min_{e \in S_i} PS_Q(e) \,.$$

Επομένως, το $MPS_Q(S_i)$ είναι το ελάχιστο μεταξύ όλων των ισομεριδίων στην κατάσταση Q των ακμών που χρησιμοποιούνται από τη σύνοδο S_i. Το ελάχιστο ισομερίδιο προτεραιότητας μιας συνόδου είναι γενίκευση του ελάχιστου ισομεριδίου της συνόδου στην περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων.

Για κάθε κατάσταση Q, μια *ακμή ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας για την κατάσταση Q* είναι μια ενεργή ακμή e στην Q τέτοια ώστε

$$PS_Q(e) \quad = \quad \min_{e' \in AE_Q} PS_Q(e') \,.$$

Δηλαδή, μια ακμή ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας για την κατάσταση Q έχει το ελάχιστο ισομερίδιο προτεραιότητας μεταξύ όλων των ενεργών ακμών στην Q. Ο ορισμός της ακμής ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας είναι η γενίκευση του ορισμού της ακμής ελάχιστου ισομεριδίου για την περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων.

Ορίζουμε το $MPSE_Q$ να είναι το *σύνολο των ακμών ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας για την κατάσταση* Q.

Κεφάλαιο 11

Αλγόριθμοι Συμφόρησης Προτεραιοτήτων

Σε αυτό το κεφάλαιο, χρησιμοποιούμε το ισομερίδιο προτεραιότητας για να ορίσουμε και να μελετήσουμε τις ακμές συμφόρησης προτεραιοτήτων και τους αλγορίθμους συμφόρησης προτεραιοτήτων. Ανακαλύπτουμε ότι οι αλγόριθμοι συμφόρησης προτεραιοτήτων επιτρέπουν στα ισομερίδια προτεραιότητας, στις ακμές συμφόρησης προτεραιοτήτων και στις ακμές ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας να απολαμβάνουν σημαντικές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

11.1 Ακμές και Αλγόριθμοι Συμφόρησης Προτεραιοτήτων

Ακμές Συμφόρησης Προτεραιοτήτων

Για κάθε κατάσταση Q, μια *ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την* Q είναι μια ακμή $e \in E$ τέτοια ώστε για κάθε σύνοδο $S \in \mathcal{A}_Q \mid e$ ισχύει

$$MPS_Q(S) \;\; = \;\; PS_Q(e) .$$

Δηλαδή, για κάθε ενεργή σύνοδο που χρσιμοποιεί την ακμή e, η e είναι εκείνη η ακμή μεταξύ όλων όσων χρησιμοποιούνται από τη σύνοδο, που έχει το ελάχιστο ισομερίδιο προτεραιότητας στην κατάσταση Q. Τονίζουμε ότι ο ορισμός της ακμής συμφόρησης προτεραιοτήτων γενικεύει τον αντίστοιχο ορισμό μιας ακμής συμφόρησης, για την περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων.

Παράδειγμα 11.1 *Θεωρούμε και πάλι το δίκτυο του Σχήματος 3-1. Υποθέτουμε ότι* $r(S_1) = \mathbf{F}_1(\mathcal{P}(S_1)) = \mathcal{P}(S_1)$, $r(S_2) = \mathbf{F}_2(\mathcal{P}(S_2)) = \mathcal{P}(S_2)/2$, $r(S_3) = \mathbf{F}_3(\mathcal{P}(S_3)) = 3\,\mathcal{P}(S_3)$ *και* $r(S_4) = \mathbf{F}_4(\mathcal{P}(S_4)) = \mathcal{P}(S_4)/3$. *Έστω ότι η* Q *είναι μια κατάσταση τέτοια ώστε* $allot_Q(e_1) = allot_Q(e_2) = 0$, *ενώ όλες οι σύνοδοι είναι ενεργές στην* Q.

Η εξίσωση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων για την ακμή e_1 *στην κατάσταση* Q *είναι* $\sum_{i \in \mathcal{A}_Q|e_1} \mathbf{F}_i(p) = cap(e_1) - allot_Q(e_1)$, *ή* $p + p/2 + 3p = 126 - 0$, *από το οποίο συνεπάγεται ότι* $p = 28$. *Εξ ορισμού του ισομεριδίου προτεραιότητας προκύπτει ότι* $PS_Q(e_1) = 28$.

Με παρόμοιο τρόπο, η εξίσωση δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων για την ακμή e_2 *στην κατάσταση* Q *είναι* $\sum_{i \in \mathcal{A}_Q|e_2} \mathbf{F}_i(p) = cap(e_2) - allot_Q(e_2)$ *ή* $3p + p/3 = 100 - 0$, *από το οποίο συνεπάγεται ότι* $p = 30$. *Εξ ορισμού του ισομεριδίου προτεραιότητας προκύπτει ότι* $PS_Q(e_2) = 30$.

Εφόσον η σύνοδος S_3 *χρησιμοποιεί και τις δύο ακμές* e_1 *και* e_2, *το ελάχιστο ισομερίδιο προτεραιότητας για τη σύνοδο* S_3 *στην κατάσταση* Q *είναι*

$$\begin{aligned} MPS_Q(S_3) &= \min\{PS_Q(e_1), PS_Q(e_2)\} \\ &= \min\{28, 30\} \\ &= 28\,. \end{aligned}$$

Εφόσον οι δύο σύνοδοι S_1 *και* S_2 *χρησιμοποιούν μόνο την ακμή* e_1, *το ελάχιστο ισομερίδιό τους στην κατάσταση* Q *είναι* $MPS_Q(S_1) = MPS_Q(S_2) = PS_Q(e_1) = 28$. *Επομένως, η ακμή* e_1 *είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την κατάσταση* Q. *Αντίθετα, η ακμή* e_2 δεν *είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την κατάσταση* Q, *επειδή* $PS_Q(e_2) = 30$, *ενώ η* e_2 *χρησιμοποιείται από τη σύνοδο* S_3 *για την οποία* $MPS_Q(S_3) = 28$.

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι τα ισομερίδια προτεραιότητας κάθε δύο ακμών συμφόρησης προτεραιοτήτων που χρησιμοποιούνται από την ίδια σύνοδο είναι ίσα.

Λήμμα 11.1 *Έστω ότι οι ακμές e και e' είναι ακμές συμφόρησης προτεραιοτήτων για την κατάσταση Q τέτοιες ώστε $(\mathcal{A}_Q \mid e) \cap (\mathcal{A}_Q \mid e') \neq \emptyset$. Τότε, $PS_Q(e) = PS_Q(e')$.*

Απόδειξη: Έστω μια οποιαδήποτε σύνοδος $S \in (\mathcal{A}_Q \mid e) \cap (\mathcal{A}_Q \mid e')$. Εφόσον οι ακμές e και e' είναι ακμές συμφόρησης προτεραιοτήτων για την Q, ισχύει ότι $MPS_Q(S) = PS_Q(e)$ και $MPS_Q(S) = PS_Q(e')$. Επομένως, $PS_Q(e) = PS_Q(e')$, όπως απαιτείται. ■

Ο επόμενος απλός ισχυρισμός είναι μια άμεση συνέπεια των ορισμών μιας ακμής συμφόρησης προτεραιοτήτων και του ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας μιας ακμής.

Λήμμα 11.2 *Για κάθε κατάσταση Q, έστω ότι η e είναι μια ακμή ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας για την Q. Τότε, η e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την Q.*

Απόδειξη: Έστω μια οποιαδήποτε σύνοδος $S \in \mathcal{A}_Q \mid e$. Εφόσον $e \in MPSE_Q$, για κάθε ακμή $e' \in AE_Q$ ισχύει ότι $PS_Q(e) \leq PS_Q(e')$. Πιο συγκεκριμμένα, για κάθε ακμή e', που χρησιμοποιείται από τη σύνοδο S, έχουμε $PS_Q(e) \leq PS_Q(e')$, έτσι ώστε $PS_Q(e) \leq \min_{e' \in S} PS_Q(e')$. Εφόσον η σύνοδος S χρησιμοποιεί την e, είναι $PS_Q(e) \geq \min_{e' \in S} PS_Q(e')$. Επομένως, $PS_Q(e) = \min_{e' \in S} PS_Q(e')$. Εφόσον η S επιλέχθηκε αυθαίρετα, προκύπτει ότι η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την Q, όπως απαιτείται. ■

Αλγόριθμοι Συμφόρησης Προτεραιοτήτων

Ένας απενεργοποιητής Term ονομάζεται απενεργοποιητής *συμφόρησης προτεραιοτήτων* αν για κάθε κατάσταση Q και κάθε σύνοδο S, ισχύει ότι $S \in \mathsf{Term}(Q)$ αν (και μόνο αν) υπάρχει κάποια ακμή $e \in S$ τέτοια ώστε:

(1) η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την κατάσταση Q και

(2) $\mathcal{P}_Q(S) = PS_Q(e)$.

Λέμε ότι ένας αλγόριθμος $\mathsf{Alg} = \langle \mathsf{Sched}, \mathtt{operation}, \mathsf{Term} \rangle$ είναι αλγόριθμος *συμφόρησης προτεραιοτήτων* αν ο Term είναι απενεργοποιητής συμφόρησης προτεραιοτήτων. Ο ορισμός ενός αλγορίθμου συμφόρησης προτεραιοτήτων γενικεύει τον αντίστοιχο ορισμό ενός αλγορίθμου συμφόρησης, για την περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων.

11.2 Ιδιότητα Αύξουσας Μονοτονίας του Ισομεριδίου Προτεραιότητας

Αποδεικνύουμε ότι το ισομερίδιο προτεραιότητας κάθε ενεργής ακμής δε μειώνεται κατά τη διάρκεια εκτέλεσης ενός αλγορίθμου συμφόρησης προτεραιοτήτων.

Πρόταση 11.1 *Έστω ότι ο* Alg *είναι αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων. Τότε, για κάθε ακέραιο $l \geq 1$ και κάθε ακμή $e \in AE_{Q_l}$ ισχύει ότι*

$$PS_{Q_l}(e) \quad \geq \quad PS_{Q_{l-1}}(e)\,.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $PS_{Q_l}(e) < PS_{Q_{l-1}}(e)$. Εφόσον για κάθε σύνοδο $i \in [n]$, η συνάρτηση $\mathbf{F}_i$ είναι γνήσια αύξουσα, προκύπτει ότι

$$\mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) \quad < \quad \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e))\,,$$

έτσι ώστε

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) \quad < \quad \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e))\,.$$

Λόγω του Λήμματος 10.1, έχουμε

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) \quad = \quad \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_{l-1}}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e)) - \sum_{i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_{l-1}}(S_i)\,.$$

Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων, για κάθε δείκτη συνόδου $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e$, υπάρχει μια ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων $e' \in S_i$ τέτοια ώστε $\mathcal{P}_{Q_{l-1}}(S_i) = PS_{Q_{l-1}}(e')$. Εφόσον η e' είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων και ισχύει ότι $e \in S_i$, προκύπτει, από τον ορισμό της ακμής συμφόρησης προτεραιοτήτων, ότι $PS_{Q_{l-1}}(e') \leq PS_{Q_{l-1}}(e)$. Συνεπώς, $\mathcal{P}_{Q_{l-1}}(S_i) \leq PS_{Q_{l-1}}(e)$. Εφόσον η συνάρτηση $\mathbf{F}_i$ είναι γνήσια αύξουσα, συνεπάγεται ότι $\mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_{l-1}}(S_i)) \leq \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e))$. Από τον ορισμό των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιότητων είναι $r_{Q_{l-1}}(S_i) \leq \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e))$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) &\geq \sum_{i\in\mathcal{A}_{Q_{l-1}}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e)) - \sum_{i\in(\mathcal{A}_{Q_{l-1}}\setminus\mathcal{A}_{Q_l})|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e)) \\ &= \sum_{i\in\mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e))\,.\end{aligned}$$

Άτοπο. ■

Τονίζουμε ότι η Πρόταση 11.1 γενικεύει την Πρόταση 4.1, η οποία αποδεικνύει την ιδιότητα αύξουσας μονοτονίας των ισομεριδίων, για την περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων.

11.3 Ιδιότητες Σταθερότητας των Ακμών Συμφόρησης Προτεραιοτήτων

Αποδεικνύουμε ιδιότητες *σταθερότητας* για κάθε ακμή που γίνεται ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης ενός αλγορίθμου συμφόρησης προτεραιοτήτων. Τυπικά, αποδεικνυούμε ότι:

Πρόταση 11.2 *Έστω ότι ο* Alg *είναι αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων. Για κάθε ακέραιο* $l_0 \geq 0$*, έστω ότι* $e \in E$ *είναι μια ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την* Q_{l_0}*. Τότε, για κάθε ακέραιο* $l \geq l_0$ *τέτοιον ώστε* $\mathcal{A}_{Q_l} \mid e \neq \emptyset$*, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) $PS_{Q_l}(e) = PS_{Q_{l_0}}(e)$,

(2) *η ακμή* e *είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την* Q_l,

(3) *για κάθε δείκτη συνόδου* $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l+1}}) \mid e$, $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) = PS_{Q_{l_0}}(e)$.

Μιλώντας άτυπα, η Πρόταση 11.2 υποδηλώνει ότι το ισομερίδιο προτεραιότητας μιας ακμής συμφόρησης προτεραιοτήτων παραμένει αναλλοίωτο όσο η ακμή είναι ενεργή, έτσι ώστε η ακμή εξακολουθεί να είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων μέχρι να σταματήσει να είναι ενεργή. Επιπρόσθετα, η τελική προτεραιότητα κάθε ενεργής συνόδου που χρησιμοποιεί την ακμή ισούται με το σταθερό αυτό ισομερίδιο προτεραιότητας της ακμής. Ακολουθεί η απόδειξη.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο l. Για τη βάση της επαγωγής, όπου $l = l_0$, η συνθήκη (1) ισχύει τετριμμένα, η (2) ισχύει από υπόθεση, και η (3) ισχύει εξ ορισμού των αλγορίθμων συμφόρησης προτεραιοτήτων. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάθε ακέραιο $l > l_0$, ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε ακέραιο l' τέτοιον ώστε $l_0 < l' \leq l$:

(1) $PS_{Q_{l'-1}}(e) = PS_{Q_{l_0}}(e)$,

(2) η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την $Q_{l'-1}$,

(3) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l'}}) \mid e$, $\mathcal{P}_{Q_{l'-1}}(S_i) = PS_{Q_{l_0}}(e)$.

Για το επαγωγικό βήμα αποδεικνύουμε ότι:

(1) $PS_{Q_l}(e) = PS_{Q_{l_0}}(e)$,

(2) η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την κατάσταση Q_l,

(3) για κάθε δείκτη συνόδου $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l+1}}) \mid e$, $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) = PS_{Q_{l_0}}(e)$.

Ξεκινάμε με την απόδειξη της συνθήκης (1). Αποδεικνύουμε ότι η συνθήκη αυτή είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου τεχνικού ισχυρισμού.

Λήμμα 11.3 *Για κάθε δείκτη συνόδου $i \in \mathcal{A}_{Q_l} \mid e$ ισχύει ότι*

$$\mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) \quad = \quad \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e))\,.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι υπάρχει κάποια σύνοδος $i_0 \in \mathcal{A}_{Q_l} \mid e$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_l}(e)) \quad \neq \quad \mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_{l_0}}(e))\,.$$

Εφόσον $e \in AE_{Q_l}$, η Πρόταση 11.1 υποδηλώνει ότι $PS_{Q_l}(e) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$. Εφόσον η συνάρτηση $\mathbf{F}_{i_0}$ είναι γνήσια αύξουσα, προκύπτει ότι $\mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_l}(e)) \geq \mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_{l_0}}(e))$. Εφόσον $\mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_l}(e)) \neq \mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_{l_0}}(e))$ έχουμε $\mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_l}(e)) > \mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_{l_0}}(e))$.

Προφανώς,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) &= \mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_l}(e)) + \sum_{\substack{i\in \mathcal{A}_{Q_l}|e \\ i\neq i_0}} \mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) \\
&\geq \mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_l}(e)) + \sum_{\substack{i\in \mathcal{A}_{Q_l}|e \\ i\neq i_0}} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) \\
&\quad \text{(λόγω της Πρότασης 11.1 και επειδή η } \mathbf{F}_i \text{ είναι γνήσια αύξουσα)} \\
&> \mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_{l_0}}(e)) + \sum_{\substack{i\in \mathcal{A}_{Q_l}|e \\ i\neq i_0}} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) \\
&\quad \text{(επειδή } \mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_l}(e)) > \mathbf{F}_{i_0}(PS_{Q_{l_0}}(e))\text{)} \\
&= \sum_{i\in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) \,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{i\in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) \;>\; \sum_{i\in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) \,.$$

Από την Πρόταση 10.1 συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i\in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) \;=\; \sum_{i\in \mathcal{A}_{Q_{l-1}}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e)) - \sum_{i\in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}}\setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} r_{Q_{l-1}}(S_i) \,.$$

Θεωρούμε οποιαδήποτε σύνοδο $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e$. Εφόσον $\mathcal{A}_{Q_{l-1}} \subseteq \mathcal{A}_{Q_{l_0}}$, είναι $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_l}) \mid e$. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση (συνθήκη (3)) προκύπτει ότι $\mathcal{P}_{Q_{l-1}}(S_i) = PS_{Q_{l_0}}(e)$, έτσι ώστε $\mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_{l-1}}(S_i)) = \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e))$. Άρα, εξ ορισμού της συνάρτησης ανάθεσης προτεραιοτήτων, είναι $r_{Q_{l-1}}(S_i) = \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e))$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in \mathcal{A}_{Q_l}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_l}(e)) &= \sum_{i\in \mathcal{A}_{Q_{l-1}}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l-1}}(e)) - \sum_{i\in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}}\setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) \\
&= \sum_{i\in \mathcal{A}_{Q_{l-1}}|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) - \sum_{i\in (\mathcal{A}_{Q_{l-1}}\setminus \mathcal{A}_{Q_l})|e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) \\
&\quad \text{(από την επαγωγική υπόθεση (συνθήκη (1)))}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i \in \mathcal{A}_{Q_l} | e} \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) .$$

Άτοπο. ■

Θεωρούμε οποιαδήποτε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_l} \mid e$. Εφόσον η συνάρτηση $\mathbf{F}_i^{-1}$ είναι γνήσια αύξουσα, το Λήμμα 11.3 υποδηλώνει ότι $PS_{Q_l}(e) = PS_{Q_{l_0}}(e)$, όπως απαιτείται. Η απόδειξη της (1) είναι τώρα πλήρης.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (2). Θεωρούμε μια οποιαδήποτε σύνοδο $i \in \mathcal{A}_{Q_l} \mid e$. Προφανώς, $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$. Εφόσον η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την κατάσταση Q_{l_0}, προκύπτει ότι

$$PS_{Q_{l_0}}(e) \;\; = \;\; \min_{e' \in S_i} PS_{Q_{l_0}}(e') .$$

Θεωρούμε τώρα την ακμή $e' \in S_i$. Εφόσον $S_i \in \mathcal{A}_{Q_l} \mid e$, η ακμή e' είναι ενεργή στην κατάσταση Q_l. Επομένως, από την Πρόταση 11.1 συνεπάγεται ότι $PS_{Q_l}(e') \geq PS_{Q_{l_0}}(e')$. Εφόσον η e' έχει επιλεγεί αυθαίρετα έχουμε

$$\min_{e' \in S_i} PS_{Q_l}(e') \;\; \geq \;\; \min_{e' \in S_i} PS_{Q_{l_0}}(e') .$$

Επομένως,

$$\min_{e' \in S_i} PS_{Q_l}(e') \;\; \geq \;\; PS_{Q_{l_0}}(e) .$$

Από τη συνθήκη (1) προκύπτει ότι

$$\min_{e' \in S_i} PS_{Q_l}(e') \;\; \geq \;\; PS_{Q_l}(e) .$$

Προφανώς, εφόσον $e \in S_i$, έχουμε

$$\min_{e' \in S_i} PS_{Q_l}(e') \;\; \leq \;\; PS_{Q_l}(e) .$$

Επομένως,

$$PS_{Q_l}(e) \;=\; \min_{e' \in S_i} PS_{Q_l}(e') \,.$$

Εφόσον η σύνοδος i έχει επιλεγεί αυθαίρετα, προκύπτει ότι η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την κατάσταση Q_l. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της συνθήκης (2).

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια τη συνθήκη (3). Θεωρούμε οποιαδήποτε σύνοδο $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l+1}}) \mid e$. Εφόσον $i \notin \mathcal{A}_{Q_{l+1}}$, υπάρχει κάποιος ακέραιος l', $l_0 < l' \leq l$, τέτοιος ώστε η i απενεργοποιείται στην κατάσταση $Q_{l'}$. Εφόσον ο Term είναι απενεργοποιητής συμφόρησης προτεραιοτήτων, υπάρχει μια ακμή $e' \in S_i$ τέτοια ώστε *(i)* η e' είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την κατάσταση $Q_{l'}$ και *(ii)* $\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i) = PS_{Q_{l'}}(e')$.

Ισχύει ότι, είτε $l_0 < l' < l$ ή $l' = l$. Συνεπώς, είτε από την επαγωγική υπόθεση (συνθήκη (2)) ή από τη συνθήκη (i) προκύπτει ότι η e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την $Q_{l'}$ σε κάθε περίπτωση. Εφόσον και οι δύο ακμές e και e' είναι ακμές συμφόρησης προτεραιοτήτων για την $Q_{l'}$ και $S_i \in (\mathcal{A}_Q \mid e) \cap (\mathcal{A}_Q \mid e')$, το Λήμμα 11.1 υποδηλώνει ότι $PS_{Q_{l'}}(e) = PS_{Q_{l'}}(e')$. Εφόσον $\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i) = PS_{Q_{l'}}(e')$, συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i) \;=\; PS_{Q_{l'}}(e) \,.$$

Επειδή $i \in \mathsf{Term}(Q_{l'})$ και $l \geq l'$ ισχύει ότι

$$\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i) \;=\; \mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \,.$$

Ισχύει ότι, είτε $l_0 < l' < l$ ή $l' = l$. Συνεπώς, είτε από την επαγωγική υπόθεση (συνθήκη (1)) ή από τη συνθήκη $((ii))$ προκύπτει ότι

$$PS_{Q_{l'}}(e) \;=\; PS_{Q_{l_0}}(e) \,.$$

Άρα,

$$\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \quad = \quad PS_{Q_{l_0}}(e)\,,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του (3). ■

11.4 Ιδιότητα Σταθερότητας Ακμών Ελάχιστου Ισομεριδίου Προτεραιοτήτων

Σε αυτήν την ενότητα, αποδεικνύουμε μια απλή ιδιότητα σταθερότητας για κάθε ακμή που γίνεται ακμή ελάχιστου ισομερίδιου προτεραιότητας κατά τη διάρκεια εκτέλεσης ενός αλγορίθμου συμφόρησης προτεραιοτήτων. Μιλώντας άτυπα, αποδεικνύουμε ότι η ακμή εξακολουθεί να είναι ακμή ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας όσο είναι ενεργή.

Πρόταση 11.3 *Έστω ότι ο* Alg *είναι αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων. Για κάθε ακέραιο* $l_0 \geq 0$*, θεωρούμε οποιαδήποτε ακμή* $e \in MPSE_{Q_{l_0}}$*. Τότε, για κάθε ακέραιο* $l \geq l_0$ *τέτοιον ώστε* $e \in AE_{Q_l}$*, ισχύει ότι* $e \in MPSE_{Q_l}$*.*

Απόδειξη: Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακμή $e' \in AE_{Q_l}$. Προφανώς, $e' \in AE_{Q_{l_0}}$. Εφόσον $e \in MPSE_{Q_{l_0}}$ είναι $PS_{Q_{l_0}}(e) \leq PS_{Q_{l_0}}(e')$. Από το Λήμμα 11.2, η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την κατάσταση Q_{l_0}. Συνεπώς, από την Πρόταση 11.2 (1) προκύπτει ότι $PS_{Q_l}(e) = PS_{Q_{l_0}}(e)$. Από την Πρόταση 11.1 συνεπάγεται ότι $PS_{Q_{l_0}}(e') \leq PS_{Q_l}(e')$. Επομένως, $PS_{Q_l}(e) \leq PS_{Q_l}(e')$. Εφόσον η ακμή e' έχει επιλεγεί αυθαίρετα, προκύπτει ότι $e \in MPSE_{Q_l}$, όπως απαιτείται. ■

11.5 Ιδιότητες Τερματισμού

Σε αυτήν την ενότητα, αποδεικνύουμε ιδιότητες τερματισμού των αλγορίθμων συμφόρησης προτεραιοτήτων. Στην Ενότητα 11.5.1 αποδεικνύεται η ύπαρξη κορεσμένων ακμών μέγιστης προτεραιότητας κατά τον τερματισμό των αλγορίθμων συμφόρησης προτεραιοτήτων. Η Ενότητα 11.5.2 παρουσιάζει ιδιότητες του διανύσματος εξόδου των αλγορίθμων αυτών.

11.5.1 Κορεσμένες Ακμές Μέγιστης Προτεραιότητας

Ορίζουμε μια *κορεσμένη ακμή μέγιστης προτεραιότητας για μια σύνοδο* S *στην κατάσταση* Q να είναι μια ακμή $e \in S$ τέτοια ώστε:

(1) για κάθε σύνοδο $i \in sessions(e)$, $\mathcal{P}_Q(S) \geq \mathcal{P}_Q(S_i)$,

(2) η ακμή e είναι κορεσμένη στην Q.

Παράδειγμα 11.2 *Αναφερόμαστε και πάλι στο απλό δίκτυο του Σχήματος 3-1 και διατηρούμε στο δίκτυο αυτό τις ίδιες υποθέσεις που έγιναν στο Παράδειγμα 11.1 για τις συναρτήσεις ανάθεσης προτεραιοτήτων. Θεωρούμε μια κατάσταση* Q *για την οποία το διάνυσμα ρυθμού μετάδοσης είναι* $\mathbf{r}_Q = \langle 28, 14, 84, 10\rangle^{(\mathrm{T})}$. *Αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας κορεσμένης ακμής μέγιστης προτεραιότητας για τη σύνοδο* S_3 *στην κατάσταση* Q. *Εφόσον η σύνοδος* S_3 *χρησιμοποιεί μόνο τις ακμές* e_1 *και* e_2, *οι ακμές αυτές είναι οι μόνες υποψήφιες κορεσμένες ακμές μέγιστης προτεραιότητας για τη σύνοδο* S_3 *στην κατάσταση* Q.

Αρχικά εξετάζουμε την ακμή e_2. *Προφανώς,* $\sum_{i \in sessions(e_2)} r_Q(S_i) = r_Q(S_3) + r_Q(S_4) = 84 + 10 = 94$, *ενώ* $cap(e_2) = 100$. *Επομένως, η ακμή* e_2 *δεν είναι κορεσμένη στην κατάσταση* Q *και για το λόγο αυτό, η* e_2 *δεν είναι κορεσμένη ακμή μέγιστης προτεραιότητας για τη σύνοδο* S_3 *στην* Q.

Εξετάζουμε στη συνέχεια την ακμή e_1. *Προφανώς,* $\sum_{i \in sessions(e_1)} r_Q(S_i) = r_Q(S_1) + r_Q(S_2) + r_Q(S_3) = 28 + 14 + 84 = 126$, *ενώ* $cap(e_1) = 126$. *Επομένως, η ακμή* e_1 *είναι κορεσμένη στην κατάσταση* Q. *Επιπρόσθετα,* $\mathcal{P}_Q(S_3) = \mathbf{F}_3^{-1}(r_Q(S_3)) = r_Q(S_3)/3 = 84/3 = 28$, *ενώ* $\mathcal{P}_Q(S_1) = \mathbf{F}_1^{-1}(r_Q(S_1)) = r_Q(S_1) = 28$ *και* $\mathcal{P}_Q(S_2) = \mathbf{F}_2^{-1}(r_Q(S_2)) = 2\, r_Q(S_2) = 2 \cdot 14 = 28$. *Επομένως, ισχύει ότι* $\mathcal{P}_Q(S_3) \geq \mathcal{P}_Q(S_1)$ *και* $\mathcal{P}_Q(S_3) \geq \mathcal{P}_Q(S_2)$. *Συνεπάγεται ότι η ακμή* e_1 *είναι κορεσμένη ακμή μέγιστης προτεραιότητας για τη σύνοδο* S_3 *στην κατάσταση* Q.

Ενθαρρύνουμε τον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι η ακμή e_1 *είναι επίσης κορεσμένη ακμή μέγιστης προτεραιότητας για τις συνόδους* S_1 *και* S_2 *στην* Q *και ότι δεν υπάρχει κορεσμένη ακμή μέγιστης προτεραιότητας για τη σύνοδο* S_4 *στην κατάσταση* Q.

Τονίζουμε ότι ο ορισμός της κορεσμένης ακμής μέγιστης προτεραιότητας για μια σύνοδο γενικεύει τον ορισμό μιας κορεσμένης ακμής μέγιστου ρυθμού μετάδοσης, για την περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε:

Θεώρημα 11.1 *Έστω ότι ο* Alg *είναι αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων. Τότε, για κάθε προσεγγίσιμη τελική κατάσταση Q του* Alg*, υπάρχει, για κάθε σύνοδο S, μια κορεσμένη ακμή μέγιστης προτεραιότητας για την S στην κατάσταση Q.*

Απόδειξη: Έστω ότι η Q είναι τελική κατάσταση σε μια εκτέλεση α του Alg και S μια οποιαδήποτε σύνοδος. Εφόσον η Q είναι τελική κατάσταση, ισχύει ότι $S \in \mathcal{D}_Q$. Επομένως, υπάρχει κάποια κατάσταση Q_{l_0} στην εκτέλεση α τέτοια ώστε $Q_0 \xrightarrow{\alpha} Q_{l_0} \xrightarrow{\alpha} Q$ και $S \in \mathsf{Term}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q_{l_0})$. Δηλαδή, η σύνοδος S απενεργοποιείται στην κατάσταση Q_{l_0} και άρα $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l_0+1}}$.

Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων, υπάρχει κάποια ακμή $e \in E$ τέτοια ώστε η S χρησιμοποιεί την e, και ισχύουν τα ακόλουθα: *(i)* η e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την Q_{l_0} και *(ii)* $\mathcal{P}_{Q_{l_0}}(S) = PS_{Q_{l_0}}(e)$. Θα δείξουμε ότι η ακμή e ικανοποιεί τις συνθήκες (1) και (2) του ορισμού μιας κορεσμένης ακμής μέγιστης προτεραιότητας για τη σύνοδο S στην κατάσταση Q. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας τη συνθήκη (1).

Λήμμα 11.4 *Έστω μια οποιαδήποτε σύνοδος $i \in sessions(e)$. Τότε, $\mathcal{P}_Q(S) \geq \mathcal{P}_Q(S_i)$.*

Απόδειξη: Εξετάζουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

1. Υποθέτουμε αρχικά ότι $i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}$.

   Συμβολίζουμε με Q_l την τελευταία κατάσταση στην εκτέλεση α που είναι τέτοια ώστε $\mathcal{A}_{Q_l} \mid e \neq \emptyset$. Δηλαδή, η Q_l είναι η τελευταία κατάσταση στην εκτέλεση α για την οποία η ακμή e παραμένει ενεργή στην Q_l. Προφανώς, εφόσον η Q είναι τελική κατάσταση με $\mathcal{A}_Q = \emptyset$ έχουμε $Q_l \xrightarrow{\alpha} Q$.

   Επίσης, ισχύει ότι $S \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l+1}}) \mid e$ και $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l+1}}) \mid e$. Άρα, η Πρόταση 11.2 (3) υποδηλώνει ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S) = PS_{Q_{l_0}}(e)$ και $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) = PS_{Q_{l_0}}(e)$, έτσι ώστε $\mathcal{P}_{Q_l}(S) = \mathcal{P}_{Q_l}(S_i)$.

   Εξ ορισμού της Q_l, δε συμβαίνουν περαιτέρω αλλαγές στις προτεραιότητες των συνόδων που χρησιμοποιούν την e σε καμιά κατάσταση που έπεται της Q_l. Εφόσον $Q_l \xrightarrow{\alpha} Q$, προκύπτει ότι $\mathcal{P}_Q(S) = \mathcal{P}_Q(S_i)$, όπως απαιτείται.

2. Υποθέτουμε τώρα ότι $i \notin \mathcal{A}_{Q_{l_0}}$.

   Συμβολίζουμε με $Q_{l'}$ την κατάσταση για την οποία $i \in \mathsf{Term}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q_{l'})$. Προφανώς, $Q_{l'} \xrightarrow{\alpha} Q_{l_0}$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων, υπάρχει μια ακμή $e' \in E$ τέτοια ώστε η σύνοδος S_i χρησιμοποιεί την e' και ισχύουν τα εξής: *(i)* η ακμή e' είναι ακμή συμφόρησης πρεοτεραιότητας για την $Q_{l'}$ και *(ii)*

$$\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i) \ = \ PS_{Q_{l'}}(e').$$

   Από τον ορισμό των αλγορίθμων συμφόρησης προτεραιοτήτων είναι

$$PS_{Q_{l'}}(e') \ = \ MPS_{Q_{l'}}(S_i).$$

   Εφόσον η σύνοδος i χρησιμοποιεί την ακμή e, συνεπάγεται ότι

$$PS_{Q_{l'}}(e') \ \leq \ PS_{Q_{l'}}(e).$$

   Εφόσον $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, η ακμή e είναι ενεργή στην κατάσταση Q_{l_0}. Συνεπώς, από την Πρόταση 11.1, προκύπτει ότι

$$PS_{Q_{l'}}(e) \ \leq \ PS_{Q_{l_0}}(e).$$

   Εφόσον $i \in \mathsf{Term}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q_{l'})$ και $Q_{l'} \xrightarrow{\alpha} Q$, είναι

$$\mathcal{P}_{Q}(S_i) \ = \ \mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i).$$

   Επομένως,

$$\mathcal{P}_{Q}(S_i) \ \leq \ PS_{Q_{l_0}}(e).$$

Επειδή $S \in \mathsf{Term}(\langle G, \mathcal{S}\rangle, Q_{l_0})$ και $Q_{l_0} \xrightarrow{\alpha} Q$, ισχύει ότι

$$\mathcal{P}_Q(S) \;=\; \mathcal{P}_{Q_{l_0}}(S)\,.$$

Αφού $\mathcal{P}_{Q_{l_0}}(S) = PS_{Q_{l_0}}(e)$, προκύπτει ότι

$$\mathcal{P}_Q(S_i) \;\leq\; \mathcal{P}_Q(S)\,,$$

όπως απαιτείται.

■

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της συνθήκης (2).

Λήμμα 11.5 *Η ακμή e είναι κορεσμένη στην κατάσταση Q.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την τελευταία κατάσταση Q_l στην εκτέλεση α, για την οποία η e παραμένει ενεργή στην Q_l. Η Πρόταση 11.2 (3) υποδηλώνει ότι για κάθε σύνοδο $i \in (\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \setminus \mathcal{A}_{Q_{l+1}}) \mid e = \mathcal{A}_{Q_{l_0}}$, ισχύει ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) = PS_{Q_{l_0}}(e)$. Επομένως, από το Λήμμα 10.2 (1), προκύπτει ότι η ακμή e είναι κορεσμένη στην Q_l. Ωστόσο, εξ ορισμού της Q_l, δεν συμβαίνει καμιά αλλαγή στους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων που χρησιμοποιούν την e σε καμιά κατάσταση που έπεται της Q_l. Εφόσον $Q_l \xrightarrow{\alpha} Q$, η ακμή e παραμένει κορεσμένη ως την Q, όπως απαιτείται. ■

Από τα Λήμματα 11.4 και 11.5, προκύπτει ότι η ακμή e είναι κορεσμένη ακμή μέγιστης προτεραιότητας για τη σύνοδο S στην κατάσταση Q, όπως απαιτείται. ■

Παρατηρούμε ότι η Πρόταση 11.1 γενικεύει την Πρόταση 3.1, για την περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων.

11.5.2 Έξοδος Αλγορίθμων Συμφόρησης Προτεραιοτήτων

Αποδεικνύουμε ότι το διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης εξόδου κάθε αλγορίθμου συμφόρησης προτεραιοτήτων είναι το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων.

Θεώρημα 11.2 *Έστω ότι ο* Alg *είναι αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων. Τότε, για κάθε προσεγγίσιμη τελική κατάσταση Q του* Alg *ισχύει ότι το διάνυσμα $\mathbf{r}_Q$ είναι το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι το $\mathbf{r}_Q$ *δεν* είναι το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων. Από τον ορισμό του διανύσματος αυτού, προκύπτει ότι υπάρχει κάποια σύνοδος S_i τέτοια ώστε είναι δυνατή η αύξηση του $r_Q(S_i)$, διατηρώντας την υπόθεση εφικτότητας του διανύσματος, χωρίς να προκαλείται η μείωση του ρυθμού μετάδοσης $r_Q(S_j)$ για κάποια σύνοδο S_j τέτοια ώστε $\mathcal{P}_Q(S_j) \leq \mathcal{P}_Q(S_i)$.

Συνεπώς, θεωρούμε μια αύξηση στον $r_Q(S_i)$. Θα καταλήξουμε σε αντίφαση αποδεικνύοντας ότι είναι απαραίτητο να συμβεί κάποια μείωση στον $r_Q(S_j)$, για κάποια σύνοδο S_j τέτοια ώστε $\mathcal{P}_Q(S_j) \leq \mathcal{P}_Q(S_i)$.

Το Θεώρημα 11.1 υποδηλώνει ότι υπάρχει μια κορεσμένη ακμή μέγιστης προτεραιότητας e για τη σύνοδο S_i στην κατάσταση Q. Εφόσον η e είναι κορεσμένη στην Q, ενώ ταυτόχρονα μια αύξηση στον $r_Q(S_i)$ είναι δυνατή, θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μια σύνοδος S_j, διαφορετική από την S_i, που να χρησιμοποιεί την ακμή e και της οποίας ο ρυθμός μετάδοσης να χρειάζεται να μειωθεί προκειμένου να μην παραβιαστεί η συνθήκη χωρητικότητας για την e. Επίσης, εφόσον η e είναι κορεσμένη ακμή μέγιστης προτεραιότητας για την S_i στην Q και η S_j χρησιμοποιεί την e ισχύει ότι $\mathcal{P}_Q(S_j) \leq \mathcal{P}_Q(S_i)$, το οποίο ολοκληρώνει την αντίφαση. ∎

Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα 11.2 αποτελεί γενίκευση, για την περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων, του κλασικού αποτελέσματος ότι όλοι οι αλγόριθμοι συμφόρησης συγκλίνουν στο δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου (Πρόταση 4.5).

Κεφάλαιο 12

Οπτιμιστικοί Αλγόριθμοι Προτεραιοτήτων

Σε αυτό το κεφάλαιο, επικεντρώνουμε την προσοχή μας στο οπτιμιστικό μοντέλο. Στην Ενότητα 12.1, παρουσιάζουμε την πράξη ενημέρωσης προτεραιοτήτων πάνω στην οποία έχουν χτιστεί οι οπτιμιστικοί αλγόριθμοι προτεραιοτήτων. Στην Ενότητα 12.2, περιγράφουμε και αποδεικνύουμε επιπρόσθετες ιδιότητες των ακμών ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας για τους οπτιμιστικούς αλγόριθμους συμφόρησης προτεραιοτήτων. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες αυτές για να αποδείξουμε ιδιότητες τερματισμού των οπτιμιστικών αλγορίθμων συμφόρησης προτεραιοτήτων στην Ενότητα 12.3. Συγκεκριμμένοι τέτοιοι αλγόριθμοι, οι οποίοι βασίζουν την πολυπλοκότητα σύγκλισής τους στις ιδιότητες αυτές, περιγράφονται στην Ενότητα 12.4.

12.1 Η Πράξη Ενημέρωσης Προτεραιοτήτων

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε την πράξη ενημέρωσης προτεραιοτήτων, η οποία είναι η γενίκευση της κλασικής πράξης ενημέρωσης. Μιλώντας άτυπα, η πράξη ενημέρωσης προτεραιοτήτων καθορίζει μια αύξηση στην προτεραιότητα της συνόδου προς δρομολόγηση. Η αύξηση είναι τέτοια ώστε η σύνοδος προς δρομολόγηση γίνεται η σύνοδος με την μεγαλύτερη προτεραιότητα πάνω σε κάποια συγκεκριμμένη ακμή του δικτύου.

Παρουσιάζουμε αρχικά μια αφηρημένη μαθηματική συνάρτηση.

Η Συνάρτηση Ενημέρωσης Προτεραιοτήτων PUpdate

Έστω $m \geq 2$ ένας ακέραιος. Η *συνάρτηση ενημέρωσης προτεραιοτήτων*, η οποία συμβολίζεται ως pupdate, έχει τρία ορίσματα εισόδου, ένα διάνυσμα $\mathbf{r} \in \Re^m$, έναν ακέραιο $i \in [m]$ και έναν πραγματικό αριθμό $c \in \Re$, τέτοια ώστε $\|\mathbf{r}\|_1 \leq c$. Η συνάρτηση ενημέρωσης προτεραιοτήτων επιστρέφει ως έξοδο ένα ζεύγος $\langle \mathbf{r}', \Delta \rangle = \texttt{pupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$, που αποτελείται από ένα διάνυσμα $\mathbf{r}'$ και έναν πραγματικό αριθμό $\Delta \geq 0$. Για το ζεύγος αυτό ισχύουν τα εξής:

(1) $\|\mathbf{r}'\|_1 = c$,

(2) $r'_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{F}_i^{-1}(r_i) + \Delta)$,

(3) για κάθε $l \in [m]$, $l \neq i$, αν $\mathbf{F}_l^{-1}(r_l) \leq \mathbf{F}_i^{-1}(r_i) + \Delta$, τότε $r'_l = r_l$,

(4) για κάθε $l \in [m]$, $l \neq i$, αν $\mathbf{F}_l^{-1}(r_l) > \mathbf{F}_i^{-1}(r_i) + \Delta$, τότε $r'_l = \mathbf{F}_l(\mathbf{F}_i^{-1}(r_i) + \Delta)$.

Εάν $\langle \mathbf{r}', \Delta \rangle = \texttt{pupdate}(\langle \mathbf{r}, i, c \rangle)$, ονομάζουμε το διάνυσμα $\mathbf{r}'$ *ανασχηματιστικό διάνυσμα προτεραιοτήτων* για την τριάδα $\langle \mathbf{r}, i, c \rangle$ που αντιστοιχεί στην *ανασχηματιστική αύξηση προτεραιοτήτων* Δ. Διαισθητικά, ένα ανασχηματιστικό διάνυσμα προτεραιοτήτων προκαλεί τον "κορεσμό" του c (συνθήκη (1)) αυξάνοντας το στοιχείο r_i στην εικόνα του, όπως προκύπτει από τη συνάρτηση ανάθεσης προτεραιοτήτων $\mathbf{F}_i$, όταν η αντίστοιχη προτεραιότητα αυξάνεται κατά Δ (συνθήκη (2)). Επιπλέον, τα στοιχεία των οποίων η τιμή δεν ξεπερνά την προτεραιότητα του προς αύξηση στοιχείου δεν επηρεάζονται (συνθήκη (3)), ενώ το ανασχηματιστικό διάνυσμα διατηρεί κατά μια έννοια τη "δικαιοσύνη", αφού επιπρόσθετα κανένα στοιχείο με μεγαλύτερη προτεραιότητα από την προτεραιότητα του προς αύξηση στοιχείου δεν απομένει στο ανασχηματιστικό διάνυσμα (συνθήκη (4)).

Τονίζουμε ότι ο ορισμός της συνάρτησης ενημέρωσης προτεραιοτήτων χρησιμοποιεί άμεσα τις συναρτήσεις ανάθεσης προτεραιοτήτων $\mathbf{F}_i$, $1 \leq i \leq n$.

Αυξήσεις Προτεραιοτήτων

Για κάθε σύνοδο S_i, η *αύξηση προτεραιοτήτων της* S_i *στην κατάσταση* Q, *η οποία επιβάλλεται από την ακμή* $e \in S_i$ και συμβολίζεται $\Delta_Q(i, e)$, είναι είτε 0 αν η σύνοδος S_i δεν είναι ενεργή στην κατάσταση Q, ή είναι ίση με την ανασχηματιστική αύξηση προτεραιοτήτων για την τριάδα $\langle \mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid e, i, cap(e) - allot_Q(e) \rangle$. Δηλαδή, η $\Delta_Q(i, e)$ είναι ο πραγματικός αριθμός $\Delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$\langle \mathbf{r}', \Delta \rangle \quad = \quad \texttt{pupdate}(\langle \mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid e, i, cap(e) - allot_Q(e) \rangle)\,,$$

για κάποιο διάνυσμα $\mathbf{r}'$. (Παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της συνάρτησης ενημέρωσης προτεραιοτήτων, το διάνυσμα $\mathbf{r}'$ είναι "συμβατό" με το $\mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid e$. Συνεπώς, περιέχει μόνο στοιχεία που αντιστοιχούν σε συνόδους ενεργές στην κατάσταση Q, οι οποίες χρησιμοποιούν την ακμή e.) Πιο λεπτομερειακά, η $\Delta_Q(i, e)$ είναι η *μοναδική* δυνατή αύξηση στην προτεραιότητα της συνόδου S_i στην κατάσταση Q, που καθιστά την ακμή e κορεσμένη, ενώ ταυτόχρονα μειώνει τους ρυθμούς μετάδοσης άλλων συνόδων, που επίσης χρησιμοποιούν την ακμή e και των οποίων οι προτεραιότητες είναι μεγαλύτερες από την αυξημένη τιμή της προτεραιότητας της συνόδου S_i, ενώ δεν επηρεάζει καθόλου τους ρυθμούς μετάδοσης των ενεργών συνόδων με μικρότερη προτεραιότητα, που χρησιμοποιούν την ακμή e και φυσικά ούτε τις απενεργοποιημένες συνόδους που διατρέχουν την ακμή ή οποιαδήποτε άλλη σύνοδο του δικτύου που δεν διατρέχει την e. Διαισθητικά, η $\Delta_Q(i, e)$ είναι το μέγιστο ποσό κατά το οποίο θα μπορούσε να αυξηθεί ο $r_Q(S_i)$ με "δίκαιο" τρόπο αν η ακμή e ήταν η μοναδική ακμή "περιορισμού" της S_i.

Η *αύξηση προτεραιοτήτων για την* S_i *στην κατάσταση* Q, η οποία συμβολίζεται $\Delta_Q(i)$, είναι είτε 0 αν η S_i δεν είναι ενεργή στην κατάσταση Q, ή η *ελάχιστη* τιμή πάνω σε κάθε ακμή $e \in S_i$, της αύξησης προτεραιοτήτων που επιβάλλεται από την e στην κατάσταση Q. Δηλαδή,

$$\Delta_Q(i) \quad = \quad \min_{e \in S_i} \Delta_Q(i, e)\,.$$

Επομένως, υποθέτοντας ότι η S_i είναι ενεργή στην Q, η $\Delta_Q(i)$ είναι η ελάχιστη μεταξύ όλων των δυνατών αυξήσεων προτεραιοτήτων του ρυθμού μετάδοσης της S_i, που επιβάλλονται από τις ακμές που χρησιμοποιεί.

Εφόσον ο ρυθμός μετάδοσης της S_i μπορεί να αυξηθεί μόνο αν η αύξηση είναι δυνατή, χωρίς να παραβιαστεί η συνθήκη εφικτότητας, πάνω σε κάθε ακμή την οποία διατρέχει, προκύπτει ότι η $\Delta_Q(i)$ είναι η *μέγιστη* δυνατή αύξηση στο ρυθμό μετάδοσης της S_i στην κατάσταση Q που διατηρεί τη συνθήκη εφικτότητας. Παρατηρούμε ότι η $\Delta_Q(i)$ μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση πληροφορίας που είναι “τοπική” στη σύνοδο S_i.

Πράξη `PUpdate`

Μιλώντας άτυπα, η πράξη ενημέρωσης προτεραιοτήτων ορίζει μια “διαδικασία” για τον υπολογισμό νέων ρυθμών μετάδοσης για ένα σύνολο από συνόδους, ως συνάρτηση των παλιών ρυθμών μετάδοσης και των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων. Πιο λεπτομερειακά, μια *πράξη ενημέρωσης προτεραιοτήτων* είναι ένα σύνολο στιγμιοτύπων της συνάρτησης ενημέρωσης προτεραιοτήτων. Τα στιγμιότυπα αυτά αναφέρονται σε κάποιο συγκεκριμμένο δείκτη i και σε κάποια συγκεκριμμένη κατάσταση Q και προηγούνται του υπολογισμού των νέων ρυθμών μεταδόσης για κάποιες συνόδους. Σε μια πράξη ενημέρωσης προτεραιοτήτων πάνω στη σύνοδο S_i, κάθε ακμή e που χρησιμοποιείται από την S_i συσχετίζεται με ένα στιγμιότυπο της συνάρτησης ενημέρωσης προτεραιοτήτων. Στο στιγμιότυπο της συνάρτησης ενημέρωσης προτεραιοτήτων που έχει συσχετιστεί με την ακμή e, η $\Delta_Q(i,e)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\langle \mathbf{r}', \Delta_Q(i,e)\rangle \quad = \quad \texttt{pupdate}(\langle \mathbf{r}_{\mathcal{A}_Q} \mid e, i, cap(e) - allotQ(e)\rangle)\,.$$

Τελικά, οι νέοι ρυθμοί μετάδοσης για τη σύνοδο S_i και για τις ενεργές συνόδους που μοιράζονται ακμές με την S_i υπολογίζονται ως εξής:

(1) $r(S_i) := \mathbf{F}_i(\mathbf{F}_i^{-1}(r(S_i)) + \Delta_Q(i))$,

(2) για κάθε δείκτη $l \in \mathcal{A}_Q$, $l \neq i$, τέτοιον ώστε $S_l \cap S_i \neq \emptyset$, ισχύει ότι

$$r(S_l) \quad := \quad \min\{r(S_l), \mathbf{F}_i(\mathbf{F}_i^{-1}(r(S_i)) + \Delta_Q(i))\}\,.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στιγμιότυπο της συνάρτησης ενημέρωσης προτεραιοτήτων υπολογίζει μια αύξηση $\Delta_Q(i,e)$, η οποία καθιστά την ακμή e κορεσμένη (με βάση τον ορισμό της συνάρτησης ενημέρωσης προτεραιοτήτων). Ωστόσο, μια αύξηση κατά $\Delta_Q(i)$ πάνω σε κάθε ακμή e που χρησιμοποιείται από την S_i, δεν είναι εξ ορισμού της $\Delta_Q(i)$, μεγαλύτερη (ενώ μπορεί να είναι μικρότερη) από την αύξηση $\Delta_Q(i,e)$ που καθιστά την ακμή κορεσμένη. Επομένως, οι τελικοί ρυθμοί μετάδοσης που υπολογίζονται δεν καθιστούν κορεσμένες όλες τις ακμές τις οποίες διατρέχει η S_i.

Παράδειγμα 12.1 *Θεωρούμε και πάλι το δίκτυο του Σχήματος 3-1. Υποθέτουμε επίσης ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις που έγιναν στο Παράδειγμα 11.1 για τις συναρτήσεις ανάθεσης προτεραιοτήτων.*

Θεωρούμε την αρχική κατάσταση Q_0 και υποθέτουμε ότι η S_1 είναι η πρώτη σύνοδος προς δρομολόγηση. Εφόσον όλες οι προτεραιότητες των συνόδων είναι αρχικά 0, ο ρυθμός μετάδοσης της S_1 και επομένως και η προτεραιότητά της, μπορεί να αυξηθεί σε μια τιμή που καθιστά την ακμή e_1, την μοναδική ακμή που χρησιμοποιείται από την S_1, κορεσμένη. Ο αναγνώστης θα πρέπει να μπορεί εύκολα να επαληθεύσει ότι $\Delta_{Q_0}(1,e_1) = 126$, έτσι ώστε $\Delta_{Q_0}(1) = \Delta_{Q_0}(1,e_1) = 126$. Συνεπώς, $\mathcal{P}_{Q_0}(S_1) = \mathcal{P}_{Q_0}(S_1) + \Delta_{Q_0}(1) = 0 + 126 = 126$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $r_{Q_1}(S_1) = \mathbf{F}_1(\mathcal{P}_{Q_1}(S_1)) = \mathcal{P}_{Q_1}(S_1) = 126$. Εφόσον οι ρυθμοί μετάδοσης όλων των άλλων συνόδων είναι αρχικά 0, η συνθήκη (2) υποδηλώνει ότι εξακολουθούν να είναι μηδέν στην κατάσταση Q_1. Παρατηρούμε επίσης ότι η ανάθεση ρυθμών μετάδοσης στην Q_1 καθιστά την ακμή e_1 κορεσμένη.

Υποθέτουμε τώρα ότι η σύνοδος S_2 δρομολογείται στη συνέχεια. Υπενθυμίζουμε ότι η S_2 χρησιμοποιεί την ακμή e_1, η οποία είναι κορεσμένη στην κατάσταση Q_1. Συνεπώς, οποιαδήποτε αύξηση στην προτεραιότητα της S_2 που επιβάλλεται από την e_1, θα προκαλέσει απαραίτητα τη μείωση της προτεραιότητας της S_1 στην ίδια τιμή με εκείνη της S_2, ενώ η ακμή e_1 θα παραμείνει κορεσμένη. Μπορεί να επαληθευθεί εύκολα ότι η αύξηση $\Delta_{Q_1}(2,e_1) = 84$ ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες. Εφόσον η σύνοδος S_2 δεν χρησιμοποιεί καμιά άλλη ακμή εκτός από την e_1, προκύπτει ότι $\Delta_{Q_1}(1) = 84$, έτσι ώστε $\mathcal{P}_{Q_2}(S_1) = 84$. Επίσης, $r_{Q_2}(S_2) = \mathbf{F}_2(\mathcal{P}_{Q_2}(S_2)) = \mathcal{P}_{Q_2}(S_2)/2 = 84/2 = 42$, ενώ $r_{Q_2}(S_1) = \mathbf{F}_1(\mathcal{P}_{Q_1}(S_1)) = \mathcal{P}_{Q_1}(S_1) = 84$. Προ-

φανώς, $r_{Q_2}(S_1) + r_{Q_2}(S_2) + r_{Q_2}(S_3) = 84 + 42 + 0 = 126$*. Εφόσον* $cap(e_1) = 126$*, προκύπτει ότι η ακμή* e_1 *εξακολουθεί να είναι κορεσμένη στην κατάσταση* Q_2*.*

Υποθέτουμε τελικά ότι η σύνοδος S_3 *δρομολογείται στη συνέχεια. Μπορεί να επαληθευθεί εύκολα ότι η αύξηση προτεραιοτήτων για την* S_3 *στην κατάσταση* Q_2 *που επιβάλλεται από την ακμή* e_1*, είναι* $\Delta_{Q_2}(3, e_1) = 28$ *και ότι η αύξηση προτεραιοτήτων για την* S_3 *στην κατάσταση* Q_2 *που επιβάλλεται από την ακμή* e_2*, είναι* $\Delta_{Q_2}(3, e_2) = 100/3 > 28$*. Συνεπώς,* $\Delta_{Q_2}(3) = 28$*, το οποίο υποδηλώνει ότι* $\mathcal{P}_{Q_3}(S_3) = 28$*, ενώ οι προτεραιότητες των συνόδων* S_1 *και* S_2 *μειώνονται επίσης στην τιμή* 28 *στην κατάσταση* Q_3*. Συνεπώς,* $r_{Q_3}(S_1) = \mathbf{F}_1(\mathcal{P}_{Q_3}(S_1)) = \mathcal{P}_{Q_3}(S_1) = 28$*,* $r_{Q_3}(S_2) = \mathbf{F}_2(\mathcal{P}_{Q_3}(S_2)) = \mathcal{P}_{Q_3}(S_2)/2 = 28/2 = 14$ *και* $r_{Q_3}(S_3) = \mathbf{F}_3(\mathcal{P}_{Q_3}(S_3)) = \mathcal{P}_{Q_3}(S_3) = 84$*. Άρα,* $r_{Q_3}(S_1) + r_{Q_3}(S_2) + r_{Q_3}(S_3) = 28 + 14 + 84 = 126$*. Εφόσον* $cap(e_1) = 126$*, ισχύει ότι η ακμή* e_1 *εξακολουθεί να είναι κορεσμένη στην κατάσταση* Q_3*.*

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό `pupdate`, δηλαδή το συμβολισμό για τη συνάρτηση ενημέρωσης προτεραιοτήτων, για να δηλώνουμε επίσης την πράξη ενημέρωσης προτεραιοτήτων.

Για έναν *οπτιμιστικό αλγόριθμο προτεραιοτήτων* υποθέτουμε ότι `operation = pupdate`. Δηλαδή, ένας οπτιμιστικός αλγόριθμος χρησιμοποιεί την (οπτιμιστική) πράξη ενημέρωσης προτεραιοτήτων για να προσαρμόζει τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων και τις προτεραιότητές τους. Εφόσον η πράξη ενημέρωσης προτεραιοτήτων σέβεται τη συνθήκη χωρητικότητας, η Πρόταση 10.1 υποδηλώνει άμεσα ότι το ισομερίδιο προτεραιότητας ορίζεται μοναδικά σε οποιαδήποτε εκτέλεση ενός οπτιμιστικού αλγόριθμου προτεραιοτήτων.

12.2 Ιδιότητες Ακμών Ελάχιστου Ισομεριδίου Προτεραιοτήτων

Σε αυτήν την ενότητα, αποδεικνύουμε ότι οι οπτιμιστικοί αλγόριθμοι συμφόρησης προτεραιοτήτων, επιτρέπουν στις ακμές ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας να απολαμβάνουν επιπρόσθετες, ενδιαφέρουσες συνδυαστικές ιδιότητες.

Ιδιότητα Σταθερότητας

Αποδεικνύουμε αρχικά μια ιδιότητα "σταθερότητας" για κάθε ακμή που γίνεται ακμή ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας κατά τη διάρκεια εκτέλεσης ενός οπτιμιστικού αλγορίθμου συμφόρησης προτεραιοτήτων.

Πρόταση 12.1 *Υποθέτουμε ότι ο* Alg *είναι ένας οπτιμιστικός αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων. Για κάθε ακέραιο $l_0 \geq 0$, έστω μια οποιαδήποτε ακμή $e \in MPSE_{Q_{l_0}}$. Θεωρούμε μια σύνοδο $S_i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$ τέτοια ώστε $\mathcal{P}_{Q_{l_0}}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$. Τότε, για κάθε ακέραιο $l \geq l_0$, ισχύει ότι*

$$\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \quad \geq \quad PS_{Q_{l_0}}(e)\,.$$

Η Πρόταση 12.1 εξετάζει τις ενεργές συνόδους που χρησιμοποιούν μια ακμή ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας. Μιλώντας άτυπα, η πρόταση αποδεικνύει ότι δεν είναι δυνατό να μειωθεί η προτεραιότητα μιας συνόδου κάτω από το ισομερίδιο προτεραιότητας της ακμής αυτής εάν αρχικά η προτεραιότητα της συνόδου ήταν μεγαλύτερη ή ίση αυτού του ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας. Ακολουθεί η απόδειξη.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο l. Για τη βάση της επαγωγής, όπου $l = l_0$, ο ισχυρισμός ισχύει από υπόθεση.

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι, για κάθε ακέραιο $l > l_0$, ισχύει ότι $\mathcal{P}_{Q_{l-1}}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$. Για το επαγωγικό βήμα, αποδεικνύουμε ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$.

Υποθέτουμε αρχικά ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \geq \mathcal{P}_{Q_{l-1}}(S_i)$. Δηλαδή, η προτεραιότητα της συνόδου S_i δε μειώνεται μεταξύ των καταστάσεων Q_{l-1} και Q_l. Από την επαγωγική υπόθεση επομένως, συνεπάγεται ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$, όπως απαιτείται.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) < \mathcal{P}_{Q_{l-1}}(S_i)$. Δηλαδή, η προτεραιότητα της συνόδου S_i μειώνεται από την κατάσταση Q_{l-1} στην Q_l. Εξ ορισμού της πράξης ενημέρωσης προτεραιοτήτων ισχύει ότι η σύνοδος S_i μοιράζεται μια ακμή με τη σύνοδο S_{i_l}, η οποία είναι η σύνοδος που δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση Q_l.

Έστω ότι η e' είναι μια ακμή τέτοια ώστε $\Delta_{Q_{l-1}}(i_l) = \Delta_{Q_{l-1}}(i_l, e')$. Μιλώντας άτυπα, η ακμή e' επιβάλλει την ελάχιστη ανασχηματιστική αύξηση στη σύνοδο S_{i_l} στην κατάσταση Q_{l-1}, μεταξύ όλων των ακμών που χρησιμοποιούνται από την S_{i_l}. Συνεχίζουμε με το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 12.1 $\mathcal{P}_{Q_l}(i_l) \geq PS_{Q_l}(e')$

Απόδειξη: Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(i_l) < PS_{Q_l}(e')$.

Εξ ορισμού της πράξης ενημέρωσης προτεραιοτήτων, η ακμή e' είναι κορεσμένη στην Q_l. Επίσης, για κάθε δείκτη συνόδου $k \in \mathcal{A}_{Q_l} \mid e'$, ισχύει ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(i_l) \geq \mathcal{P}_{Q_l}(k)$. Συνεπώς, $PS_{Q_l}(e') > \mathcal{P}_{Q_l}(k)$. Άρα, το Λήμμα 10.2 (2) υποδηλώνει ότι η ακμή e' δεν είναι κορεσμένη στην Q_l. Άτοπο. ■

Εξ ορισμού της πράξης ενημέρωσης προτεραιοτήτων είναι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) = \mathcal{P}_{Q_l}(i_l)$. Συνεπώς, το Λήμμα 12.1 υποδηλώνει ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \geq PS_{Q_l}(e')$. Από την Πρόταση 11.1 προκύπτει ότι $PS_{Q_l}(e') \geq PS_{Q_{l_0}}(e')$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e')$. Εφόσον $e \in MPSE_{Q_{l_0}}$, έχουμε $PS_{Q_{l_0}}(e') \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$. Επομένως, $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$, όπως απαιτείται. ■

Παρατηρούμε ότι η Πρόταση 12.1 γενικεύει την Πρόταση 6.1, για την περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων.

Ιδιότητα Ύπαρξης

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια μια ιδιότητα "ύπαρξης" για κάθε ακμή που γίνεται ακμή ελάχιστου ισομεριδίου κατά τη διάρκεια εκτέλεσης ενός οπτιμιστικού αλγορίθμου συμφόρησης προτεραιοτήτων.

Πρόταση 12.2 *Έστω ότι ο* Alg *είναι ένας οπτιμιστικός αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων. Για κάθε ακέραιο $l_0 \geq 0$, έστω μια ακμή $e \in MPSE_{Q_{l_0}}$ τέτοια ώστε $\widehat{l_0} \mid e < \infty$. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε σύνοδο $S_i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$. Τότε, για κάθε ακέραιο $l \geq \widehat{l_0} \mid e$, ισχύει ότι*

$$\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \quad \geq \quad PS_{Q_{l_0}}(e).$$

Μιλώντας άτυπα, θεωρούμε μια οποιαδήποτε σύνοδο που χρησιμοποιεί μια ακμή ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας. Αποδεικνύουμε ότι η προτεραιότητά της δε μειώνεται κάτω από το ισομερίδιο προτεραιότητας αυτό, αφότου όλες οι σύνοδοι που χρησιμοποιούν την ακμή έχουν δρομολογηθεί τουλάχιστον μία φορά. Παραθέτουμε στη συνέχεια την απόδειξη.

Απόδειξη: Αρχικά, παρουσιάζουμε άτυπα τα βασικά σημεία της απόδειξης. Θεωρούμε την κατάσταση της εκτέλεσης που ακολουθεί την Q_{l_0}, μπροστά από την οποία η σύνοδος S_i δρομολογείται. Προφανώς, αυτή η κατάσταση προηγείται εκείνης στην οποία όλες οι σύνοδοι έχουν δρομολογηθεί τουλάχιστον μια φορά. Αποδεικνύουμε ότι σε αυτό το σημείο, η προτεραιότητα της συνόδου S_i δεν είναι μικρότερη από το ισομερίδιο προτεραιότητας της ακμής e στην κατάσταση Q_{l_0}. Επιχειρηματολογούμε επίσης ότι η ακμή e εξακολουθεί να είναι μια ακμή ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας μετά την Q_{l_0}. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα σταθερότητας των ακμών ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας, που περιγράφεται στην Πρόταση 12.1, προκειμένου να συμπεράνουμε ότι η προτεραιότητα της συνόδου S_i θα παραμείνει και στη συνέχεια μεγαλύτερη ή ίση του ισομεριδίου προτεραιότητας της ακμής e στην Q_{l_0}. Παρουσιάζουμε τώρα τις λεπτομέρειες της απόδειξης.

Εφόσον $e \in MPSE_{Q_{l_0}}$, το Λήμμα 11.2 υποδηλώνει ότι η ακμή e είναι μια ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την κατάσταση Q_{l_0}. Εφόσον $S_i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, προκύπτει, από τον ορισμό του $\widehat{l_0} \mid e$, ότι υπάρχει ένας ελάχιστος δείκτης l', $l_0 < l' \leq \widehat{l_0} \mid e$, τέτοιος ώστε η σύνοδος S_i δρομολογείται μπροστά από την κατάσταση $Q_{l'}$. Εφόσον η S_i είναι ενεργή στην κατάσταση Q_{l_0}, συνεπάγεται, από τον ορισμό της εκτέλεσης, ότι η S_i είναι ενεργή στην $Q_{l'}$. Εφόσον η S_i χρησιμοποιεί την ακμή e, η e είναι ενεργή στην $Q_{l'}$. Από την Πρόταση 11.2 (1), προκύπτει ότι $PS_{Q_{l'}}(e) = PS_{Q_{l_0}}(e)$, ενώ λόγω της Πρότασης 11.2 (2) έχουμε ότι η e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την $Q_{l'}$. Αποδεικνύουμε στη συνέχεια το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 12.2 $\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i) < PS_{Q_{l_0}}(e)$. Έστω ότι η e' είναι μια ακμή τέτοια ώστε $\Delta_{\overleftarrow{Q_{l'}}}(S_i) = \Delta_{\overleftarrow{Q_{l'}}}(S_i, e')$. Μιλώντας άτυπα, η ακμή e' επιβάλλει την ελάχιστη ανασχηματιστική αύξηση προτεραιοτήτων στη σύνοδο S_i στην κατάσταση $Q_{l'}$, μεταξύ όλων των ακμών που χρησιμοποιούνται από την S_i. Από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης προτεραιοτήτων συνεπάγεται ότι η ακμή e' είναι κορεσμένη στην κατάσταση $Q_{l'}$.

Εφόσον η e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την $Q_{l'}$ και η S_i χρησιμοποιεί και τις δύο ακμές e και e', ισχύει ότι $PS_{Q_{l'}}(e) \leq PS_{Q_{l'}}(e')$. Εφόσον $PS_{Q_{l'}}(e) = PS_{Q_{l_0}}(e)$, προκύπτει ότι $PS_{Q_{l_0}}(e) \leq PS_{Q_{l'}}(e')$. Επειδή $\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i) < PS_{Q_{l_0}}(e)$ είναι $\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i) < PS_{Q_{l'}}(e')$. Από τον ορισμό της πράξης ενημέρωσης προτεραιοτήτων, ισχύει ότι για κάθε δείκτη συνόδου $k \in \mathcal{A}_{Q_{l'}} \mid e$, $\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_k) \leq \mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i)$, έτσι ώστε $\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_k) < FS_{Q_{l'}}(e')$. Από το Λήμμα 10.2(2) προκύπτει ότι η ακμή e' δεν είναι κορεσμένη στην $Q_{l'}$. Άτοπο. ■

Θεωρούμε οποιονδήποτε ακέραιο $l \geq \widehat{l_0} \mid e$. Προφανώς, $l \geq l'$. Εφόσον η e είναι μια ακμή ελάχιστου ισομεριδίου για την Q_{l_0}, η Πρόταση 11.3 υποδηλώνει ότι η e είναι επίσης ακμή ελάχιστου ισομεριδίου για την $Q_{l'}$. Επιπρόσθετα, από το Λήμμα 12.2, προκύπτει ότι $\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$. Εφόσον $PS_{Q_{l'}}(e) = PS_{Q_{l_0}}(e)$, είναι $\mathcal{P}_{Q_{l'}}(S_i) \geq PS_{Q_{l'}}(e)$. Από την Πρόταση 12.1 (θέτοντας όπου l_0 το l'), προκύπτει ότι $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$, όπως απαιτείται. ■

Παρατηρούμε ότι η Πρόταση 12.2 γενικεύει την Πρόταση 6.2, για την περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων.

12.3 Ιδιότητες Τερματισμού των Οπτιμιστικών Αλγορίθμων Συμφόρησης Προτεραιοτήτων

Σε αυτήν την ενότητα, παραθέτουμε θεμελιώδεις ιδιότητες τερματισμού των οπτιμιστικών αλγορίθμων συμφόρησης προτεραιοτήτων.

Τερματισμός Συνόδων δια Ακμής Ελάχιστου Ισομεριδίου Προτεραιότητας

Η πρώτη ιδιότητα σχετίζεται με τις ενεργές συνόδους που διατρέχουν μια ακμή ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας. Αποδεικνύουμε ότι αν κάθε τέτοια σύνοδος δρομολογηθεί τουλάχιστον μια φορά, όλες αυτές οι σύνοδοι που χρησιμοποιούν τη συγκεκριμμένη ακμή θα απενεργοποιηθούν.

Θεώρημα 12.1 *Έστω ότι ο* Alg *είναι ένας οπτιμιστικός αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων. Για κάθε ακέραιο* $l_0 \geq 0$, *έστω μια οποιαδήποτε ακμή* $e \in MPSE_{Q_{l_0}}$ *τέτοια ώστε* $\widehat{l_0} \mid e < \infty$. *Τότε, για κάθε σύνοδο* $S_i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$ *ισχύει ότι*

$$S_i \in \mathcal{D}_{\overrightarrow{Q_{\widehat{l_0}|e}}}.$$

Απόδειξη: Αρχικά παραθέτουμε μια άτυπη, σύντομη περιγραφή της απόδειξης. Θεωρούμε οποιαδήποτε ενεργή σύνοδο στην κατάσταση Q_{l_0} και επιχειρηματολογούμε ότι αν όλες οι σύνοδοι δρομολογηθούν τουλάχιστον μια φορά, η σύνοδος αυτή θα αποκτήσει προτεραιότητα ίση με το ισομερίδιο προτεραιότητας της ακμής e στην Q_{l_0}. Χρησιμοποιούμε στη συνέχεια το γεγονός ότι η e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την Q_{l_0}, προκειμένου να επιχειρηματολογήσουμε ότι η e εξακολουθεί να είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων και στη συνέχεια, καθώς επίσης ότι το ισομερίδιο προτεραιότητάς της παραμένει αναλλοίωτο. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων, αυτό είναι επαρκές για να συμπεράνουμε ότι η σύνοδος αυτή έχει λάβει τον τελικό ρυθμό μετάδοσής της. Συνεχίζουμε παρουσιάζοντας τις λεπτομέρειες της απόδειξης.

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε σύνοδο $S_i \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$. Αρχικά αποδεικνύουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Λήμμα 12.3 $\mathcal{P}_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_i) = PS_{Q_{l_0}}(e)$

Απόδειξη: Με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $\mathcal{P}_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_i) \neq PS_{Q_{l_0}}(e)$. Από την Πρόταση 12.2 συνεπάγεται ότι $\mathcal{P}_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_i) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$. Επομένως, $\mathcal{P}_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_i) > PS_{Q_{l_0}}(e)$. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

1. Υποθέτουμε πρώτα ότι δεν υπάρχει καμιά σύνοδος $S_j \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, $j \neq i$. Συνεπώς, $\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e = \{i\}$. Συμβολίζουμε με Q_l την τελευταία κατάσταση στην εκτέλεση α, που είναι τέτοια ώστε $\overleftarrow{Q_{l_0}} \longrightarrow Q_l \longrightarrow \overrightarrow{Q_{\widehat{l_0}|e}}$ και $\mathcal{A}_{Q_l} \neq \emptyset$. Άρα, $\mathcal{A}_{Q_l} \mid e = \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e = \{i\}$ και

$allot_{Q_l} = allot_{Q_{l_0}}$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in \mathcal{A}_{Q_l} | e} r_{Q_l}(S_j) \\
= \;& r_{Q_l}(S_i) \\
= \;& r_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_i) \\
& \text{(εξ ορισμού της κατάστασης } Q_l\text{)} \\
= \;& \mathbf{F}_i(\mathcal{P}_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_i)) \\
& \text{(εξ ορισμού των συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων)} \\
> \;& \mathbf{F}_i(PS_{Q_{l_0}}(e)) \\
& \text{(επειδή η συνάρτηση } F_i \text{ είναι γνήσια αύξουσα και } \mathcal{P}_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_i) > PS_{Q_{l_0}}(e)\text{)} \\
= \;& cap(e) - allot_{Q_{l_0}}(e) \\
& \text{(εξ ορισμού του ισομεριδίου προτεραιότητας)} \\
= \;& cap(e) - allot_{Q_l}(e)\,,
\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η ακμή e παραβιάζει τη συνθήκη χωρητικότητας στην Q_l. Άτοπο.

2. Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει τουλάχιστον μια σύνοδος $S_j \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$, $j \neq i$. Από την Πρόταση 12.2 προκύπτει ότι $\mathcal{P}_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_j) \geq PS_{Q_{l_0}}(e)$. Αφού $\mathcal{P}_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_i) > PS_{Q_{l_0}}(e)$, τα παραπάνω υποδηλώνουν αντίφαση με το Λήμμα 10.2 (3).

Σε αυτό το σημείο η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ∎

Εξετάζουμε στη συνέχεια τις ακόλουθες περιπτώσεις.

1. Υποθέτουμε πρώτα ότι $S_i \in \mathcal{D}_{Q_l}$ για κάποια κατάσταση Q_l της εκτέλεσης α τέτοια ώστε $Q_{l_0} \longrightarrow Q_l \longrightarrow \overrightarrow{Q_{\widehat{l_0}|e}}$. Εξ ορισμού της εκτέλεσης, προκύπτει ότι $S_i \in \mathcal{D}_{\overrightarrow{Q_{\widehat{l_0}|e}}}$, όπως απαιτείται.

2. Υποθέτουμε τώρα ότι για κάθε κατάσταση Q_l της εκτέλεσης α τέτοια ώστε $Q_{l_0} \longrightarrow Q_l \longrightarrow \overrightarrow{Q_{\widehat{l_0}|e}}$, ισχύει ότι $S_i \in \mathcal{A}_{Q_l}$.

Συμβολίζουμε με Q_l την τελευταία κατάσταση της α στην οποία ισχύει ότι $Q_{l_0} \longrightarrow Q_l \longrightarrow \overrightarrow{Q_{\widehat{l_0}|e}}$ και $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) = \mathcal{P}_{Q_{\widehat{l_0}|e}}$.

Εφόσον $e \in MPSE_{Q_{l_0}}$, το Λήμμα 11.2 υποδηλώνει ότι η e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την Q_{l_0}. Εφόσον $S_i \in \mathcal{A}_{Q_l}$ και η σύνοδος S_i διατρέχει την e, προκύπτει ότι $\mathcal{A}_{Q_l} \mid e \neq \emptyset$. Συνεπώς, από την Πρόταση 11.2 (1) συνεπάγεται ότι

$$PS_{Q_l}(e) \quad = \quad PS_{Q_{l_0}}(e)\,,$$

ενώ η Πρόταση 11.2 (2) υποδηλώνει ότι η e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την Q_l. Λόγω του Λήμματος 12.3 είναι

$$\mathcal{P}_{Q_{\widehat{l_0}|e}}(S_i) \quad = \quad PS_{Q_{l_0}|e}(e)\,.$$

Επομένως,

$$\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) \quad = \quad PS_{Q_l}(e)\,.$$

Ανακεφαλαιώνοντας, η ακμή e είναι ακμή συμφόρησης προτεραιοτήτων για την κατάσταση Q_l και χρησιμοποιείται από τη σύνοδο S_i για την οποία $\mathcal{P}_{Q_l}(S_i) = PS_{Q_l}(e)$. Εφόσον ο Alg είναι αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων, έχουμε $S_i \in \mathcal{D}_{\overrightarrow{Q_l}}$. Εφόσον $Q_l \rightarrow \overrightarrow{Q_{\widehat{l_0}|e}}$, είναι $S_i \in \mathcal{D}_{\overrightarrow{Q_{\widehat{l_0}|e}}}$, όπως απαιτείται.

■

Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα 12.1 γενικεύει το Θεώρημα 6.1, για την περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων.

Τερματισμός Τουλάχιστον μιας Συνόδου

Η τελευταία ιδιότητα τερματισμού που παρουσιάζουμε είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 12.1. Μιλώντας άτυπα, αποδεικνύουμε ότι αν όλες οι σύνοδοι δρομολογηθούν τουλάχιστον μια φορά, *μια τουλάχιστον* ενεργή σύνοδος απενεργοποιείται.

Θεώρημα 12.2 *Έστω ότι ο* Alg *είναι ένας οπτιμιστικός αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων. Τότε, για κάθε ακέραιο $l_0 \geq 0$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \neq \emptyset$ και $\widehat{l_0} \mid e < \infty$, υπάρχει κάποια σύνοδος $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}$ τέτοια ώστε*

$$S \;\in\; \mathcal{D}_{\overrightarrow{Q_{\widehat{l_0}}}} .$$

Απόδειξη: Προφανώς, $\mathcal{A}_{Q_{l_0}} \neq \emptyset$, έτσι ώστε $MPSE_{Q_{l_0}} \neq \emptyset$. Θεωρούμε επομένως μια οποιαδήποτε ακμή $e \in MPSE_{Q_{l_0}}$. Έστω μια οποιαδήποτε σύνοδος $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}} \mid e$. Προφανώς, $S \in \mathcal{A}_{Q_{l_0}}$. Από το Θεώρημα 12.1 προκύπτει ότι $S \in \mathcal{D}_{\overrightarrow{Q_{\widehat{l_0}}}}$, όπως απαιτείται. ∎

Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα 12.2 γενικεύει το Θεώρημα 6.2, για την περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων.

12.4 Εξειδικευμένοι Οπτιμιστικοί Αλγόριθμοι Συμφόρησης Προτεραιοτήτων

Ένας Αλγόριθμος Χωρίς Γνώση

Με βάση το Θεώρημα 12.2 σχεδιάζουμε έναν αλγόριθμο χωρίς γνώση που υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων και τον οποίο ονομάζουμε Permutation.

Ο δρμολογητής του Permutation, ο οποίος συμβολίζεται PermSched, διεξάγει n φάσεις δρομολόγησης. Σε κάθε φάση, όλες οι n σύνοδοι δρομολογούνται μια φορά η κάθε μία με αυθαίρετη σειρά. Επιπρόσθετα, ο Permutation είναι αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων.

Λόγω του ορισμού του PermSched, κάθε σύνοδος δρομολογείται ακριβώς μια φορά σε κάθε φάση. Συνεπώς, το Θεώρημα 12.2 υποδηλώνει ότι τουλάχιστον μια ενεργή σύνοδος απενεργοποιείται σε κάθε μια από τις n φάσεις. Επομένως, όλες οι n σύνοδοι θα έχουν απενεργοποιηθεί μετά από n φάσεις, οπότε και το δίκτυο εισέρχεται σε τελική κατάσταση. Άρα, το Θεώρημα 11.2 υποδηλώνει ότι ο Permutation υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων.

Προφανώς, ο Permutation δεν εκτελεί περισσότερες από n^2 πράξεις ενημέρωσης προτεραιοτήτων στη χειρότερη περίπτωση. Συνεπώς, έχουμε:

Θεώρημα 12.3 *Ο* Permutation *υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων μέσα σε n^2 πράξεις ενημέρωσης προτεραιοτήτων.*

Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος Permutation γενικεύει τον αλγόριθμο RoundRobin, που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 8.

Ένας Αλγόριθμος με Πλήρη Γνώση

Με βάση το Θεώρημα 12.1 σχεδιάζουμε έναν αλγόριθμο με πλήρη γνώση που υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων και ονομάζεται PLinear.

Μιλώντας άτυπα, ο δρομολογητής του PLinear διατηρεί μια ενεργή ακμή ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας και δρομολογεί όλες τις ενεργές συνόδους που χρησιμοποιούν την ακμή αυτή με αυθαίρετη σειρά. Όταν τελειώνει με όλες αυτές τις συνόδους, διαλέγει μια άλλη ενεργή ακμή ελάχιστου ισομεριδίου προτεραιότητας κ.ο.κ. Επιπρόσθετα, ο PLinear είναι αλγόριθμος συμφόρησης προτεραιοτήτων.

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε κατάσταση Q_{l_0} τέτοια ώστε $e \in MPSE_{Q_{l_0}}$. Από τον ορισμό του δρομολογητή του αλγορίθμου PLinear, κάθε σύνοδος που διατρέχει την ακμή e δρομολογείται ακριβώς μια φορά και συνεπώς η κατάσταση $Q_{\widehat{l_0}|e}$ προσεγγίζεται. Από το Θεώρημα 12.1 προκύπτει ότι κάθε τέτοια σύνοδος απενεργοποιείται ως την κατάσταση $Q_{\widehat{l_0}|e}$. Από τον ορισμό του δρομολογητή του αλγορίθμου PLinear, προκύπτει ότι όλες οι σύνοδοι τελικά θα απενεργοποιηθούν, και το δίκτυο θα εισέλθει σε τελική κατάσταση. Επομένως, το Θεώρημα 11.2 υποδηλώνει ότι ο PLinear υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων.

Προφανώς, ο συνολικός αριθμός των πράξεων ενημέρωσης προτεραιοτήτων που εκτελούνται σε κάθε εκτέλεση του PLinear είναι ακριβώς n, που είναι βέλτιστο. Επομένως έχουμε:

Θεώρημα 12.4 *Ο* PLinear *υπολογίζει το δίκαιο διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης μεγίστου-ελαχίστου προτεραιοτήτων μετά από ακριβώς n πράξεις ενημέρωσης προτεραιοτήτων.*

Παρατηρούμε ότι ο PLinear είναι μια παραλλαγή του αλγορίθμου Linear, που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 8, για την περίπτωση ύπαρξης προτεραιοτήτων.

Επίλογος

Ανασκόπηση

Στη διατριβή αυτή παρουσιάσαμε μια εκτεταμένη συλλογή από κάτω και άνω όρια στην πολυπλοκότητα σύγκλισης των οπτιμιστικών αλγορίθμων ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης, όταν αυτοί έχουν στη διάθεσή τους διαφορετικά επίπεδα γνώσης. Πιο συγκεκριμμένα, ορίσαμε και μελετήσαμε δρομολογητές χωρίς γνώση, οι οποίοι δεν έχουν καθόλου πληροφορίες ούτε για το δίκτυο, ούτε για τους ρυθμούς μετάδοσης και την κατάσταση των συνόδων, δρομολογητές με μερική γνώση, οι οποίοι έχουν πληροφορίες για τους ρυθμούς μετάδοσης των συνόδων, αλλά όχι για την κατάστασή τους ή για την τοπολογία του δικτύου και δρομολογητές με πλήρη γνώση, οι οποίοι χρησιμοποιούν πλήρη γνώση για το δίκτυο και τις συνόδους.

Αποδείξαμε ότι οι κλάσεις των αλγορίθμων χωρίς γνώση και εκείνων με μερική γνώση έχουν τις ίδιες ιδιότητες σύγκλισης. Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματά μας αποδεικνύουν ότι οι αλγόριθμοι με μερική γνώση (ή εκείνοι χωρίς γνώση) συμπεριφέρονται διαφορετικά ως προς την πολυπλοκότητα σύγκλισης από τους αλγορίθμους με πλήρη γνώση.

Οι αλγόριθμοί μας συνδιάζουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες πολυπλοκότητας και τοπικότητας και επιδεικνύουν σημαντικούς συνδιασμούς μεταξύ αυτών των δύο παραμέτρων. Οι αλγόριθμοι αυτοί βελτιώνουν σημαντικά εκείνους που παρουσιάζονται στην εργασία [1]. Επιπρόσθετα, τα κάτω όρια που παρουσιάζονται οριοθετούν βασικούς περιορισμούς στην απόδοση των αλγορίθμων χωρίς ή με μερική γνώση. Τόσο τα κάτω όσο και τα άνω όρια στην πολυπλοκότητα έχουν αποδειχθεί με βάση την εξάρτηση μεταξύ των συνόδων, μια δικτυακή παράμετρο που αποτελεί ένα έμμεσο μέτρο της τοπικότητας.

Είδος Δρομολογητή	Κάτω 'Ορια	Άνω 'Ορια
Χωρίς Γνώση	$dn/4 + n/2$	$dn/2 + n/2$ (RoundRobin) $O(d \ln n/p_{min})$ μέση τιμή (Random) $O(dn \ln n)$ μέση τιμή (Random, ομ/ρφη περίπτωση)
Με Μερική Γνώση	$dn/4 + n/2$	$dn/2 + n/2$ (LocalMin ή GlobalMin [1])
Χωρίς Γνώση	n	n (Linear)

Σχήμα 12-1: Ανασκόπηση γνωστών (πολυωνυμικών) κάτω και άνω ορίων στην πολυπλοκότητα σύγκλισης για οπτιμιστικούς αλγορίθμους ελέγχου ροής

Αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα του ελέγχου ροής σαν ένα πρόβλημα *λήψης αποφάσεων χωρίς πλήρη πληροφορία με κατανεμημένο τρόπο* [60, 61] και επαληθεύουμε ότι η ύπαρξη πληροφορίας μπορεί να επηρεάζει σημαντικά επικερδείς παραμέτρους [3] (όπως η πολυπλοκότητα σύγκλισης ή η τοπικότητα) ενός προβλήματος σε ένα κατανεμημένο σύστημα. Πέραν των εξαγόμενων αποτελεσμάτων, μια σημαντική συνεισφορά της δουλειάς μας είναι η δημιουργία ενός απλού αλλά κομψού, συνδυαστικού μοντέλου το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διεξαγωγή περαιτέρω έρευνας στην περιοχή του ελέγχου ροής.

Προς χάριν πληρότητας και σύγκρισης, συνοψίζουμε στον Πίνακα 12-1 όλα τα γνωστά (πολυωνυμικά) κάτω και άνω όρια στην πολυπλοκότητα σύγκλισης των οπτιμιστικών αλγορίθμων ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης, που περιγράφονται στη διατριβή αυτή καθώς και στην εργασία των Afek *et al.* [1].

Παρουσιάσαμε επίσης απλούς και αποτελεσματικούς, συνδυαστικούς αλγορίθμους για την εκτέλεση τοπικών υπολογισμών στους δικτυακούς διακόπτες. Αυτοί οι αλγόριθμοι αποτελούν ένα σημαντικό μηχανισμό των κατανεμημένων αλγορίθμων που είναι υπεύθυνοι για τη δίκαιη κατανομή του εύρους ζώνης σε ένα κατανεμημένο σύστημα. Από την πρακτική σκοπιά, περιγράψαμε ένα ολοκληρωμένο σχήμα υλοποίησης, το οποίο ενσωματώνει τους παραπάνω αλγορίθμους και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την υλοποίηση κάθε αλγορίθμου ελέγχου ροής που λειτουργεί χωρίς γνώση.

Τελικά, επεκτείναμε τη θεωρία ελέγχου ροής δια προσαρμογής των ρυθμών μετάδοσης, που επικεντρώνεται σε θέματα δικαιοσύνης μεγίστου-ελαχίστου, για την περίπτωση κατανεμημένων εφαρμογών διαφορετικών αναγκών και άρα διαφορετικών προτεραιοτήτων στην κατανομή εύρους ζώνης. Η θεωρία μας εμπεριέχει ένα κομψό σχήμα για την κατανομή εύρους ζώνης λαμβάνοντας υπ' όψιν τις προτεραιότητες των διαφορετικών αλληλοεμπλεκόμενων κατανεμημένων εφαρμογών. Το σχήμα αυτό αντιμετωπίζει διάφορα θέματα, όπως η μοντελοποιήση των προτεραιοτήτων μέσω κατάλληλων συναρτήσεων ανάθεσης προτεραιοτήτων, ο ορισμός ενός νέου κριτηρίου δικαιοσύνης, η οποία βασίζεται στις προτεραιότητες και ο αποτελεσματικός υπολογισμός των ρυθμών μετάδοσης των συνόδων που σέβονται το νέο κριτήριο δικαιοσύνης. Επιπρόσθετα, το σχήμα μας παρέχει μηχανισμούς και ιδέες για την επίλυση του προβλήματος της χρέωσης των κατανεμημένων εφαρμογών που χρησιμοποιούν δικτυακούς πόρους. Ως παράδειγμα αναφέρουμε την ανάθεση νομισματικών τιμών στις συναρτήσεις ανάθεσης προτεραιοτήτων. Οι σύνοδοι μπορούν στη συνέχεια να διαλέγουν το ποσοστό εύρους ζώνης που επιθυμούν επιλέγοντας μια κατάλληλη τέτοια συνάρτηση.

Στο ίδιο μέτωπο, η εργασία αυτή προωθεί την ανάπτυξη ενός αλγοριθμικού μοντέλου εργασίας για μοντέρνα δικτυακά προβλήματα, όπως ο έλεγχος ροής και η δρομολόγηση, τα οποία είναι ιδιαίτερα σημαντικά τελευταία, λόγω της απαίτησης των σύγχρονων κατανεμημένων εφαρμογών για εγγυήσεις στην ποιότητα εξυπηρέτησης. (Δείτε για παράδειγμα τις εργασίες [51, 56] οι οποίες διευθυνσιοδοτούν το πρόβλημα της ποιότητας εξυπηρέτησης στα δικτυακά προβλήματα.) Καθώς η ανάγκη για εγγυήσεις στην ποιότητα εξυπηρέτησης έχει γίνει πιο επιτακτική, αλγοριθμικά μοντέλα εργασίας που τυποποιούν τέτοιου είδους απαιτήσεις, καθώς επίσης και αλγόριθμοι που προσεγγίζουν ή αποφέρουν δίκαιες και αποτελεσματικές λύσεις στα προβλήματα αυτά, έχουν γίνει απαραίτητοι. Τέτοια μοντέλα και αλγόριθμοι (καθώς και η αξιολόγησή τους) μπορεί να αγγίζει θέματα των αρχιτεκτονικών των δικτύων, του καθορισμού των προδιαγραφών και της συνδυαστικής τους βελτιστοποίησης. Ελπίζουμε ότι αυτή η διατριβή συνεισφέρει προς αυτήν την κατεύθυνση.

Ανοιχτά Προβλήματα

Η εργασία μας αφήνει αναπάντητες πολλές σημαντικές ερωτήσεις. Αν και το μοντέλο που παρουσιάζουμε σε αυτήν τη διατριβή είναι αρκετά απλό, κομψό και δομημένο για να εκφράσει πολύ σημαντικά "συστατικά" του προβλήματος ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης, ένας μεγάλος αριθμός από πρακτικά προβλήματα παραμένει ανεπίλυτος. Για παράδειγμα, ο περιορισμός σε ένα "στατικό" σύνολο από συνόδους είναι αρκετά περιοριστικός. Θα ήταν σημαντικό να επεκτείνουμε το μοντέλο και τις τεχικές που παρουσιάζονται σε αυτήν τη διατριβή, έτσι ώστε να μπορούν να χειριστούν δυναμικά σενάρια στα οποία σύνοδοι μπορούν να εισέρχονται ή να εξέρχονται του δικτύου.

Ο Jaffe [41] διερευνά τη δυνατότητα μεγιστοποίησης *της ενέργειας του ελέγχου ροής* [31] μελετώντας μια κλάση *αποκεντρωμένων* αλγορίθμων ελέγχου ροής δια προσαρμογής του ρυθμού μετάδοσης, που προωθούν θέματα όπως η σχεδίαση της δυναμικής συμπεριφοράς τους, η χρήση τοπικής πληροφορίας και η αποκεντρικοποιημένη εκτέλεσή τους. Η κλάση αυτή βασίζεται σε παρόμοια κίνητρα όπως τα κίνητρα που μας οδήγησαν στη σχεδίαση της κλάσης των αλγορίθμων χωρίς γνώση. Ο Jaffe [41, Ενότητα IV] αποδεικνύει ότι, κάτω από την υπόθεση πως οι σύνδεσμοι συμπεριφέρονται σαν M/M/1 εξυπηρετητές [50], η ενέργεια του ελέγχου ροής *δεν* μπορεί να μεγιστοποιηθεί από μη κεντρικοποιημένους αλγορίθμους. Σε αυτήν τη διατριβή αποδεικνύουμε ότι οι αλγόριθμοι χωρίς γνώση *μπορούν* να συγκλίνουν σε μια κατάσταση δικαιοσύνης, αν και όχι γρηγορότερα από $\Omega(dn)$ πράξεις ενημέρωσης στη χειρότερη περίπτωση. Θα ήταν αρκετά ενδιαφέρον να διερευνηθούν οι δυνατότητες και οι περιορισμοί τέτοιων αφηρημένων εννοιών, όπως οι αποκεντρικοποιημένοι αλγόριθμοι ή εκείνοι που λειτουργούν χωρίς γνώση, και να μελετηθεί τι μπορούν να καταφέρουν και με ποιο κόστος.

Οι Afek *et al.* [1, Ενότητα 7] εισάγουν την έννοια ενός *"προσεγγιστικού"* αλγορίθμου, σύμφωνα με την οποία ο ρυθμός μετάδοσης μιας συνόδου αυξάνει μόνο αν η αύξηση είναι μεγαλύτερη από μια αυθαίρετα μικρή σταθερά $\delta \geq 0$. Ένα ενδιαφέρον ανοιχτό πρόβλημα θα ήταν ο τρόπος επιρροής της προσεγγιστικής αυτής ιδιότητας στον καθορισμό των ορίων στην πολυπλοκότητα σύγκλισης, που παρουσιάζονται σε αυτήν τη διατριβή.

Πίνακας Συμβόλων

α	εκτέλεση, p. 93
α'	κλάσμα εκτέλεσης, p. 96
$\alpha^{(l)}$	$i_{l+1}, Q_{l+1}, \ldots, i_{\hat{l}}, Q_{\hat{l}}$, p. 96
$\mathcal{A}_Q$	σύνολο ενεργών συνόδων για την κατάσταση Q, p. 82
$AE_Q(\mathcal{S}_j)$	ενεργές ακμές του συμπλέγματος $\mathcal{S}_j$ στην κατάσταση Q, p. 82
AE_Q	ενεργές ακμές στην κατάσταση Q, p.82
Alg	αλγόριθμος, p. 91
$allot_Q(e)$	παροχημένη χωρητικότητα της ακμής e στην κατάσταση Q, p. 83
B	ανασχηματιστική μείωση, p. 44
$B_Q(e)$	ανασχηματιστική μείωση που επιβάλλεται από την ακμή e στην κατάσταση Q, p. 114
γ	σταθερά του Euler, p. 38
$cap(e)$	χωρητικότητα της ακμής e, p. 78
`cupdate`	παράλληλη πράξη ενημέρωσης, p. 118
d	εξάρτηση συνόδων, p.78
$\mathcal{D}_Q$	σύνολο απενεργοποιημένων συνόδων στην κατάσταση Q, p. 82
Δ	ανασχηματιστική αύξηση, p. 40
$\Delta_Q(i, e)$	ανασχηματιστική αύξηση που επιφέρει η ακμή e στη σύνοδο S_i στην κατάσταση Q, p. 113
$\Delta_Q(i)$	ανασχηματιστική αύξηση για τη σύνοδο S_i στην κατάσταση Q, p. 113

`dupdate`	συνάρτηση μειώσεως, p. 44
E	σύνολο δικτυακών ακμών/συνδέσμων, p. 77
$\mathcal{E}(X)$	μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, p. 39
$\mathbf{F}_i$	συνάρτηση προτεραιοτήτων της συνόδου S_i, p. 230
$\mathbf{F}_i^{-1}$	αντίστροφη της συνάρτηση προτεραιοτήτων της συνόδου S_i, p. 230
$FS_Q(e)$	ισομερίδιο της ακμής e για την κατάσταση Q, p. 84
G	γράφος που μοντελοποιεί το δίκτυο, p. 77
H_m	m-οστός αρμονικός αριθμός, p. 38
`iupdate`	συνάρτηση αυξήσεως, p. 39
$\widehat{l}$	ελάχιστη δρομολόγηση για την κατάσταση Q_l, p. 95
λ	κενή ακολουθία, p. 38
$MFSE_Q(\mathcal{S}_j)$	σύνολο ακμών ελάχιστου ισομεριδίου για το σύμπλεγμα $\mathcal{S}_j$ στην κατάσταση Q, p. 99
$MFS_Q(S)$	ελάχιστο ισομερίδιο της συνόδου S στην κατάσταση Q, p. 87
$MPS_Q(S)$	ελάχιστο ισομερίδιο προτεραιότητας της συνόδου S_i στην κατάσταση Q, p. 240
$MPSE_Q$	σύνολο ακμών με ελάχιστο ισομερίδιο προτεραιότητας για την κατάσταση Q, p. 241
$\mathcal{N}_i$	σύνολο των γειτονικών συνόδων της συνόδου S_i, p. 117
$\mathbf{0}^{(m)}$	διάνυσμα με m μηδενικά στοιχεία, p. 39
`operation`	πράξη προσαρμογής ρυθμού μετάδοσης, p. 88
$\mathcal{P}_Q(S)$	προτεραιότητα της συνόδου S στην κατάσταση Q, p. 230
$\Vert_{\mathcal{S}}$	σχέση διαμοιρασμού ακμής στο σύνολο $\mathcal{S}$, p. 78
$\Vert_{\mathcal{S}}^{\star}$	κλειστό σύνολο ως προς την μεταβατική ιδιότητα για τη σχέση $\Vert_{\mathcal{S}}$, p. 78
$PS_Q(e)$	ισομερίδιο προτεραιότητας της ακμής e στην κατάσταση Q, p. 234
`pupdate`	πράξη ενημέρωσης προτεραιοτήτων, p. 258
Q	κατάσταση δικτύου, p. 82

Q^{in}	αρχική κατάσταση δικτύου, p. 82
$\overleftarrow{Q}$	αμέσως προηγούμενη κατάσταση της Q, p. 95
$\overrightarrow{Q}$	αμέσως επόμενη κατάσταση της Q, p. 95
$Q \xrightarrow{\alpha} Q'$	η κατάσταση Q προηγείται της Q' στην εκτέλεση α, p. 95
$\Re$	σύνολο πραγματικών αριθμών, p. 38
$\mathbf{r}$	διάνυσμα ρυθμών μετάδοσης, p. 79
$\|\|\mathbf{r}\|\|_1$	νόρμα του $\mathbf{r}$, p. 39
$r_Q(S)$	ρυθμός μετάδοσης της συνόδου S στην κατάσταση Q, p. 79
$residual_Q(e)$	ελεύθερη χωρητικότητα της ακμής e στην κατάσταση Q, p. 83
σ	ακολουθία, p. 38
$\|\sigma\|$	μήκος της ακολουθίας σ, p. 38
$\sigma \mid \mathcal{S}'$	περιορισμός της ακολουθίας σ σε δείκτες συνόδων που ανήκουν στο σύνολο $\mathcal{S}'$, p. 79
$\sigma \uparrow \mathcal{S}'$	πρόθεμα της $\sigma \mid \mathcal{S}'$, p. 79
$\sigma \downarrow \mathcal{S}'$	πρόσφυμα της $\sigma \mid \mathcal{S}'$, p. 79
$\mathcal{S}$	σύνολο συνόδων που υπάρχουν στο δίκτυο, p. 78
S	σύνοδος, p. 78
Sched	δρομολογητής, p. 89, 90
$sessions(e)$	σύνολο συνόδων που διατρέχουν την ακμή e, p. 78
Term	απενεργοποιητής, p. 90, 100
$\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}(\langle G, \mathcal{S} \rangle)$	πολυπλοκότητα σύγκλισης του αλγορίθμου Alg πάνω στο δίκτυο G με σύνολο συνόδων $\mathcal{S}$, p. 97
$\mathcal{U}_{\mathsf{Alg}}$	πολυπλοκότητα σύγκλισης του αλγορίθμου Alg, p. 97
V	σύνολο από δικτυακούς κόμβους, p. 77
X	τυχαία μεταβλητή, p. 39

Βιβλιογραφία

[1] Y. Afek, Y. Mansour and Z. Ostfeld, "Convergence Complexity of Optimistic Rate Based Flow Control Algorithms," *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing,* pp. 89–98, May 1996.

[2] Y. Afek, Y. Mansour and Z. Ostfeld, "Phantom: A Simple and Effective Flow Control Schme," *Proceedings of ACM SIGCOMM'96,* pp. 169–182, August 1996.

[3] K. Arrow, *The Economics of Information,* Harvard University Press, 1984.

[4] B. Awerbuch, I. Cidon, S. Kutten, Y. Mansour and D. Peleg, "Broadcast with Partial Knowledge," *Proceedings of the 10th Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing,* pp. 153–163, August 1991.

[5] B. Awerbuch and L. J. Schulman, "The Maintainance of Common Data in a Distributed System," *Journal of the ACM,* Vol. 44, No. 1, pp. 86–103, January 1997.

[6] D. P. Bertsekas and R. G. Gallager, *Data Networks,* second edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.

[7] K. Bharath-Kumar and J. M. Jaffe, "A New Approach to Performance-Oriented Flow Control," *IEEE Transactions on Communications,* Vol. COM-29, No. 4 (Special Issue on Congestion Control in Computer Networks), pp. 427–435, April 1981.

[8] F. Bonomi and K. Fendick, "The Rate-Based Flow Control for Available Bit Rate ATM Service," *IEEE Network,* Vol. 9, No. 2, pp. 24–39, March/April 1995.

[9] B. Braden, D. Clark, J. Crowcroft, B. Davie, S. Deering, D. Estrin, S. Floyd, V. Jacobson, G. Minshall, C. Partridge, L. Peterson, K. Ramakrishnan, S. Shenker, J. Wroclawski, and L. Zhang, *Recommendations on Queue Management and Congestion Avoidance in the Internet,* April 1998.
(Available at `http://info.internet.isi.edu:90/in notes/rfc/files/rfc2309.txt`)

[10] L. S. Brakmo and L. Peterson, "TCP Vegas: End-to-End Congestion Avoidance on a Global Internet," *IEEE Journal on Selected Areas in Communication,* Vol. 13, No. 8, pp. 1465–1480, October 1995.

[11] G. Brightwell, T. J. Ott and P. Winkler, "Target Shooting with Programmed Random Variables," *Proceedings of the 24th Annual ACM Symposium on Theory of Computing,* pp. 691–698, May 1992.

[12] A. Charny, "An Algorithm for Rate Allocation in a Packet-Switching Network with Feedback," Technical Report MIT/LCS/TR-601, Laboratory for Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, April 1994.

[13] A. Charny, D. D. Clark, and R. Jain, "Congestion Control with Explicit Rate Indication," *Proceedings of the International Conference on Communications (ICC'95),* June 1995.

[14] A. Charny, K. K. Ramakrishnan, and A. Lauck, "Time Scale Analysis and Scalability Issues for Explicit Rate Allocation in ATM Networks," *IEEE/ACM Transactions on Networking,* Vol. 4, No. 4, August 1996.

[15] L. Cherkasova, A. Davis, R. Hodgson, V. Kotov, I. Robinson and T. Rokicki, "Components of Congestion Control," *Proceedings of the 8th Annual ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures,* pp. 208–210, June 1996.

[16] I. Cidon and I. Gopal, "PARIS: An Approach to Integrated, High-Speed, Private Networks," *International Journal of Digital and Analog Cabled Systems,* Vol. 1, No. 2, pp. 77–86, 1988.

[17] D. D. Clark, S. Shenker and L. Zhang, "Supporting Real-Time Applications in an Intergrated Services Packet Network: Architecture and Mechanism," *Proceedings of ACM SIGCOMM,* August 1992.

[18] D. Comer, *Internetworking with TCP/IP,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

[19] T. Cormen, C. Leiserson and R. Rivest, *Introduction to Algorithms,* MIT Press/McGraw-Hill, 1990.

[20] C. Courcoubetis, F. Kelly and R. Weber, "Measurement-Based Usage Charges in Communication Networks", *Operations Research,* to appear.

[21] W. Dally, "Virtual-Channel Flow Control," *Proceedings of the 17th International Symposium on Computer Architecture,* pp. 60–68, May 1990.

[22] X. Deng and C. H. Papadimitriou, "Competitive Distributed Decision Making," *International Federation for Information Processing,* A-12, pp. 250–256, September 1992.

[23] Z. Dziong, M. Juda and L. G. Mason, "A Framework for Bandwidth Management in ATM Networks – Aggressive Equivalent Bandwidth Estimation Approach," *IEEE/ACM Transactions on Networking,* Vol. 5, No. 1, pp. 134–147, February 1997.

[24] P. Fatourou, M. Mavronicolas and P. Spirakis, "Advances in Rate-Based Flow Control," *Proceedings of the 4th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity,* pp. 266–281, Carleton University Press, June 1997.

[25] P. Fatourou, M. Mavronicolas and P. Spirakis, "Efficiency of Oblivious versus Non-Oblivious Schedulers for Optimistic, Rate-Based Flow Control," *Proceedings of the 16th Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing,* pp. 139–148, August 1997.

[26] P. Fatourou, M. Mavronicolas and P. Spirakis, "The Global Efficiency of Distributed, Rate-Based Flow Control Algorithms," *Proceedings of the 5th Colloqium on Structural*

Information and Communication Complexity, June 1998; also, brief announcement in *Proceedings of the 17th Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing,* p. 311, June/July 1998.

[27] P. Fatourou, M. Mavronicolas and P. Spirakis, "Max-Min Fair Flow Control Sensitive to Priorities," *Proceedings of the 2nd International Conference on Principles of Distributed Systems,* pp. 45–59, Amiens, France, December 1998.

[28] E. Gafni, "The Integration of Routing and Flow Control for Voice and Data in Integrated Packet Networks," Ph. D. Thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, 1982.

[29] E. Gafni and D. Bertsekas, "Dynamic Control of Session Input Rates in Communication Networks," *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. AC-29, pp. 1009–1016, 1984.

[30] M. Gerla and L. Kleinrock, "Flow Control: A Comparative Survey," *IEEE Transactions on Communications,* Vol. COM-28, pp. 553–574, 1980.

[31] A. Giessler, J. Hanle, A. Konig, and F. Pade, "Free Buffer Allocation – an Investigation by Simulation," *Computer Networks,* Vol. 2, 1978.

[32] E. Hahne, "Round-Robin Scheduling for Fair Flow Control in Data Communication Networks," Ph. D. Thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, 1986.

[33] E. Hahne, "Round-Robin Scheduling for MaxMin Fairness in Data Networks," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications,* Vol. 9, No. 7, September 1991.

[34] E. Hahne and R. G. Gallager, "Round-Robin Scheduling for Fair Flow Control in Data Communication Networks," *Proceedings of the IEEE International Conference on Communications,* pp. 103–107, June 1986.

[35] R. Händel, M. N. Huber and S. Schröder, *ATM Networks: Concepts, Protocols, Applications,* Addison-Wesley, 1998.

[36] H. Hayden, "Voice Flow Control in Integrated Packet Networks," Technical Report MIT/LIDS/TH/TR-601, Laboratory for Information and Decision Systems, Massachusetts Institute of Technology, 1981.

[37] M. Hofri, *Analysis of Algorithms: Computational Methods and Mathematical Tools,* Oxford University Press, 1995.

[38] S. Irani and Y. Rabani, "On the Value of Coordination in Distributed Decision Making," *SIAM Journal on Computing,* Vol. 25, No. 3, pp. 498–519, June 1996.

[39] V. Jacobson, "Congestion Avoidance and Control," *Proceedings of ACM SIGCOMM'88,* pp. 314–329, August 1988.

[40] J. M. Jaffe, "Bottleneck Flow Control," *IEEE Transactions on Communications,* Vol. COM-29, No. 7, pp. 954–962, July 1981.

[41] J. M. Jaffe, "Flow Control Power is Decentralizable," *IEEE Transactions on Communications,* Vol. COM-29, No. 9, pp. 1301–1306, September 1981.

[42] R. Jain, S. Kalyanaraman and R. Viswanathan, "The OSU Scheme for Congestion Avoidance Using Explicit Rate Indication," Technical Report ATM-FORUM/95-0883, The Ohio State University, September 1994.

[43] S. Jamin, S. Shenker, L. Zhang and D. Clark, "Admission Control Algorithm for Predictive Real-Time Service," *Proceedings of the 3rd International Workshop on Network and Operating System Support for Digital Audio and Video,* November 1992.

[44] L. Kalampoukas, A. Varma, and K. K. Ramakrishnan, "An Efficient Rate Allocation Algorithm for ATM Networks Providing Max-Min Fairness," *Proceedings of the 6th IFIP International Conference on High Performance Networking (HPN'95),* September 1995.

[45] P. C. Kanellakis and C. H. Papadimitriou, "The Complexity of Distributed Concurrency Control," *SIAM Journal on Computing,* Vol. 14, No. 1, pp. 52–75, February 1985.

[46] M. Katevenis, S. Sidiropoulos and C. Courcoubetis, "Weighted Round-Robin Cell Multiplexing in a General-Purpose ATM Switch Chip," *IEEE Journal on Selected Areas in Communication,* Vol. 9, No. 8, pp. 1265–1279, October 1991.

[47] F. P. Kelly, "On Tariffs, Policing and Admission Control for Multiservice Networks," *Operations Research Letters*, Vol. 15, pp. 1-9, 1994.

[48] S. Keshav, *An Engineering Approach to Computer Networking,* Addison-Wesley, 1997.

[49] G. Kesidis, *ATM Network Performance,* Kluwer Academic Publishers, 1996.

[50] L. Kleinrock and R. Gail, *Queueing Systems,* John Wiley & Sons, Inc., 1996.

[51] E. Koutsoupias and C. H. Papadimitriou, "Worst-case Equilibria," *Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science,* G. Meinel and S. Tison eds., pp. 387–396, Vol. 1563, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Trier, Germany, March 1999.

[52] H. T. Kung and R. Morris, "Credit-Based Flow Control for ATM Networks," *IEEE/ACM Transactions on Networking,* pp. 40–48, March/April 1995.

[53] R. Lamair and D. Serpanos, "A Two-Dimensional Round-Robin Scheduling Mechanism for Switches with Multiple Input Queues," *IEEE/ACM Transactions on Networking,* pp. 471–482, October 1994.

[54] J. LeBoudec, "The Asynchronous Transfer Mode: A Tutorial," *Computer Networks and ISDN Systems,* Vol. 24, No. 4, pp. 279–309, 1992.

[55] H. Luss and D. R. Smith, "Resource Allocation among Competing Entities: A Lexicographic Minimax Approach," *Operations Research Letters,* Vol. 5, No. 5, pp. 227–231, November 1986.

[56] Y. Mansour and B. Patt-Shamir, "Jitter Control in QoS Networks," *Proceedings of the 39th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science,* pp. 50–59, October 1998.

[57] J. Mosely, "Asynchronous Distributed Flow Control Algorithms," Ph. D. Thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, 1984.

[58] R. Motwani and P. Raghavan, *Randomized Algorithms,* Cambridge University Press, 1995.

[59] A. Odlyzko, "The Paris Metro Proposal for Pricing and Congestion Control on the Internet," invited paper in *DIMACS Workshop on Networks in Distributed Networking,* Special Year on Networks, DIMACS Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, October 1997.

[60] C. H. Papadimitriou, *"The Value of Information,"* invited talk at the World Congress of Economics, Moscow, August 1992.

[61] C. H. Papadimitriou and M. Yannakakis, "On the Value of Information in Distributed Decision Making," *Proceedings of the 10th Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing,* pp. 61–64, August 1991.

[62] C. H. Papadimitriou and M. Yannakakis, "Linear Programming Without the Matrix," *Proceedings of the 25th Annual ACM Symposium on Theory of Computing,* pp. 121–129, May 1993.

[63] C. Partridge, *Gigabit Networking,* Addison-Wesley, 1994.

[64] C. Partridge and S. Pink, "An implementation of the Revised Internet Stream Protocol (ST-2)," *Internetworking: Research and Experience*, Vol. 3, No. 1, pp. 27-54, March 1992.

[65] G. Polya, "Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe zur Kundenwerbung," *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik und Mechanik,* Vol. 10, pp. 96-97, 1930.

[66] M. D. Prycher, *Asynchronous Transfer Mode, Solution for Broadband ISDN,* Ellis Horwood, 1992.

[67] K. K. Ramakrishnan, R. Jain and D. Chiu, "Congestion Avoidance in Computer Networks with a Connectionless Network Layer – Part IV: A Selective Binary Feedback Scheme for General Topologies Methodology," *DEC-TR-510*, Digital Equipment Corporation, 1987.

[68] K. S. Sin and H. H. Tzeng, "Adaptive Proportional Rate Control (APRC) with Intelligent Congestion Indication," Technical Report ATM-FORUM/94-0888, University of California at Irvine, September 1994.

[69] A. S. Tanenbaum, *Modern Operating Systems,* Prentice-Hall, 1992.

[70] C. Topolcic, "Experimental Internet Stream Protocol: Version 2 (ST-II)," Technical Report TR-455, Laboratory for Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, 1989.

[71] W. K. Tsai, Y. Kim, and L. C. Hu, "ASAP: A Non-Per-VC Accounting Max-Min Protocol for ABR Flow Control with Optimal Convergence Speed," *Proceedings of IEEE SICON'98,* June/July 1998.

[72] J. Walrand and P. Varaiya, *High-Performance Communication Networks,* Morgan Kaufmann, 1996.

[73] L. Zhang, S. Deering, D. Estrin, S. Shenker and D. Zappala, "RSVP: A New Resource ReSerVation Protocol," *IEEE Network,* Vol. 7, No. 5, pp. 8–18, 1993.